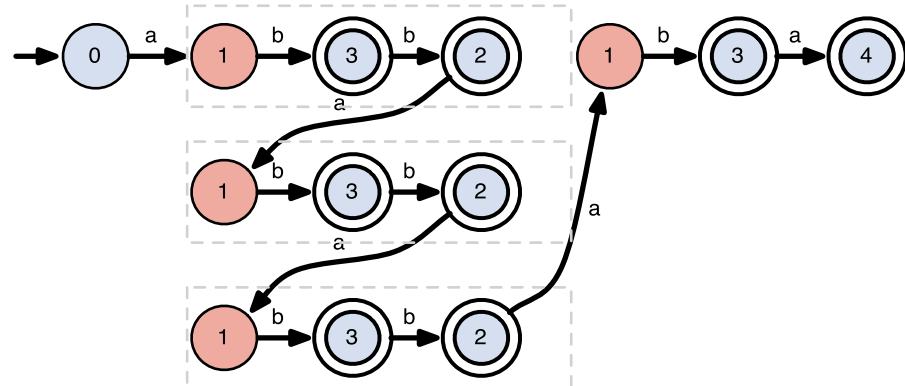


# Berechenbarkeitstheorie

## 5. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke

Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung

WWU Münster

# Äquivalenz von Zuständen

2

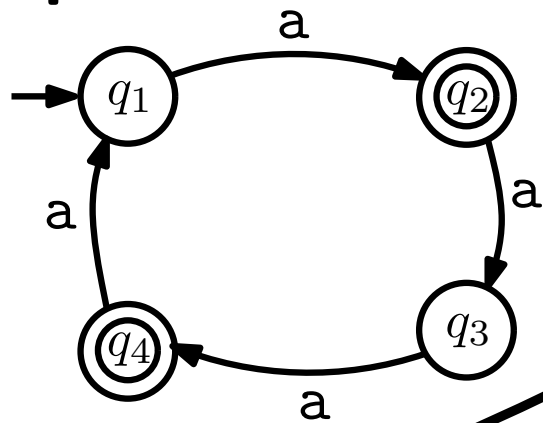
## Definition

Sei  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein DEA, dann heißen zwei Zustände  $p, q \in Q$  **äquivalent** (Schreibweise  $p \approx q$ ) gdw.

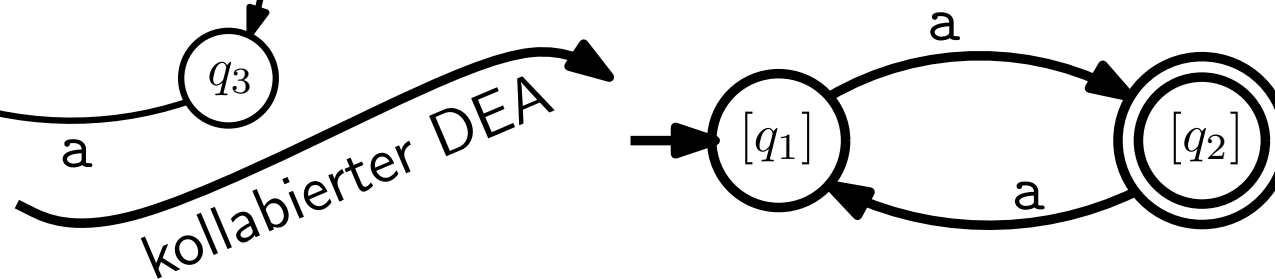
$$\forall z \in \Sigma^* : \delta^*(p, z) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, z) \in F$$

Zwei nicht äquivalente Zustände nennen wir auch **trennbar**.

**Bsp.**



- $q_1$  und  $q_2$  sind trennbar (z.B. durch das **Trennwort** a)
- $q_1$  und  $q_3$  sind äquivalent



# Table-Filling Algorithmus

3

- Algorithmus zum effizienten Finden aller äquivalenten Zustände
- Datenstruktur: Tabelle  $T$ , mit  $|Q|$  Zeilen und Spalten,  $Q = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .
- **Invariante:** Enthält  $T[p, q]$  die Markierung **1** dann sind  $p$  und  $q$  trennbar ( $p \neq q$ )
- Tabelle  $T$  wird nach und nach mit 1en gefüllt bis eine Abbruchbedingung eintritt
- am Ende notieren alle unmarkierten Einträge  $T[p, q]$  äquivalente Zustandspaare  $p, q$

