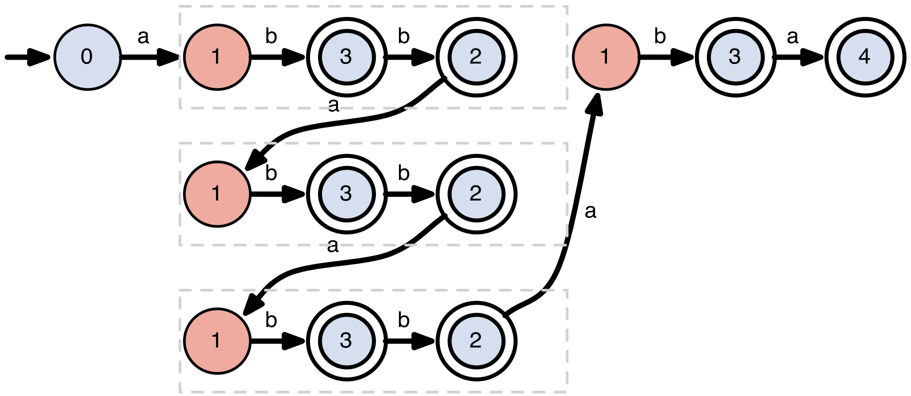
Berechenbarkeitstheorie

6. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster

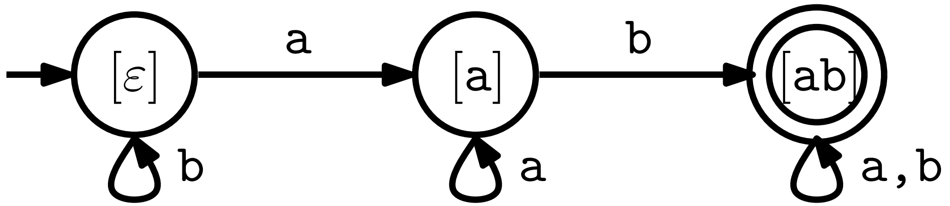
DEA Minimierung

DEA Minimierung

- Myhill-Nerode Relation:
  $u \equiv_L v :\iff \forall z \in \Sigma^* : uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$

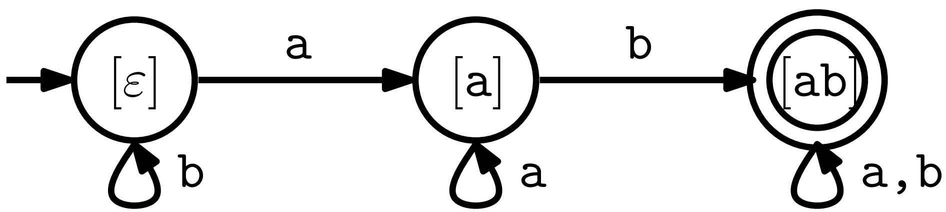
DEA Minimierung

- Myhill-Nerode Relation:
  $u \equiv_L v :\iff \forall z \in \Sigma^* : uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$
- Mit Hilfe der MN-Relation können wir einen DEA $M(\equiv_L)$ erstellen, der L erkennt



DEA Minimierung

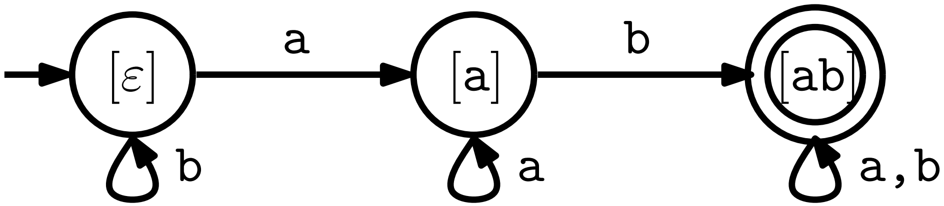
- Myhill-Nerode Relation:
  $u \equiv_L v :\iff \forall z \in \Sigma^* : uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$
- Mit Hilfe der MN-Relation können wir einen DEA $M(\equiv_L)$ erstellen, der L erkennt



