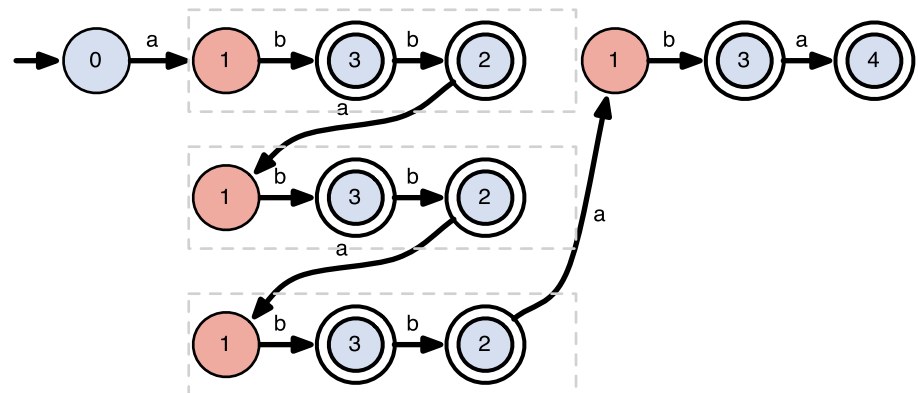


# Berechenbarkeitstheorie

## 2. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke

Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung

WWU Münster

# Deterministischer endlicher Automat

## Deterministischer Endlicher Automat

Ein DEA ist ein 5 Tupel  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  bei gilt

- $Q$  ist eine endliche Menge,
- $\Sigma$  ist ein Alphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  eine totale Funktion,
- $q_0 \in Q$ ,
- $F \subseteq Q$ .

Zustandsmenge

Übergangsfunktion

Startzustand

akzeptierende Zustände

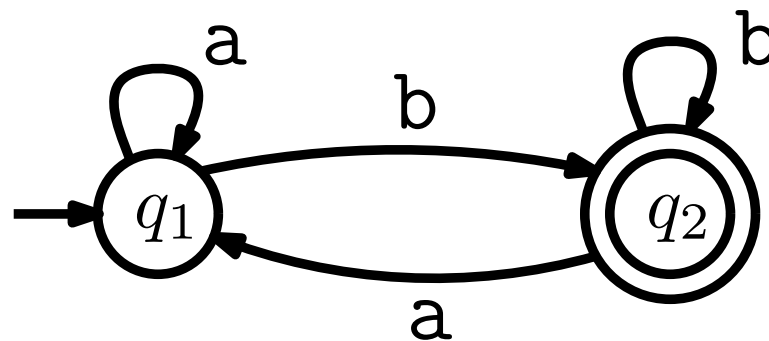
# Deterministischer endlicher Automat

## Deterministischer Endlicher Automat

Ein DEA ist ein 5-Tupel  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , wobei gilt

- $Q$  ist eine endliche Menge,
- $\Sigma$  ist ein Alphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  eine totale Funktion,
- $q_0 \in Q$ ,
- $F \subseteq Q$ .

Beispiel:  
(als Diagramm)



# Arbeitsweise

**$w$ -Lauf** eines DEAs  $M$  für ein Wort  $w \in \Sigma^*$ :

→ Folge von Zustandsübergängen  $(q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_m})$  mit

1.  $q_0 = q_{i_1}$ ,
2.  $w = x_1 x_2 x_3 \cdots x_{m-1}$ , mit  $x_i \in \Sigma$ ,
3.  $\delta(q_{i_k}, x_i) = q_{i_{k+1}}$  für alle  $1 \leq k < m$ .

## Akzeptanz eines Wortes (DEA)

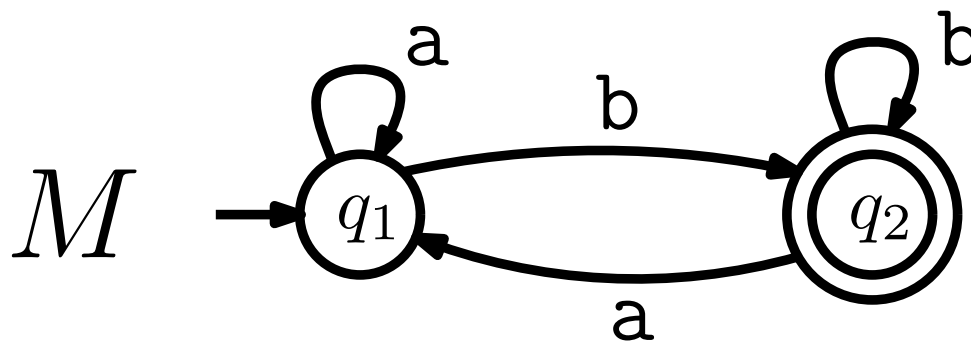
Ein DEA  $M$  **akzeptiert ein Wort**  $w \in \Sigma^*$  genau dann, wenn der  $w$ -Lauf von  $M$  in einem akzeptierenden Zustand endet.