# Table-Filling Algorithmus

4

- Wir füllen nur die Hälfte der Tabelle  $T$  aus ( $T[p, q]$  mit  $p < q$ )

---

## Algorithm 1: TableFilling Algorithmus

---

```
1 Initialisiere  $T \equiv 0$ ;  
2 for all  $(p, q) \in Q \times Q$  do  
3   | if  $(p \in F \text{ und } q \notin F)$  oder  $(p \notin F \text{ und } q \in F)$  then  
4   |    $T[p, q] = 1$ ;  
5 end  
6 repeat  
7   | for all  $(p, q) \in Q \times Q$  mit  $T[p, q] \neq 1$  do  
8   |   | if  $\exists a \in \Sigma: T[\delta(p, a), \delta(q, a)] == 1$  then  $T[p, q] = 1$ ;  
9   |   end  
10 until keine neue Markierung gesetzt;
```

---

# Table-Filling Algorithmus

4

- Wir füllen nur die Hälfte der Tabelle  $T$  aus ( $T[p, q]$  mit  $p < q$ )

---

## Algorithm 1: TableFilling Algorithmus

---

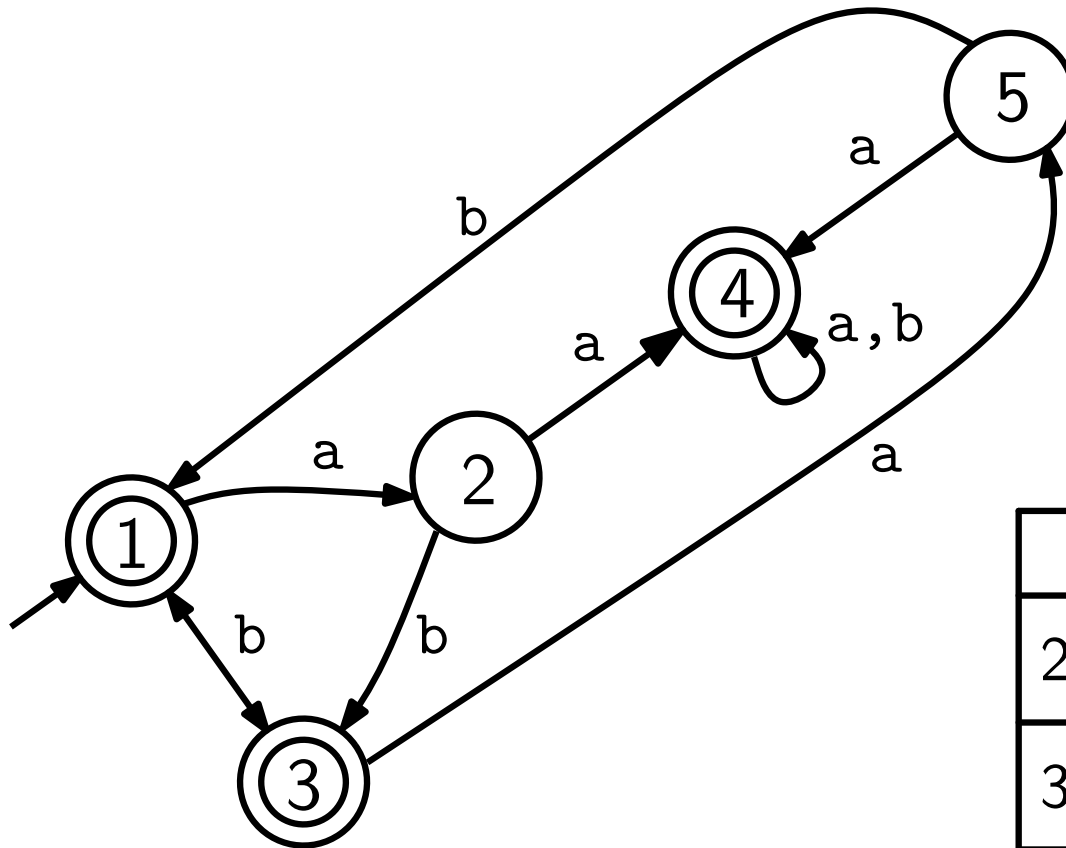
```
1 Initialisiere  $T \equiv 0$ ; Initialisierung
2 for all  $(p, q) \in Q \times Q$  do
3   | if  $(p \in F \text{ und } q \notin F)$  oder  $(p \notin F \text{ und } q \in F)$  then
4   |    $T[p, q] = 1$ ;
5 end
6 repeat
7   | for all  $(p, q) \in Q \times Q$  mit  $T[p, q] \neq 1$  do
8   |   | if  $\exists a \in \Sigma: T[\delta(p, a), \delta(q, a)] == 1$  then  $T[p, q] = 1$ ;
9   |   end Bedingung zum Setzen neuer Marken
10 until keine neue Markierung gesetzt;
```

