Die p-adischen Zahlen und der Satz von Ax-Kochen / Ershov

§1 Einführung

Arithmetik - Rechenkunst

Körperarithmetik -

D.h. etwa: Welche ? gelten in einem

Bsp: • $\forall x \, \exists y \, (\neg x = 0 \rightarrow x \cdot y = 1)$

• $\forall x \quad x + x + x = 0$

Was ist ein Rechengesetz?
$\rightsquigarrow$ benutze Logik 1ter Stufe zur Definition.

Sei K ein Körper. Wir betrachten

Diese lassen sich wie folgt beschreiben

(1.) (in mehreren Variablen)

(2.) Boolesche Kombinationen darüber
( )

(3.) Quantifizierung
z. B.

Def: Formeln, in denen über
wird, nennt man

Frage: Gibt es eine (natürliche / rekursive)
, so dass
" " sich daraus

Antwort:

Entscheidbar	nicht Entscheidbar

UNBEKANNT: ,

Ausblick heute:

- Erinnerung / Einführung $\mathbb{Q}_p$
- Axiomatisierung à la AKE
- Anwendung: Transfer von Rechengesetzen zwischen Charakteristik 0 und $p > 0$.

Anschauung $\mathbb{Q}_p$:

§ 2 Bewertungen.

Intuition: " " für Körperelemente.

$\rightsquigarrow$

Def: Eine abelsche Gruppe $(\Gamma, +)$ zusammen mit einer totalen Ordnung $\leq$ heißt , wenn für alle $\delta, \lambda, \gamma \in \Gamma$ gilt:

Beispiel:
- $(\Gamma, +)$ mit der
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit lexikographischer Ordnung:
  $(\gamma_1, \lambda_1) \leq (\gamma_2, \lambda_2)$

Zoom-Poll:

Welche der folgenden Ungleichungen gelten in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

* $(0,1) \leq (1,0)$
* $(2,3) \leq (1,4)$
* $(-3,-1) \leq (-3,2)$
* $(0,1) \leq (n,m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > 0$.

Def: Sei K ein Körper. Eine auf K ist eine Abbildung , wobei ist, so dass f.a. $x, y \in K$ gilt:

(i)

(ii)

(iii)

Intuition:

Beispiele: • K beliebiger Körper, $\Gamma_v = \{0\}$

• $K = \mathbb{Q}$, p prim, sei $x \in \mathbb{Q}^\times$

"p-adische Bewertung"

Schreibe x mit $v, c, d \in \mathbb{Z}$, $p \nmid c, d$

und setze

Dann gilt:

Für $y = p^\mu e/f$ mit $\mu, e, f \in \mathbb{Z}$, $p \nmid e, f$

(ii) $v_p(x \cdot y) =$

$=$

$=$

(iii) OE $v \leq \mu$

$v_p(x+y) =$

$=$

$=$

$\geq$

Zoom-Poll:

Welche p-adischen Bewertungen sind richtig berechnet?

* $v_2(2/5) = 1$
* $v_3(9) = 3$
* $v_5(-2/5) = 1$
* $v_5(2/5) = -1$
* $v_2(16/48) = 0$
* $v_7(4/49) = 2$

Def / Bem: Sei (K,v) bewerteter Körper.

Der Ring ist ein

von K, d.h. es gilt f.a.

$\mathcal{O}_v$ hat ein

Der Körper heißt der

von (K,v).

Bew: •

• Sei $y \in K$, $y \notin \mathcal{O}_v$, d.h. $v(y) < 0$.

• Sei $y \in \mathcal{O}_v$. Dann gilt

(*)

Zudem:

$\boxtimes$

Beispiele: • K beliebiger Körper, $v(x) = 0$ f.a. $x \in K^\times$

$\mathcal{O}_v =$

$\mathfrak{m}_v =$

$Kv =$

• $K = \mathbb{Q}$, p prim, $v = v_p$

$\mathcal{O}_v =$

$=$

$\mathfrak{m}_v =$

$=$

$Kv =$

Anwendung: $f(X) = 10X^5 + 8X^3 + 7X^2 + X + 5$

Hat f eine NSt. in $\mathbb{Q}$?

$\rightsquigarrow$

Def: Sei (K,v) ein bewerteter Körper und $(c_i)_{i\in\omega}$ eine Folge in K.
Wir sagen , wenn es ein
mit

f.a.