## Erkennen einer Sprache (DEA)

Ein DEA  $M$  **erkennt (akzeptiert) die Sprache**

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}.$$

# Beispiel 1



- Wort: abaa

$$\delta^*(q_1, abaa) = q_1$$

da  $q_1 \notin F$  folgt,  $abaa \notin L(M)$

- Wort: bb

$$\delta^*(q_1, bb) = q_2$$

da  $q_2 \in F$  folgt,  $bb \in L(M)$

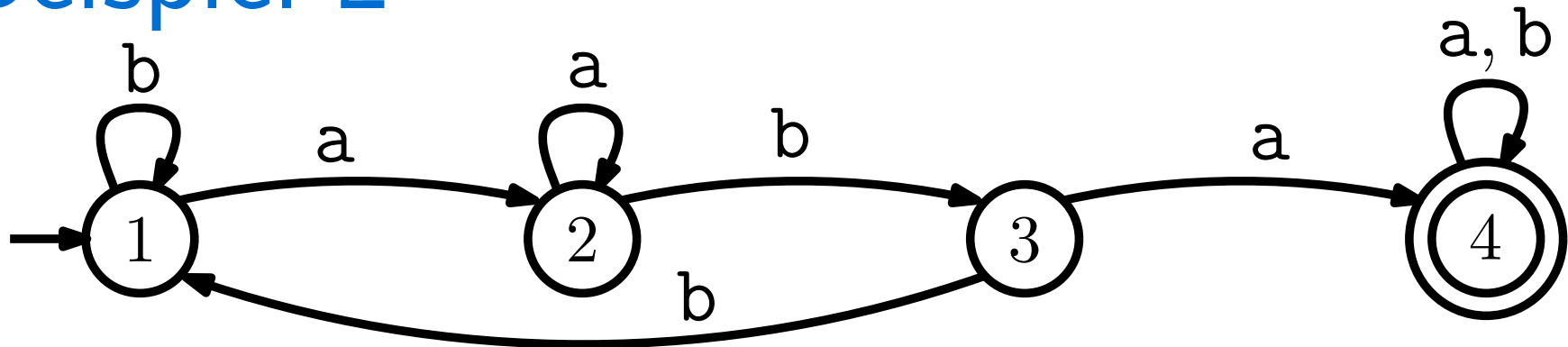
- Wort:  $\varepsilon$

$$\delta^*(q_1, \varepsilon) = q_1$$

da  $q_1 \notin F$  folgt,  $\varepsilon \notin L(M)$

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet auf } b\}$$

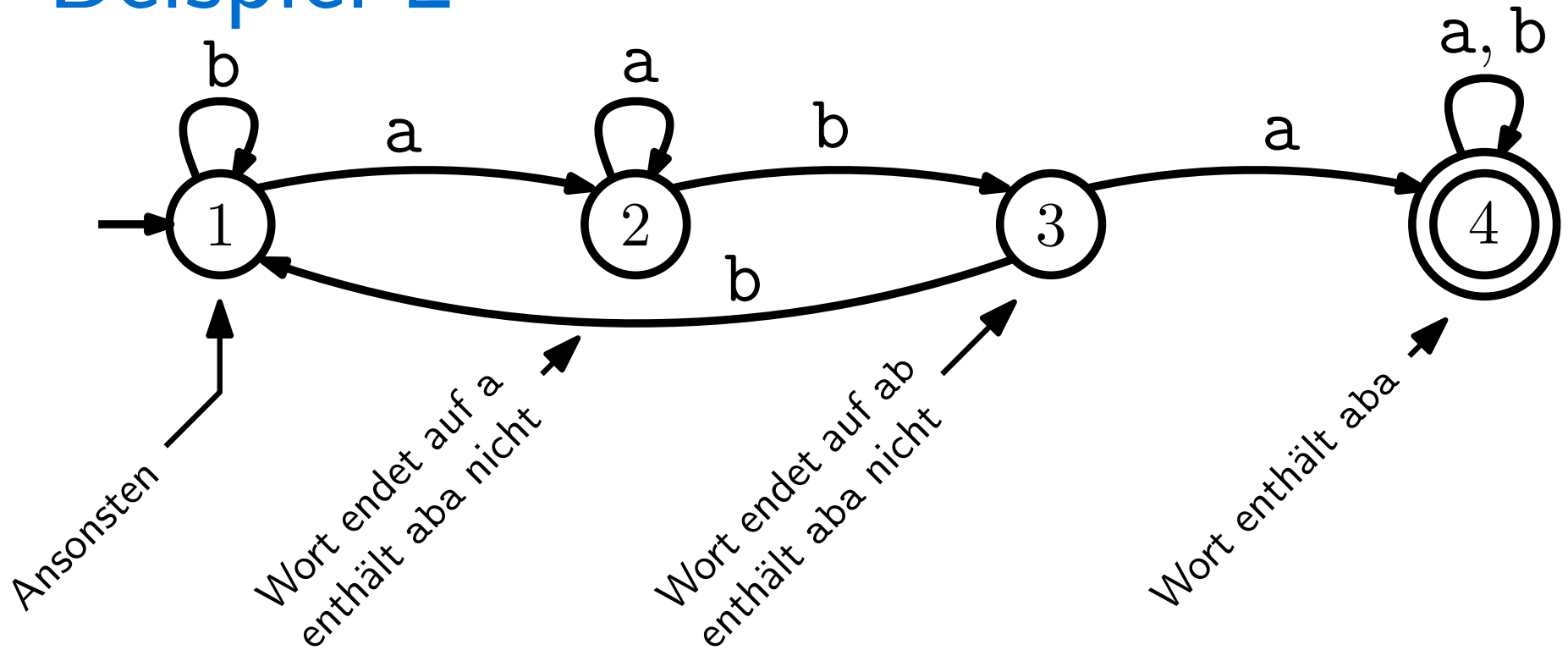
# Beispiel 2



- Wort: abbab  
Lauf endet im Zustand 3 → nicht akzeptiert
- Wort: babab  
Lauf endet im Zustand 4 → akzeptiert
- Wort beginnt mit babab  
Lauf endet im Zustand 4 → akzeptiert