Abbruchbedingung

---

---

# Table-Filling Algorithmus Beispiel <sup>5</sup>



Keine weiteren Veränderungen  
→  $1 \approx 3$  und  $2 \approx 5$

	1	2	3	4
2	1			
3		1		
4	1	1	1	
5	1		1	1

# Korrektheit TF-Algorithmus

Zu zeigen: 1. nur trennbare Paare wurden markiert  
(Invariante bleibt erhalten)  
2. alle trennbaren Paare wurden markiert

**1.**

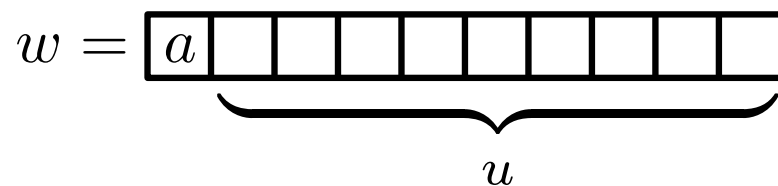
- 2 Möglichkeiten wie markiert wurde
- Bei der Initialisierung:  
**if**  $(p \in F \text{ und } q \notin F)$  oder  $(p \notin F \text{ und } q \in F)$   
**then**  $T[p, q] = 1$   
→  $p, q$  trennbar mit  $\varepsilon$
- In der **repeat** Schleife:  
**if**  $\exists a \in \Sigma: T[\delta(p, a), \delta(q, a)] == 1$  **then**  $T[p, q] = 1$   
→  $\delta(p, a), \delta(q, a)$  trennbar mit  $w \in \Sigma^*$  (Invariante)  
→  $p, q$  trennbar mit  $aw$

## 2. Alle trennbaren Paare wurden markiert

### Schlechtes Paar: trennbar aber nicht markiert

- Annahme: sei  $(p, q)$  schlechtes Paar mit kürzestem Trennwort  $w$  und kein schlechtes Paar besitzt ein Trennwort kürzer als  $w$
- $w \neq \varepsilon$ , denn sonst wäre  $(p, q)$  während der Initialisierung markiert worden
- $w = au$  mit  $a \in \Sigma$
- $p' = \delta(p, a)$  und  $q' = \delta(q, a)$

OBdA



$$\delta^*(p', u) = \delta^*(p, w) \in F$$

$$\delta^*(q', u) = \delta^*(q, w) \notin F$$

- $T[p', q'] \neq 1$ , denn sonst wäre während der Ausführung  $T[p, q] = 1$  gesetzt
- **aber:**  $(p', q')$  trennbar mit  $u$ , und  $|u| < |w|$   
 → Widerspruch zur Annahme, d.h. es gibt kein schlechtes Paar!



## Definition

Sei  $L$  eine Sprache über  $\Sigma$ . Die **Myhill-Nerode Relation (MN-Relation)**  $\equiv_L$  zu  $L$  ist definiert als

$$\forall u, v \in \Sigma^* : u \equiv_L v : \iff \forall z \in \Sigma^* : uz \in L \iff vz \in L.$$

- hängt nur von der Sprache, nicht vom Modell (z.B. DEA) ab
- $L$  muss nicht unbedingt regulär sein

**Beispiel**  $L = \{a^n \mid n \text{ gerade} \}$

$$\rightarrow aa \equiv_L aaaa$$

$$\rightarrow a \not\equiv_L aa$$

Trennwort zum Beispiel  $z = \varepsilon$

# Eigenschaften der MN Relation

9

$$(u \equiv_L v : \iff \forall z \in \Sigma^* : uz \in L \iff vz \in L)$$

(1)  $\equiv_L$  ist **symmetrisch**

(2)  $\equiv_L$  ist **reflexiv**

(3)  $\equiv_L$  ist **transitiv**

(4)  $\forall a \in \Sigma : u \equiv_L v \implies ua \equiv_L va$

sonst trennt  $a \circ (\text{Trennwort } uz, vz)$  auch  $u, v$

(4')  $\forall z \in \Sigma^* : u \equiv_L v \implies uz \equiv_L vz$

folgt aus (4)