Bsp: • c_i ist Cauchy

$\rightsquigarrow$ allgemeiner ist für
, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$
Cauchy in $(\mathbb{Q}, v_p)$.

Def: Wir definieren den **Körper der p-adischen Zahlen**

Satz: Mit der 'natürlichen' Addition und Multiplikation
ist
Dieser ist die von
$\mathbb{Q}$ bezüglich .

Beispiel: • $y \in \mathbb{N} \Rightarrow$ für $b_i \in \{0, \dots, p-1\}$ geeignet

etwa $y = 27$ $p = 2$
$y =$

• $x = p^{-m} \cdot y$ mit $m \in \mathbb{N}$

• $z = -y \Rightarrow z = \sum_{i=0}^{\infty} c_i p^i$

mit

etwa

Lemma: Die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$ setzt sich auf $\mathbb{Q}_p$ fort mittels

$$v_p\left(\sum_{i=m}^{\infty} b_i p^i\right) :=$$

und

Bewertungsring $\mathbb{Z}_p :=$

Wertegruppe , Restklassenkörper

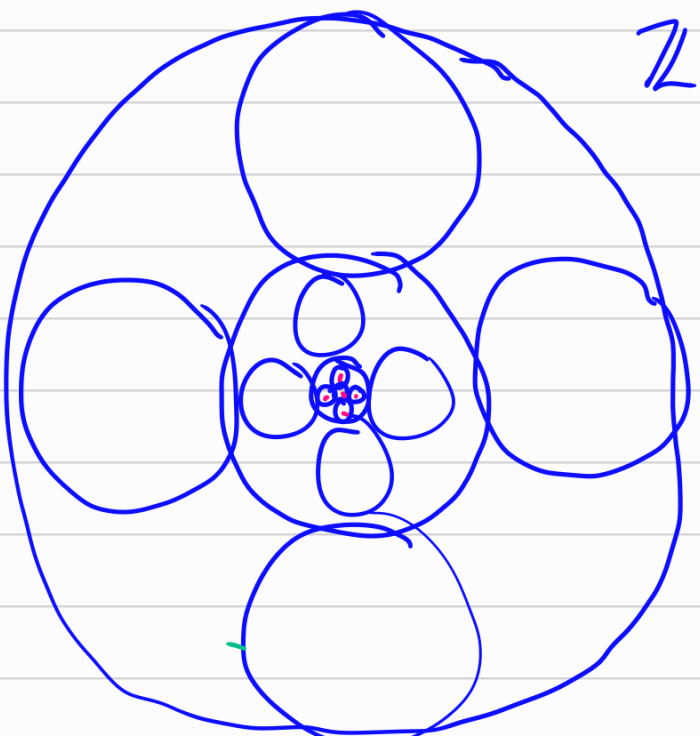
<u>Bew</u>: Dies ist eine Bewertung:

v_p stimmt auf $\mathbb{Z}$ überein

$\Rightarrow$ $\boxtimes$

Bem: Es gilt !

Visualisierung: $p = 5$



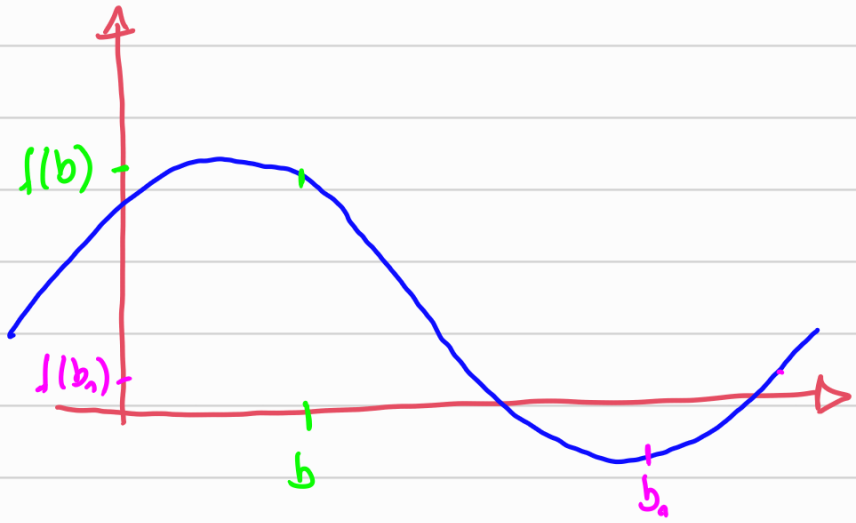
Satz (Hensels Lemma) Sei $b \in \mathbb{Z}_p$ und $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ mit .