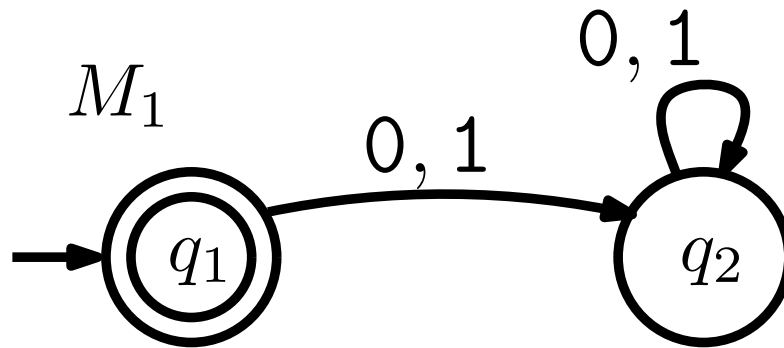
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält Teilwort aba}\}$$

# Beispiel 2

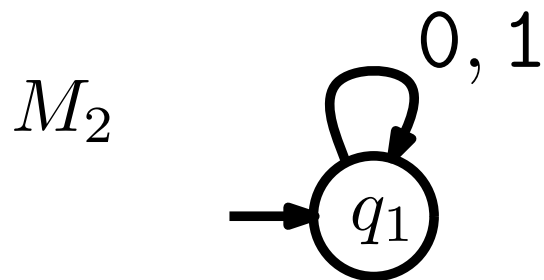


$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält Teilwort aba}\}$$

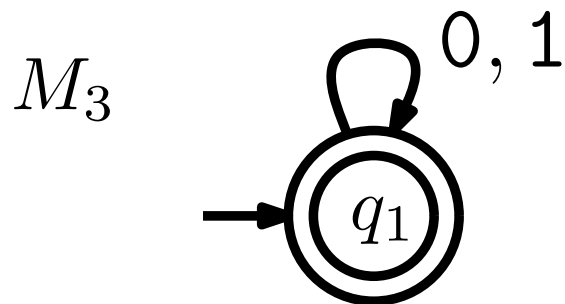
# Beispiele 3



$$L(M_1) = \{\varepsilon\}$$



$$L(M_2) = \emptyset$$



$$L(M_3) = \{0, 1\}^*$$



# Reguläre Sprachen

## Definition

Wir bezeichnen mit

$$\text{REG} = \{L \mid L \text{ wird von einem DEA erkannt}\}$$

die Menge der **regulären Sprachen**.

Eine Sprache  $L \in \text{REG}$  nennen wir **regulär**.

**Bsp.:**  $\{\varepsilon\}, \emptyset, \{a, ab, bbb\}, \{a^k \mid k \in \mathbf{N}\} \in \text{REG}$

## Definition

Eine Sprache  $L$  mit  $|L| < \infty$  heißt **endlich**.