- Der DEA $M(\equiv_L)$ ist ein minimaler Automat für L

DEA Minimierung

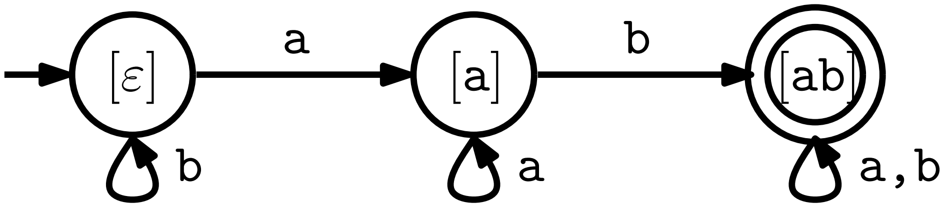
- Myhill-Nerode Relation:
  $u \equiv_L v :\iff \forall z \in \Sigma^* : uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$
- Mit Hilfe der MN-Relation können wir einen DEA $M(\equiv_L)$ erstellen, der L erkennt



- Der DEA $M(\equiv_L)$ ist ein minimaler Automat für L
- Der kollabierte Automat eines Automaten M stimmt mit dem Automaten der MN-Relation von $L(M)$ überein (nach Umbenennung)

DEA Minimierung

- Myhill-Nerode Relation:
  $u \equiv_L v :\Longleftrightarrow \forall z \in \Sigma^* : uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$
- Mit Hilfe der MN-Relation können wir einen DEA $M(\equiv_L)$ erstellen, der L erkennt



- Der DEA $M(\equiv_L)$ ist ein minimaler Automat für L
- Der kollabierte Automat eines Automaten M stimmt mit dem Automaten der MN-Relation von $L(M)$ überein (nach Umbenennung)
- Satz von Myhill-Nerode: L regulär, gdw. $\equiv_L$ hat Index $< \infty$

Nichtreguläre Sprachen

Nichtreguläre Sprachen

- Wo liegen die Grenzen des DEA/NEA Berechnungsmodells?

Nichtreguläre Sprachen

- Wo liegen die Grenzen des DEA/NEA Berechnungsmodells?
- Einschränkung: Nur endlich viele Zustände & bereits gelesene Zeichen nicht mehr direkt verfügbar

Nichtreguläre Sprachen

- Wo liegen die Grenzen des DEA/NEA Berechnungsmodells?
- Einschränkung: Nur endlich viele Zustände & bereits gelesene Zeichen nicht mehr direkt verfügbar
- Konsequenz: Während der Berechnung kann ich nur auf eine beschränkte Anzahl von Informationen über das bereits gelesene Präfix zurückgreifen

Nichtreguläre Sprachen

- Wo liegen die Grenzen des DEA/NEA Berechnungsmodells?
- Einschränkung: Nur endlich viele Zustände & bereits gelesene Zeichen nicht mehr direkt verfügbar
- Konsequenz: Während der Berechnung kann ich nur auf eine beschränkte Anzahl von Informationen über das bereits gelesene Präfix zurückgreifen
- Ein Problem ist deshalb das “Zählen”

Nichtreguläre Sprachen

- Wo liegen die Grenzen des DEA/NEA Berechnungsmodells?
- Einschränkung: Nur endlich viele Zustände & bereits gelesene Zeichen nicht mehr direkt verfügbar
- Konsequenz: Während der Berechnung kann ich nur auf eine beschränkte Anzahl von Informationen über das bereits gelesene Präfix zurückgreifen
- Ein Problem ist deshalb das “Zählen”

Kandidat: $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \textsf{REG}$$

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$$

Beweis

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$$

Beweis

- Der Satz von Myhill-Neorde gibt uns die stärkste strukturelle Aussage über die regulären Sprachen.