Dann ex. .

und

Bew. idee: Benutze Newton-Approximation.

Reelles Bild:



Rechne nach: $f(b)$ "nahe Null"

$\Rightarrow$ "noch näher"

$\rightsquigarrow$ erhalte , die gegen eine

. $\square$

Korollar: Für jedes $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ und $b \in \mathbb{Z}_p$

mit und

"wenn b nah an einer einfachen Nst ist"

ex. .

"dann ist eine Nullstelle in der Nähe"

Zoom-Poll:

Für welche p hat $f(X) = X^2 - 7$ eine Nullstelle in $\mathbb{Q}_p$?

* $p = 3$

* $p = 5$

* $p = 2$

Anwendung (J. Robinson) $(p \neq 2)$

$\mathbb{Z}_p$ wird in $\mathbb{Q}_p$ definiert durch die Formel

<u>Bew</u>: Sei $x \in \mathbb{Z}_p$

Sei $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$

Satz (Ax-Kochen / Ershov)

Ein bewertete Körper (K,v) erfüllt genau dann die gleichen Aussagen wie $\mathbb{Q}_p$, wenn gilt:

(i)

d.h.

(ii) ist Element von Γ_v

d.h.

(iii)

(iv) $\equiv$

(v) (K,v) ist , d.h. für alle

ex. und

$\rightsquigarrow$ Axiomenschema,

Korollar: $Th(\mathbb{Q}_p)$ ist , d.h. es lässt sich , welche gelten.

Korollar: $K := \mathbb{Q}_p \cap \mathbb{Q}^{alg}$, $v = v_p \restriction_K$

Was hat das jetzt mit positiver Charakteristik zu tun?

$\mathbb{F}_p(t) =$

Für $f \in \mathbb{F}_p[t]$, $f = \sum_{i=0}^{d} b_i t^i$ setze

$v_t(f)$

Für $\in \mathbb{F}_p(t)$ setze .

Dann ist v_t mit , Restklassen-körper und

$\mathbb{F}_p((t)) := \{ \quad \}$

Vervollst. bezüglich v_t

$v_t\left(\sum_{i=m}^{\infty} b_i t^i\right) =$ ist wiederum

mit ,

Restklassenkörper und in Γ_v

Zudem: $(\mathbb{F}_p((t)), v_t)$ ist

Aber:

$\rightsquigarrow$

Trick: Im " " gelten die gleichen Aussagen

Satz (Ax-Kochen/Ershov) Seien (K,v) und (L,w) zwei henselsch bewertete Körper mit

Dann gilt:

$\equiv$ und $\equiv$ $\Rightarrow$ $\equiv$

gleiche Rechengesetze (Aussagen) gelten

Korollar: Sei φ eine Aussage. Dann gilt:

$\Leftrightarrow$

Rechengesetz φ gilt in $\mathbb{Q}_p$ bzw. $\mathbb{F}_p((t))$

Beweis: Kompaktheitssatz.

Nur "$\Rightarrow$".

Ang. $\mathbb{F}_p((t)) \models \varphi$ f.a. $p \in \mathbb{P} \setminus S_1$, S_1 endl.

(*)

$AK/E_{0,0}$ $\Rightarrow$ ex. vollständige Theorie T hens. bew. Körper

Sei $\Sigma_0 \subseteq T$ endl.

$\Rightarrow$

$\lightning$! $\boxtimes$

Jahreszahl unklar, < 1962

Artins Vermutung: Sei $p(x_1, \dots, x_n)$ ein homogenes Polynom von Grad d über $\mathbb{Q}_p$.
Wenn ist, dann hat p eine

$\hookrightarrow$ als Artin die Vermutung aufstellt, ist die analoge Aussage

Terjanian ( ): Artins Vermutung

1965

Satz (Ax-Kochen / Ershov): Gegeben $d \in \mathbb{N}$.
Für fast alle p
für homogene Polynome von Grad d

Bezug zu Münster:

AKE-Resultate (
)
zentral in der Modelltheorie bzw. Körper

$\rightsquigarrow$