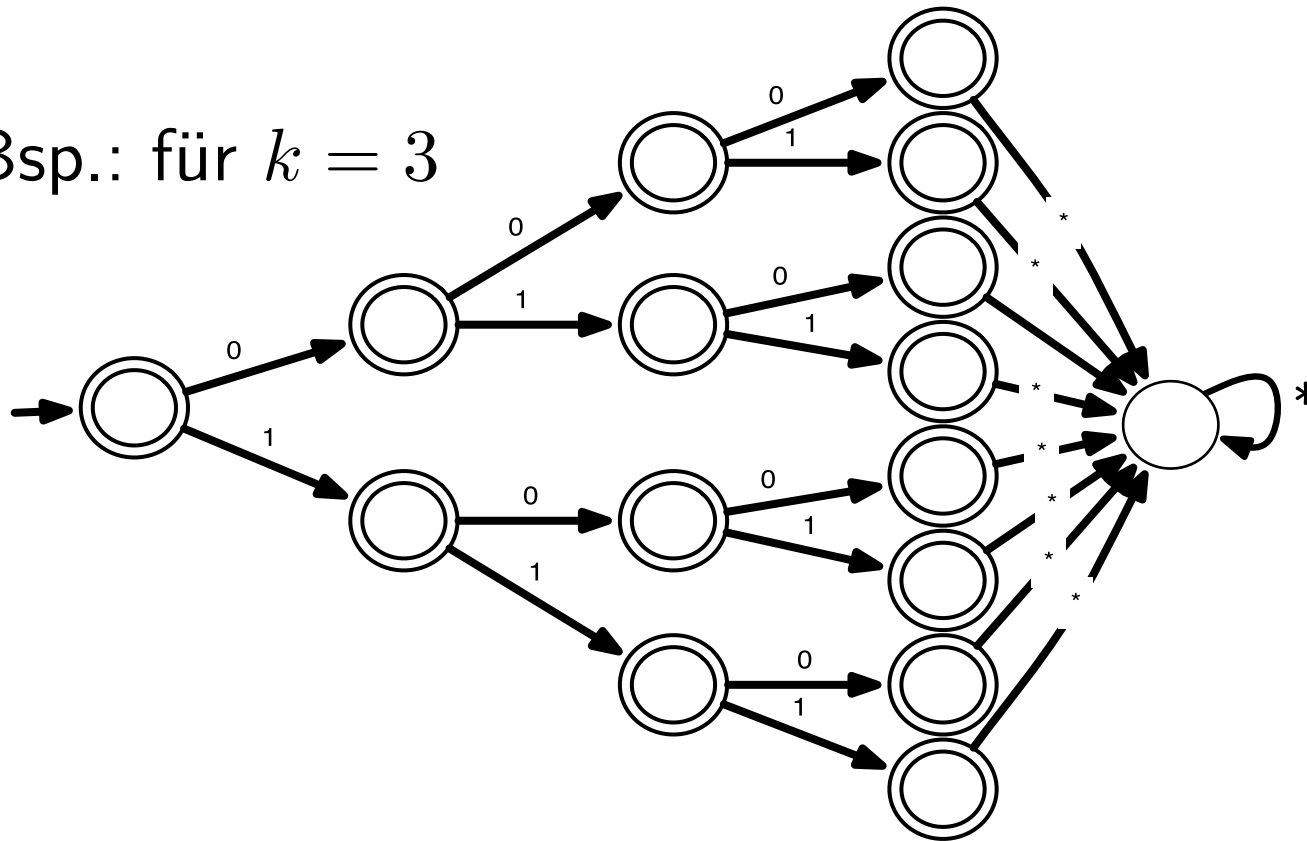
## Satz 1

Jede endliche Sprache ist regulär.

# Beweisskizze Satz 1

- Angenommen  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $L \in \text{REG}$ , und das längste Wort in  $L$  hat  $k$  Zeichen
- Konstruiere DEA der  $\Sigma^{\leq k}$  erkennt wie folgt

Bsp.: für  $k = 3$



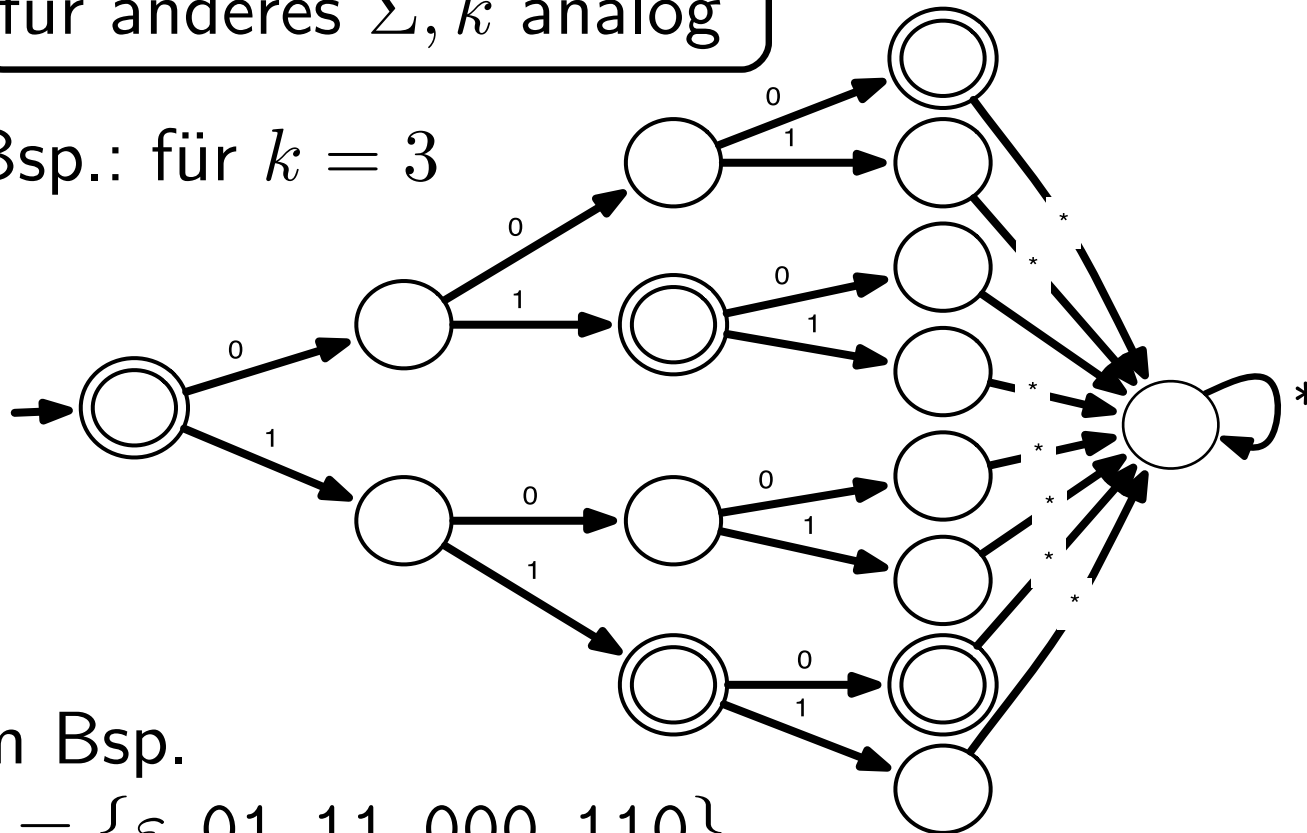
Wähle die akzeptierenden Zustände, sodass genau die Wörter aus  $L$  akzeptiert werden.