(5)  $u \equiv_L v \implies u \in L \iff v \in L$

sonst trennbar mit  $\varepsilon$

(1)+(2)+(3)+(4): **Rechtskongruenz**

(5):  $\equiv_L$  **saturiert**  $L$

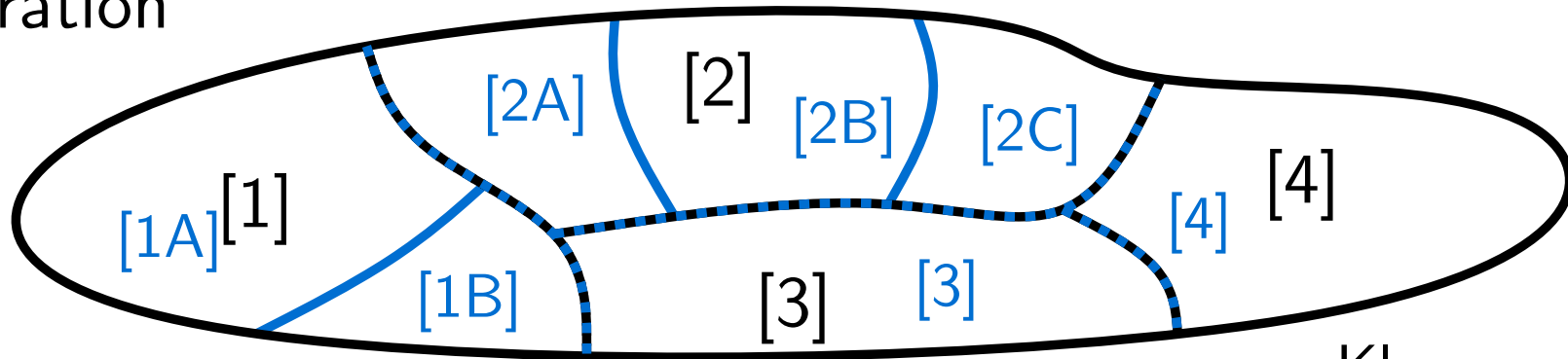
Äquivalenzrelation

## Definition

Seien  $\equiv_A$  und  $\equiv_B$  zwei Äquivalenzrelationen.  
Wir sagen  $\equiv_A$  **verfeinert**  $\equiv_B$ , gdw.

$$x \equiv_A y \implies x \equiv_B y.$$

## Illustration



Klassen von  $\equiv_B$   
Klassen von  $\equiv_A$

**Bsp.**  $a R_3 b : \iff a \equiv b \pmod{3}$   
 $a R_6 b : \iff a \equiv b \pmod{6}$   
 $\rightarrow R_6$  verfeinert  $R_3$

# Beispiel MN Relation

11

$L$  ist Sprache von  $(a + b)^* ab(a + b)^*$

1. Klasse:

$$[ab] = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält } ab\}$$

2. Klasse:

$$[a] = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet auf } a \text{ und enthält nicht } ab\}$$

3. Klasse:

$$[b] = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet auf } b \text{ und enthält nicht } ab\} \cup \{\varepsilon\}$$

↪  $[a] \cup [b] \cup [ab] = \Sigma^*$ , d.h. keine weiteren Klassen

**Index** := Anzahl der Äquivalenzklassen

↪  $L$  hat also Index 3

# Der DEA zur MN Relation

Sei  $L$  eine Sprache für die  $\equiv_L$  endlichen Index hat.

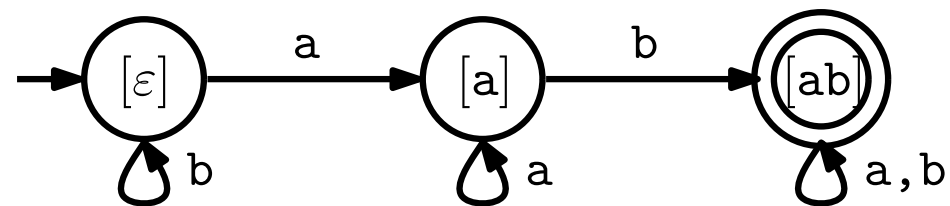
## Definition

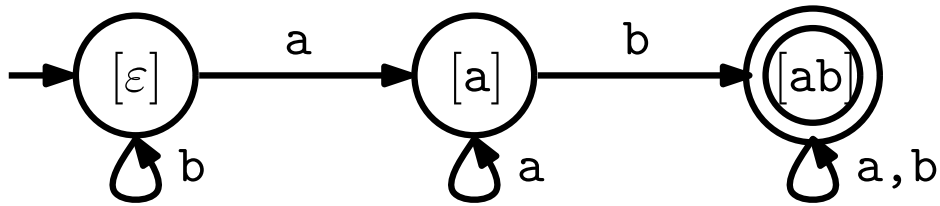
Der DEA  $M(\equiv_L)$  zu  $\equiv_L$  ist ein DEA  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  mit