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$$

Beweis

- Der Satz von Myhill-Neorde gibt uns die stärkste strukturelle Aussage über die regulären Sprachen. ($L \in$ REG $\quad\Leftrightarrow\quad \equiv_L$ hat endlichen Index)

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$$

Beweis

- Der Satz von Myhill-Neorde gibt uns die stärkste strukturelle Aussage über die regulären Sprachen.
  ($L \in$ REG $\quad\Leftrightarrow\quad \equiv_L$ hat endlichen Index)
- Wir müssen zeigen $\equiv_L$ bildet ∞ viele Äquivalenzklassen

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$$

Beweis

- Der Satz von Myhill-Neorde gibt uns die stärkste strukturelle Aussage über die regulären Sprachen. ($L \in$ REG $\Leftrightarrow$ $\equiv_L$ hat endlichen Index)
- Wir müssen zeigen $\equiv_L$ bildet ∞ viele Äquivalenzklassen
- $\mathtt{a}^i \not\equiv_L \mathtt{a}^{i+k}$, für $k > 0$

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$$

Beweis

- Der Satz von Myhill-Neorde gibt uns die stärkste strukturelle Aussage über die regulären Sprachen. ($L \in$ REG $\quad\Leftrightarrow\quad \equiv_L$ hat endlichen Index)
- Wir müssen zeigen $\equiv_L$ bildet ∞ viele Äquivalenzklassen
- $\mathtt{a}^i \not\equiv_L \mathtt{a}^{i+k}$, für $k > 0$ (Trennwort $\mathtt{b}^i$)

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$$

Beweis

- Der Satz von Myhill-Neorde gibt uns die stärkste strukturelle Aussage über die regulären Sprachen. ($L \in$ REG $\quad\Leftrightarrow\quad \equiv_L$ hat endlichen Index)
- Wir müssen zeigen $\equiv_L$ bildet ∞ viele Äquivalenzklassen
- $\mathtt{a}^i \not\equiv_L \mathtt{a}^{i+k}$, für $k > 0$ (Trennwort $\mathtt{b}^i$)
- Äquivalenzklassen: $[\varepsilon], [\mathtt{a}], [\mathtt{aa}], [\mathtt{aaa}], \ldots$

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$$

Beweis

- Der Satz von Myhill-Neorde gibt uns die stärkste strukturelle Aussage über die regulären Sprachen. ($L \in \mathsf{REG} \quad \Leftrightarrow \quad \equiv_L$ hat endlichen Index)
- Wir müssen zeigen $\equiv_L$ bildet ∞ viele Äquivalenzklassen
- $\mathtt{a}^i \not\equiv_L \mathtt{a}^{i+k}$, für $k > 0$ (Trennwort $\mathtt{b}^i$)
- Äquivalenzklassen: $[\varepsilon], [\mathtt{a}], [\mathtt{aa}], [\mathtt{aaa}], \ldots$

  jedes $\mathtt{a}^i$ liegt in einer eigenen Klasse!

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$$

Beweis

- Der Satz von Myhill-Neorde gibt uns die stärkste strukturelle Aussage über die regulären Sprachen. ($L \in \mathsf{REG} \quad \Leftrightarrow \quad \equiv_L$ hat endlichen Index)
- Wir müssen zeigen $\equiv_L$ bildet ∞ viele Äquivalenzklassen
- $\mathtt{a}^i \not\equiv_L \mathtt{a}^{i+k}$, für $k > 0$ (Trennwort $\mathtt{b}^i$)
- Äquivalenzklassen: $[\varepsilon], [\mathtt{a}], [\mathtt{aa}], [\mathtt{aaa}], \ldots$

  jedes $\mathtt{a}^i$ liegt in einer eigenen Klasse!
- Da also $\equiv_L$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat, ist L nicht regulär!

Satz 9

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$$

Beweis

- Der Satz von Myhill-Neorde gibt uns die stärkste strukturelle Aussage über die regulären Sprachen. ($L \in \mathsf{REG} \quad \Leftrightarrow \quad \equiv_L$ hat endlichen Index)
- Wir müssen zeigen $\equiv_L$ bildet ∞ viele Äquivalenzklassen
- $\mathtt{a}^i \not\equiv_L \mathtt{a}^{i+k}$, für $k > 0$ (Trennwort $\mathtt{b}^i$)
- Äquivalenzklassen: $[\varepsilon], [\mathtt{a}], [\mathtt{aa}], [\mathtt{aaa}], \ldots$

  jedes $\mathtt{a}^i$ liegt in einer eigenen Klasse!
- Da also $\equiv_L$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat, ist L nicht regulär!

$\square$