# Beweisskizze Satz 1

- Angenommen  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $L \in \text{REG}$ , und das längste Wort in  $L$  hat  $k$  Zeichen
- Konstruiere DEA der  $\Sigma^{\leq k}$  erkennt wie folgt

für anderes  $\Sigma, k$  analog

Bsp.: für  $k = 3$



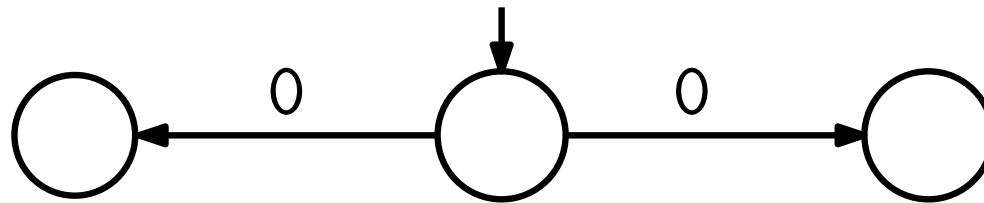
Im Bsp.

$$L = \{\varepsilon, 01, 11, 000, 110\}$$

Wähle die akzeptierenden Zustände, sodass genau die Wörter aus  $L$  akzeptiert werden.

# Nichtdeterminismus

- Erweiterung von Berechnungsmodellen
- Berechnungsvorschrift mit *Freiheiten* ausgestattet



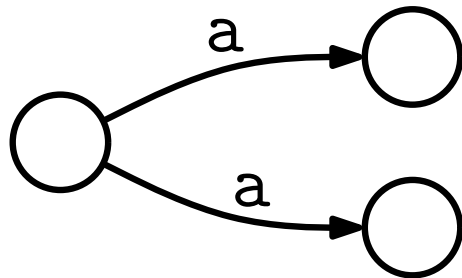
z.B. im DEA Kontext

- Akzeptanzbegriff: es **existiert eine** Möglichkeit die Eingabe zu akzeptieren
- Motivation: stärkerer Modellierungsapparat, Grundlage probabilistischer Modelle
- Ob der Nichtdeterminismus das Modell mächtiger macht, hängt vom Modell ab

# NEA mit $\varepsilon$ -Übergängen

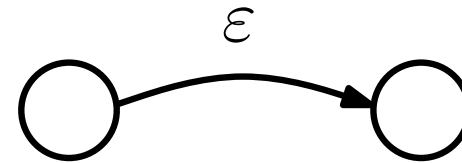
Aufwertung des DEA Modells mit 2 neuen Funktionen

1.



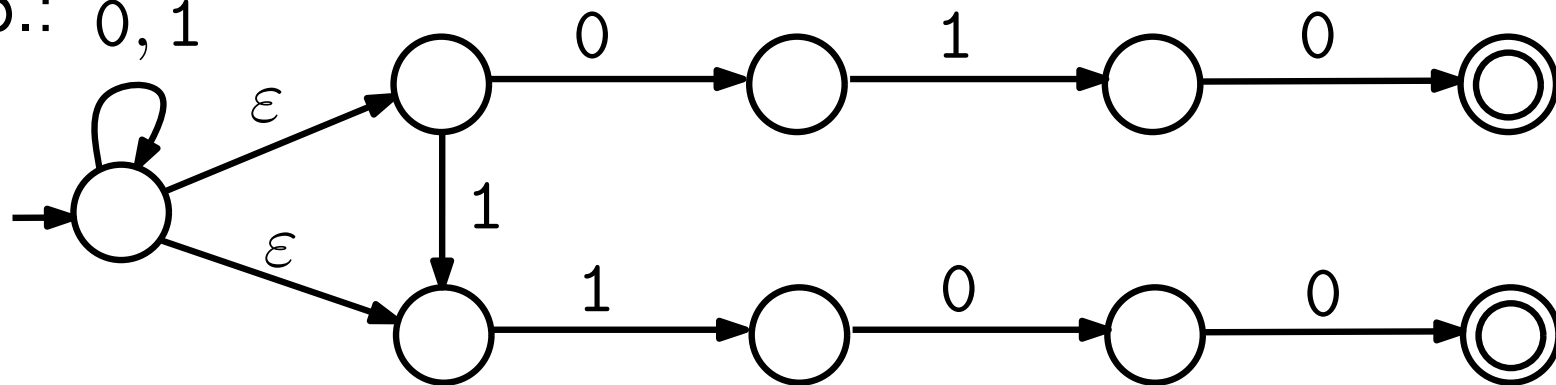
Nichtdeterminismus

2.