- Zustandsmenge  $Q = \{[x] \mid x \in \Sigma^*\}$ ,
- Übergangsfunktion  $\delta$ , mit  $\delta([x], a) = [xa]$ ,
- Startzustand  $[\varepsilon]$ ,
- akzeptierenden Zuständen  $F = \{[w] \mid w \in L\}$ .

- $Q$  wohldefiniert, da Index endlich
- $\delta$  wohldefiniert, da  $\equiv_L$  Rechtskongruenz - Eigenschaft (4)

**Bsp.** zu  $(a + b)^* ab(a + b)^*$





$$L = (a + b)^* ab(a + b)^*$$

$$L(M(\equiv_L)) = (a + b)^* ab(a + b)^*$$

### Lemma 3

$$L(M(\equiv_L)) = L$$

**1. Überlegung**  $w \in L \Leftrightarrow [w] \in F$

nach Definition  $F = \{[w] \mid w \in L\}$  und weil  $\equiv_L$   $L$  saturiert

**2. Überlegung**  $\delta^*([x], w) = [xw]$ ,  $w \in \Sigma^*$

per Induktion über  $|w|$ , für  $|w| = 1$  folgt Aussage aus Def. von  $\delta$

**Beweis**  $w \in L(M(\equiv_L)) \iff \delta^*([\varepsilon], w) \in F$

$$\iff [w] \in F$$

nach 2.

$$\iff w \in L$$

nach 1.

□

# Die Relation eines DEA

## Definition

Sei  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein DEA. Die **Relation von  $M$**   $\equiv_M$  ist definiert als

$$\forall u, v \in \Sigma^* : \quad u \equiv_M v : \iff \delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v).$$

D.h.  $u, v$  stehen in Relation, wenn ihre Läufe im gleichen Zustand enden.

- Eigenschaften**
- $\equiv_M$  ist eine Äquivalenzrelation (transitiv, symmetrisch, reflexiv)
  - $\equiv_M$  ist eine Rechtskongruenz
  - $\equiv_M$  saturiert  $L$
  - $\equiv_M$  hat Index  $|Q|$

## Lemma 4

$\equiv_M$  ist eine Verfeinerung von  $\equiv_{L(M)}$

### Beweis

Wir zeigen etwas Stärkeres:

Jede Rechtskongruenz  $\equiv$ , die  $L$  saturiert, verfeinert  $\equiv_L$

$u \equiv v \implies \forall z \in \Sigma^* : (uz \equiv vz)$  Eigenschaft (4')

$\implies \forall z \in \Sigma^* : (uz \in L \Leftrightarrow vz \in L)$  Eigenschaft (5)

$\implies u \equiv_L v$  Def.  $\equiv_L$

$\rightarrow \equiv_M$  verfeinert  $\equiv_{L(M)}$

□

**Konsequenz:**  $M$  hat nicht weniger Zustände als  $M(\equiv_{L(M)})$   
 $M(\equiv_{L(M)})$  ist ein minimaler DEA



## Satz 6 (Satz von Myhill–Nerode)

$L \in \text{REG} \iff \equiv_L$  hat endlichen Index

### Beweis ( $\Rightarrow$ )

$L \in \text{REG} \Rightarrow \exists \text{DEA } M: L(M) = L$

$\Rightarrow \equiv_M$  saturiert  $L$

$\Rightarrow \equiv_M$  verfeinert  $\equiv_L$

$\Rightarrow \text{Index } \equiv_L \leq \text{Index } \equiv_M < \infty$



Lemma 4

### Beweis ( $\Leftarrow$ )

$\equiv_L$  hat endlichen Index  $\Rightarrow M(\equiv_L)$  ist DEA der  $L$  erkennt  
(nach Lemma 3)

$\Rightarrow L$  ist regulär

□