Hochschultag: Die p-adischen Zahlen

Grundidee: Reelle Zahlen lassen sich in Dezimalschreibweise schreiben.

Bsp: $4/3 = 1 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + \ldots$

$$\mathbb{R} = \{ \underbrace{b_k 10^k + b_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + b_0 10^0 + b_{-1} 10^{-1} + b_{-2} 10^{-2} + \ldots}_{\sum_{k \geq i} b_i 10^i} : k \in \mathbb{Z}, \text{ f.a. } i \leq k \ b_i \in \{0, .., 9\}$$

$$\cup \{ - \sum_{k \geq i} b_i 10^i : k \in \mathbb{Z}, \text{ f.a. } i \leq k \text{ gilt } b_i \in \{0, .., 9\} \}$$

Klar: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Heute: Was passiert, wenn wir die Dez.schreibweise "umkehren" (unendl. viele Stellen vorm Komma, endl. viele dahinter)?

Wir definieren $\mathbb{Q}_{10} := \{ \sum_{i \geq k} b_i 10^i : k \in \mathbb{Z}, b_i \in \{0, .., 9\} \}$ '10-adischen Zahlen'

Ziele:
(1.) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}_{10}$
(2.) Addition auf $\mathbb{Q}_{10}$
(3.) Multiplikation auf $\mathbb{Q}_{10}$
(4.) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_{10}$
(5.) $\mathbb{Q}_{10}$ hat 'Nullteiler.'

(1.) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}_{10}$ klar: Nat. Zahlen haben endl. Dezimaldarst.

Bsp: $126 = 6 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$

$1 = 1 \cdot 10^0$

Weitere Bsp. 10-adischer Zahlen

$g = \ldots 33310{,}59 = 9 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + \ldots$

$h = \ldots 99999 = 9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 + \ldots = \sum_{i \geq 0} 9 \cdot 10^i$

(2.) Addition auf $\mathbb{Q}_{10}$

Bsp: $g + 1 = 9 \cdot 10^{2} + 5 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + \ldots$

$h + 1 = 0 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + \ldots = 0$

"unendlicher Übertrag geht verloren"

$\Rightarrow h = -1$.

$g+h = 9\cdot 10^{-2} + 5\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{0} + 0\cdot 10^{1} + 3\cdot 10^{2} + \dots$

$h+126 = 5\cdot 10^{0} + 2\cdot 10^{-1} + 1\cdot 10^{2} + 0\cdot 10^{3} + 0\cdot 10^{4} + \dots$

Allgemein: Addition: $\sum_{i\geq k} b_i 10^i + \sum_{i\geq k} c_i 10^i := \sum_{i\geq k} (b_i + c_i) 10^i$ 'mit Übertrag'

Subtraktion: Sei $m \in \mathbb{N}$, $m = \sum_{i=0}^{l} m_i 10^i$

$\Rightarrow -m = (10-m_0)10^0 + (9-m_1)10^1 + \dots + (9-m_l)10^l + 9\cdot 10^{l+1} + 9\cdot 10^{l+2} + \dots$

Beh: Wenn $b \in \mathbb{Q}_{10}$, $b = \sum_{i\geq k} b_i 10^i$

$\Rightarrow -b = (10-b_k)10^k + \sum_{i\geq k+1} (9-b_i) 10^i$

Bew: $b + (-b) = 0\cdot 10^k + 1\cdot 10^{k+1} + \sum_{i\geq k+1} b_i 10^i + \sum_{i\geq k+1} (9-b_i) 10^i$

$= 0\cdot 10^k + 10^{k+1}(1 + \underbrace{b_{k+1} + 9 - b_{k+1}}_{=10}) + \sum_{i\geq k+2} 9\cdot 10^i$

$= 0$

Wir haben gerade gesehen:

(A1) + setzt die übliche Addition auf $\mathbb{N}$ fort

(+) $\mathbb{Q}_{10}$ ist abg. bzgl. + und − ($x,y \in \mathbb{Q}_{10} \Rightarrow x+y, x-y \in \mathbb{Q}_{10}$)

Es gelten die folgenden Rechenregeln bzgl. +:

(K1) 0 ist neutrales Elem

$\forall x: x + 0 = 0$ $\qquad\forall$ = "für alle"

(K2) Assoziativität:

$\forall x,y,z \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

(K3) Es gibt Inverse

$\forall x \exists y \quad x+y = 0$ $\qquad\exists$ = "es gibt"

(K4) Kommutativität:

$\forall x,y \quad x+y = y+x$

Da $(\mathbb{Q}_{10},+)$ die Gesetze (K1)-(K4) erfüllt, sagt man

"$(\mathbb{Q}_{10},+)$ ist abelsche Gruppe"

(3.) Multiplikation in $\mathbb{Q}_{10}$

zunächst für $k=0$ "ganze 10-adische Zahlen"

$$\left(\sum_{i\geq 0} b_i 10^i\right)\left(\sum_{i\geq 0} c_i 10^i\right) := b_0 c_0 10^0 + (c_0 b_1 + c_1 b_0) 10^1 + \dots$$
$$= \sum_{i\geq 0} \left(\sum_{\substack{j,l \\ j+l=i}} a_j b_l\right) 10^i$$

Bsp: $h = \sum_{i\geq 0} 9 \cdot 10^i \qquad f = \dots 101010$

$$h \cdot 1 = 9 \cdot 10^0 + (9 \cdot 0 + 9 \cdot 1) 10^1 + (9 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 9 \cdot 10) 10^2 + \dots$$
$$= h$$
$$h \cdot f = 0 \cdot 10^0 + 9 \cdot 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 1 \cdot 10^2 + \underbrace{(9+9) \cdot 10^3}_{8 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4} + \dots$$

Allgemein $\left(\sum_{i\geq k} b_i 10^i\right)\left(\sum_{i\geq k'} c_i 10^i\right) = 10^{-k}\left(\sum_{i\geq 0} b_{i-k} 10^i\right) 10^{-k'}\left(\sum_{i\geq 0} c_{i-k'} 10^i\right)$
$$= 10^{-(k+k')} (\dots)$$

Analog zur Addition

(IN·) Multipl. auf $\mathbb{Q}_{10}$ setzt die auf $\mathbb{N}$ fort

(·) $\mathbb{Q}_{10}$ ist abg. unter ·

Es gelten die folgenden Rechenregeln bzgl. ·

(K5) 1 ist neutrales Element

$$\forall x \quad x \cdot 1 = x$$

(K6) Assoziativität

$$\forall x,y,z \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

(K7) Kommutativität:

$$\forall x,y \quad x \cdot y = y \cdot x$$

(K8) Distributivität:

$$\forall x,y,z \quad x(y+z) = xy + x \cdot z$$

Da (K1) - (K8) in $(\mathbb{Q}_{10}, +, \cdot)$ gelten, sagt man:

"$(\mathbb{Q}_{10}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring"

Außerdem gilt

(K9) $0 \neq 1$.

(4.) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_{10}$

Wir müssen zeigen: f.a. $m \in \mathbb{N}$ ist $1/m \in \mathbb{Q}_{10}$

Dann $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_{10}$ (da $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}_{10}$ & $\mathbb{Q}_{10}$ abg. unter $\cdot$ und $-$)

Sei zunächst $m \in \mathbb{N}$, teilerfremd zu 10 ($5 \nmid m$, $2 \nmid m$)

Wir suchen $z \in \mathbb{Q}_{10}$ mit $m \cdot z = 1$, $z = \sum_{i \geq 0} z_i 10^i$, d.h.

$1 \cdot 10^0 + 10^1 \cdot (\ldots) = m_0 \cdot z_0$, alle weiteren Stellen von $m \cdot z$ sind 0.

$$m_0 = \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{cases} \Rightarrow z_0 = \begin{cases} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 9 \end{cases}$$

Bsp: $m = 17$ suche $z = \sum_{i \geq 0} z_i 10^i$ mit $mz = 1$

$= 7 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1$

Dann gilt $z_0 = 3 \Rightarrow m_0 \cdot z_0 = 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1$

2te Stelle von $m \cdot z$ (was steht vor der 10^1):

$(2 + z_0 \cdot m_1 + m_0 \cdot z_1) = 2 + 3 \cdot 1 + z_1 \cdot 7$

$\Rightarrow$ wähle $z_1 = 5$ usw.