$\varepsilon$ -Übergänge

Im Bsp.: 0, 1



$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ endet auf } 010 \text{ oder } 100\}$$

## Definition

Ein **Nichtdeterministischer Endlicher Automat (NEA)**

ist ein 5-Tupel  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , mit:

- $|Q| < \infty, |\Sigma| < \infty,$
- $\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  (möglicherweise partiell!),
- $q_0 \in Q, F \subseteq Q.$

Hierbei: •  $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$   
 •  $\mathcal{P}(X) := \{A \subseteq X\}$  (Potenzmenge)

**w-Lauf** eines NEAs  $N$  für ein Wort  $w \in \Sigma^*$ :

Folge von Zustandsübergängen  $(q_{i_1}, x_1, q_{i_2}, x_2 \dots, q_{i_m})$  mit

1.  $q_0 = q_{i_1},$
2.  $w = x_1 x_2 x_3 \dots x_{m-1},$  mit  $x_i \in \Sigma_\varepsilon,$
3.  $\delta(q_{i_k}, x_i) \ni q_{i_{k+1}}$  für alle  $1 \leq k < m.$

**Ein Wort kann verschiedene Läufe haben !!**

## Akzeptanz eines Wortes (NEA)

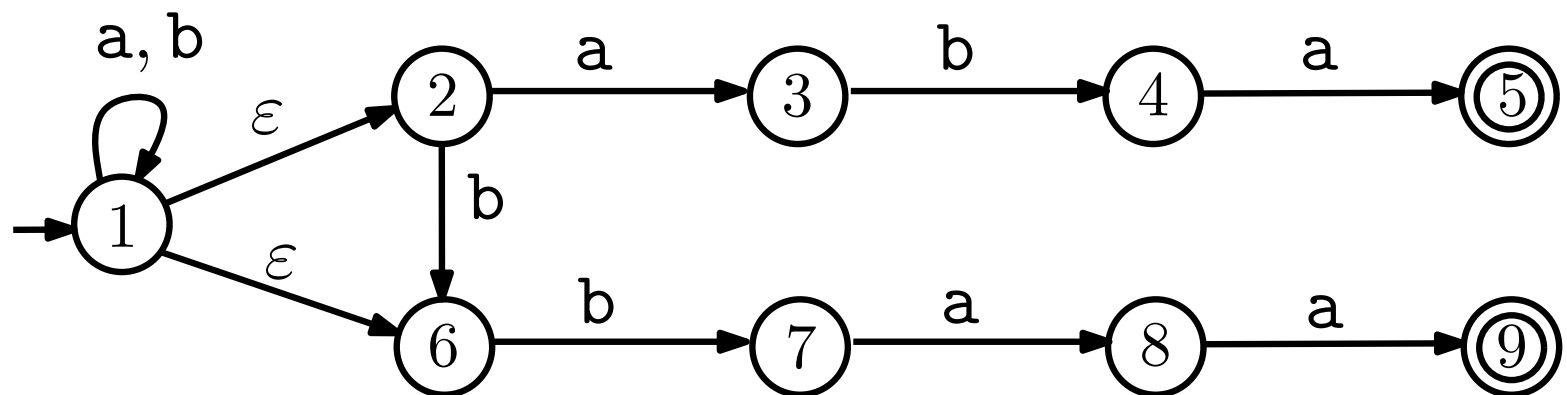
Ein DEA  $N$  **akzeptiert ein Wort**  $w \in \Sigma^*$  genau dann, wenn **ein**  $w$ -Lauf von  $N$  in einem akzeptierenden Zustand endet.

## Erkennen einer Sprache (NEA)

Ein NEA  $N$  **erkennt (akzeptiert) die Sprache**

$$L(N) := \{w \in \Sigma^* \mid N \text{ akzeptiert } w\}.$$

Wdh. Bsp.:



$w = aaba \in L$ , da  $(1, a, 1, \varepsilon, 2, a, 3, b, 4, a, 5)$  ein  $w$ -Lauf ist

$w = aabb \notin L$ , da alle  $w$ -Läufe in Zustand 1, 2, 6 oder 7 enden

# Iterierter Übergang beim NEA

## $\varepsilon$ -Abschluss

(wo komme ich hin ohne ein Zeichen zu lesen?)

