Dr. F. Jahnke
Dr. D. Palacín

Universität Münster
Wintersemester 2015/16

Berechenbarkeit
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei $\Sigma = \left\{ \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right] \right\}$. Ein Wort $w \in \Sigma^*$ kann als drei übereinanderstehende Binärzahlen a_w, b_w, c_w gelesen werden (die führende Nullen haben können). Zeigen Sie, dass die Sprache $S = \{w \in \Sigma^* \mid a_w + b_w = c_w\} \cup \{\varepsilon\}$ regulär ist.

Beispiel: Bei $w = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right]$ ist $a_w = \mathrm{bin}(0101) = 5$, $b_w = \mathrm{bin}(0110) = 6$ und $c_w = \mathrm{bin}(1011) = 11$. Da $5 + 6 = 11$ ist, ist $w \in S$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Spiegelung $\overleftarrow{S}$ regulär ist. *4 Punkte*

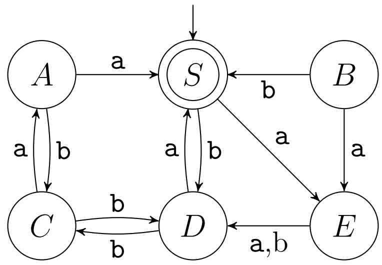
Die *natürliche Relation* einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist die Äquivalenzrelation auf Σ^* mit den Äquivalenzklassen L und $\Sigma^* \setminus L$.

Aufgabe 2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) Seien die natürliche Relation zweier beliebiger Sprache L_1 und L_2 rechtskongruent. Dann ist die natürliche Relation der Sprache $L_1 \cup L_2$ auch rechtskongruent.

b) Zu jeder Äquivalenzrelation $\equiv$ gibt es mindestens zwei Sprachen, die von $\equiv$ saturiert werden. *4 Punkte*

Aufgabe 3. Betrachten Sie den folgenden DEA über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$:



a) Bestimmen Sie die äquivalenten Zustände mit Hilfe des Table-Filling-Algorithmus' aus der Vorlesung.

b) Geben Sie den kollabierten Automaten an. *4 Punkte*

(Bitte wenden.)

Zu einer natürliche Zahl m und einem regulären Ausdruck R über einem Alphabet Σ definieren wir

$$R^m = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{m\text{-mal}}.$$

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Betrachten Sie den regulären Ausdruck

$$R = (\mathtt{0} + \mathtt{1})^* \mathtt{1} (\mathtt{0} + \mathtt{1})^{n-1}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.

a) Welche Wörter sind in der zugehörigen Sprache $L(R)$?

b) Geben Sie einen NEA mit $(n+1)$-vielen Zuständen an, der $L(R)$ erkennt.

c) Beweisen Sie, dass der minimale DEA, der $L(R)$ erkennt, 2^n-viele Zustände hat. *4 Punkte*

Abgabe bis Donnerstag, den 12.11., 9:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/bt/`