Allgemein: Ang. $z_0, \ldots, z_{n-1}$ sind schon gewählt, s.d. die letzten n Stellen von $\left(\sum_{i=0}^{n-1} z_i 10^i\right)\left(\sum_{i \geq 0}^{n} m_i 10^i\right)$ gerade $\underbrace{0 \ldots 0}_{(n-1)\text{-mal}}1$ sind.

D.h. wir suchen x mit

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} z_i 10^i + x \cdot 10^n\right)\left(\sum_{i=0}^{n} m_i 10^i\right) = 1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + \ldots + 0 \cdot 10^{n} + 10^{n+1}(\ldots)$$

$$\Leftrightarrow \Big(x \cdot \underbrace{m_0}_{\in \{1,3,7,9\}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sum_{j,l} z_j m_l\Big)}_{\in \mathbb{N}}\Big) = 0 \cdot 10^0 + 10^1 \cdot (\ldots)$$

$\Rightarrow$ kann x geeignet wählen!

Außerdem gilt: $1/2 = 0{,}5$ $1/5 = 0{,}2$

$\Rightarrow 1/m \in \mathbb{Q}_{10}$ f.a. $m \in \mathbb{N}$.

(5.) Nullteiler in $\mathbb{Q}_{10}$

Etappenziel: Es gibt $e \in \mathbb{Q}_{10}$, $e \neq 0,1$ mit $e^2 = e$.

Wir suchen $(e_i)_{i \geq 0}$ mit $e_0 \neq 0,1$ s.d. f.a. $n \geq 0$ gilt:

(*) $\quad (\sum_{i=0}^{n} e_i 10^i)^2 = \sum_{i=0}^{n} e_i 10^i + e_{n+1} 10^{n+1} + 10^{n+2} (\dots)$

Dann folgt für $e = \sum_{i \geq 0} e_i 10^i \quad e^2 = e$.

Wähle $e_0 = 5$, dann gilt f.a. $r = \sum_{i \geq 0} r_i 10^i$

$$(e_0 + 10r)^2 = (5 + 10r)^2 = 5 \cdot 10^0 + 10(\dots)$$

Ang. $e_0, \dots, e_n$ sind bereits gewählt, s.d. (*) gilt.

Sei e_{n+1} die $(n+2)$te Stelle von $(\sum_{i=0}^{n} e_i 10^i)^2$

Dann gilt:

$$(\sum_{i=1}^{n+1} e_i 10^i)^2 = (\sum_{i=0}^{n} e_i 10^i + e_{n+1} 10^{n+1})^2$$

$$= \underbrace{(\sum_{i=0}^{n} e_i 10^i)^2}_{\text{letzten (n+2) Ziffern wie gehofft}} + \underbrace{\underbrace{2(\sum_{i=0}^{n} e_i 10^i)}_{\text{wg. } e_0 = 5 \text{ ist die erste Stelle} = 0} e_{n+1} 10^{n+1}}_{(n+2)\text{te Stelle ist } 0} + \underbrace{e_{n+1}^2 10^{2n+2}}_{\text{spielt keine Rolle}}$$

Nun folgt $e^2 = e$, also $e^2 - e = 0$, d.h. $e \cdot (e-1) = 0$

Es gilt: $e, e-1 \neq 0$, aber e und $e-1$ sind Nullteiler.

In $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ gilt:

(K10): $\forall x \exists y \ (x \neq 0 \rightarrow x \cdot y = 1)$

Aber für e gilt das Gesetz in $\mathbb{Q}_{10}$ nicht:

Ang. $e \cdot e' = 1 \Rightarrow e^2 e' = 1 \Rightarrow e(e \cdot e') = 1$

$\Rightarrow e = 1$ ↯

Aufgabe für Sie:

Betrachten Sie

$$\mathbb{Q}_p := \{ \sum_{i \geq k} b_i p^i : k \in \mathbb{Z},\ b_i \in \{0, \dots, p-1\} \}$$

für eine Primzahl p.

Dann gilt wieder $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_p$ und $(\mathbb{Q}_p, +, \cdot)$ erfüllt (K1) – (K10), d.h. "$(\mathbb{Q}_p, +, \cdot)$ ist ein Körper"

Hinweis zu K10: Zeigen Sie die Existenz von mult. Inversen zunächst für $\sum_{i \geq 0} b_i p^i$ mit $b_0 \neq 0$.