$E(p \in Q) := \{q \in Q \mid q \text{ über } \geq 0 \text{ } \varepsilon\text{-Kanten von } p \text{ erreichbar}\}$

$E(P \subseteq Q) := \bigcup_{p \in P} E(p)$

## Definition

Für einen NEA  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ist die **iterierte Übergangsfunktion**  $\delta^k : Q \times \Sigma^k \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  definiert durch:

1.  $\delta^0(q, \varepsilon) = E(q)$  für alle  $q \in Q$ ,
2.  $\delta^i(q, wx) = E\left(\bigcup_{r \in \delta^{i-1}(q, w)} \delta(r, x)\right)$  für alle  $q \in Q$ ,  
 $w \in \Sigma^{i-1}$ ,  $x \in \Sigma$ .

**Schreibweise:**  $\delta^*(q, w)$  für  $\delta^{|w|}(q, w)$



# Iterierter Übergang beim NEA

## $\varepsilon$ -Abschluss

(wo komme ich hin ohne ein Zeichen zu lesen?)

$$L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

$$E(p) = \bigcup_{p \in F} \{p\}$$

## Definition

Für einen NEA  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ist die **iterierte Übergangsfunktion**  $\delta^k : Q \times \Sigma^k \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  definiert durch:

1.  $\delta^0(q, \varepsilon) = E(q)$  für alle  $q \in Q$ ,
2.  $\delta^i(q, wx) = E\left(\bigcup_{r \in \delta^{i-1}(q, w)} \delta(r, x)\right)$  für alle  $q \in Q$ ,  
 $w \in \Sigma^{i-1}, x \in \Sigma$ .

**Schreibweise:**  $\delta^*(q, w)$  für  $\delta^{|w|}(q, w)$

## Satz 2

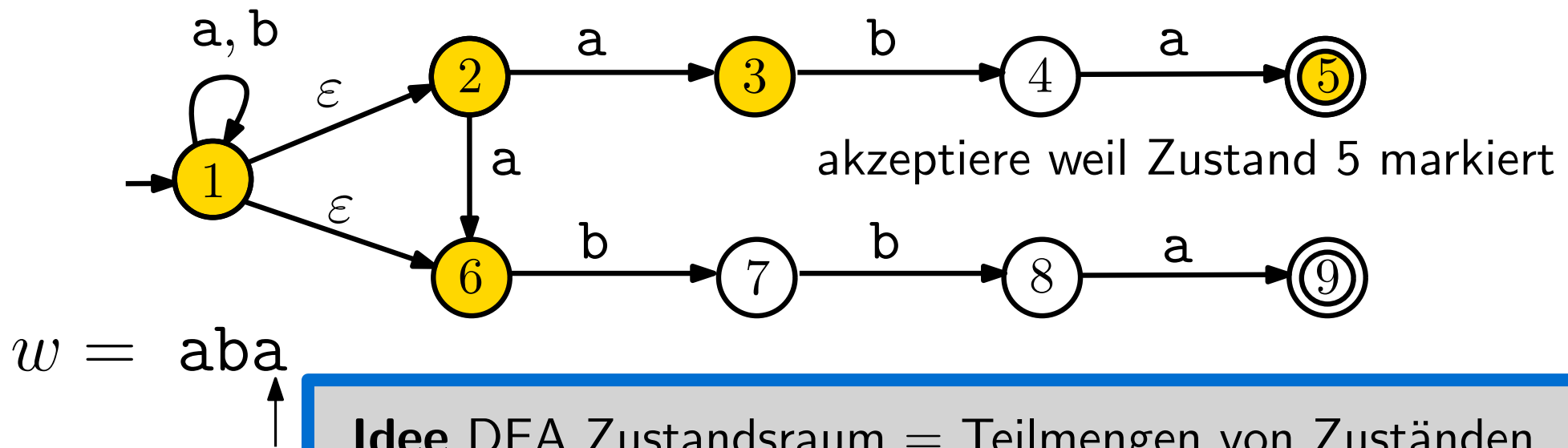
$$\{L \mid L \text{ wird durch NEA erkannt}\} = \text{REG}$$

**Hinweis** Jeder DEA kann als NEA verstanden werden der weder Nichtdeterminismus noch  $\varepsilon$ -Übergänge nutzt.

**Frage** Kann ich einen NEA durch einen DEA simulieren?

### Berechnung $\delta^*(q_0, w)$ von Hand

(In welchen Zuständen könnte ich aktuell sein?)



# Simulation NEA durch DEA

## Potenzautomat

Für einen NEA  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ist sein

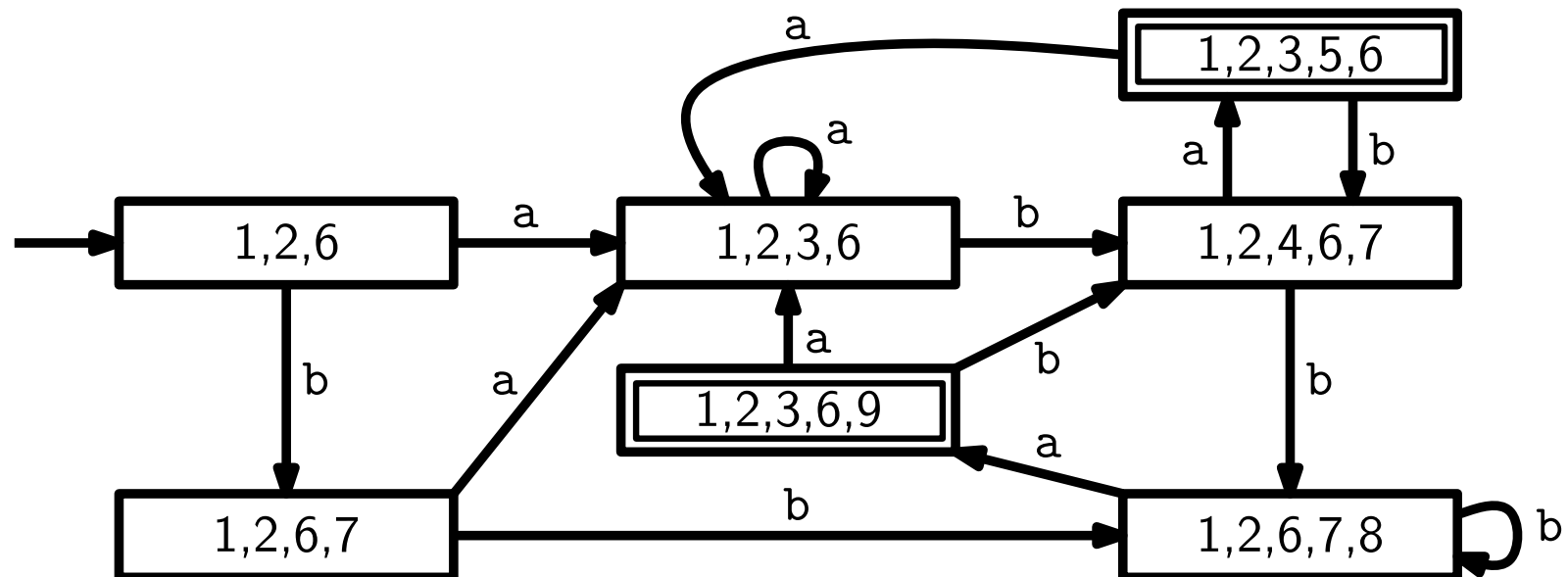
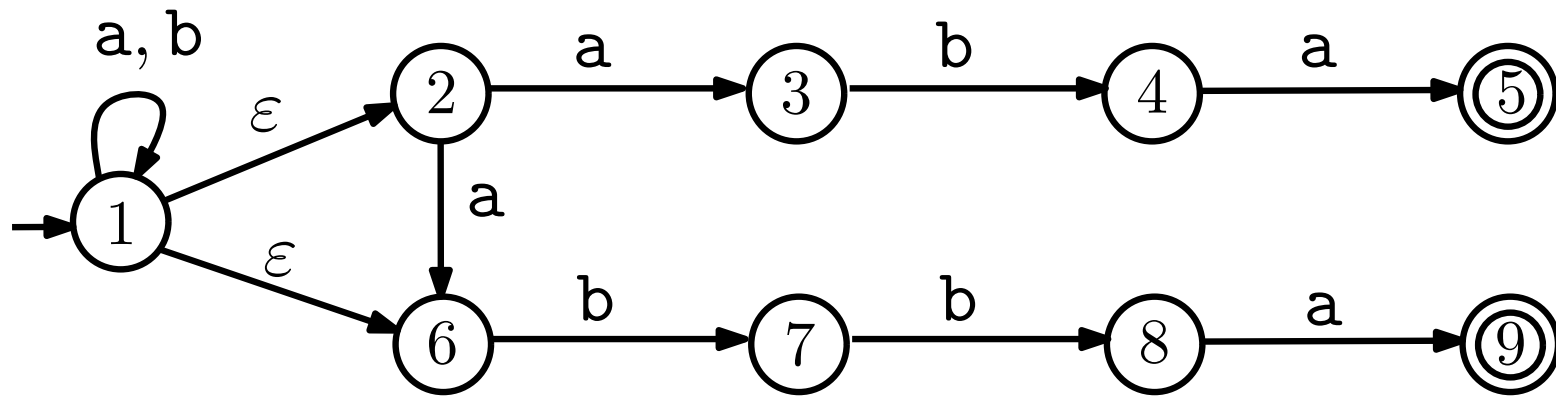
**Potenzautomat**  $\text{Pot}(N) = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{F})$  ein DEA mit

- Zustandsmenge  $\tilde{Q} = \mathcal{P}(Q)$ ,
- Übergangsfunktion  $\tilde{\delta}$ , mit  $\tilde{\delta}(P, x) = E(\bigcup_{p \in P} \delta(p, x))$ ,
- Startzustand  $\tilde{q}_0 = E(q_0)$ ,
- akzeptierenden Zuständen  $\tilde{F} = \{P \in \tilde{Q} \mid P \cap F \neq \emptyset\}$ .

## Behauptung

$$L(N) = L(\text{Pot}(N))$$

# Beispiel Potenzautomat



Vorlesungsfolien und Übungszettel finden Sie auf  
[wwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/bt](http://wwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/bt)

Einteilung in die Übungsgruppen beginnt

**heute, 15:30, über das Kursbuchungssystem**

Tutoratszeiten: Di 14-16, Mi 8-10, 12-14, 14-16, 16-18

**Abgabe erster Zettel: 29.10.15**