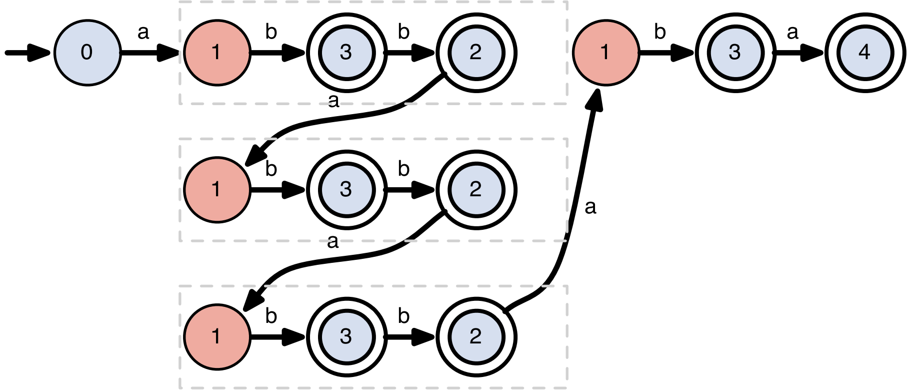
Berechenbarkeitstheorie

7. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster

Das Pumpinglemma

Das Pumpinglemma

- Strukturelles Lemma über eine Eigenschaft von regulären Sprachen

Das Pumpinglemma

- Strukturelles Lemma über eine Eigenschaft von regulären Sprachen
- Hat eine Sprache diese Eigenschaft **nicht**, kann Sie nicht regulär sein (Anwendung: Beweis Nichtregularität)

Das Pumpinglemma

- Strukturelles Lemma über eine Eigenschaft von regulären Sprachen
- Hat eine Sprache diese Eigenschaft **nicht**, kann Sie nicht regulär sein (Anwendung: Beweis Nichtregularität)

Definition

Eine Sprache heißt **pumpbar** gdw., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, sodass für alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geq k$ es eine Zerlegung von $w = xyz$ gibt, für die gilt:

1. $|xy| \leq k$,
2. $\forall i \geq 0\colon xy^iz \in L$,
3. $|y| > 0$.

Das Pumpinglemma

- Strukturelles Lemma über eine Eigenschaft von regulären Sprachen
- Hat eine Sprache diese Eigenschaft **nicht**, kann Sie nicht regulär sein (Anwendung: Beweis Nichtregularität)

Definition

Eine Sprache heißt **pumpbar** gdw., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, sodass für alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geq k$ es eine Zerlegung von $w = xyz$ gibt, für die gilt:

1. $|xy| \leq k$,
2. $\forall i \geq 0 \colon xy^iz \in L$,
3. $|y| > 0$.

Das Pumpinglemma

- Strukturelles Lemma über eine Eigenschaft von regulären Sprachen
- Hat eine Sprache diese Eigenschaft **nicht**, kann Sie nicht regulär sein (Anwendung: Beweis Nichtregularität)

Definition

Eine Sprache heißt **pumpbar** gdw., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, sodass für alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geq k$ es eine Zerlegung von $w = xyz$ gibt, für die gilt:

1. $|xy| \leq k$,
2. $\forall i \geq 0\colon xy^iz \in L$,
3. $|y| > 0$.

Pumpinglemma

$$L \in \text{REG} \quad \Rightarrow \quad L \text{ ist pumpbar}$$

Beispiel

Beispiel

$L = \{\mathsf{a}^k \mid k \text{ ungerade}\} \in \mathsf{REG}$

Beispiel

$L = \{\mathsf{a}^k \mid k \text{ ungerade}\} \in \mathsf{REG}$

Zur Erinnerung: pumbar heißt

$\exists k \in \mathbf{N}\ \forall w \in L\colon (|w| \geq k)\ \exists xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$,und $\forall i \geq 0\colon xy^iz \in L$

Beispiel

$L = \{\mathsf{a}^k \mid k \text{ ungerade}\} \in \mathsf{REG}$

Zur Erinnerung: pumbar heißt
$\exists k \in \mathbf{N}\ \forall w \in L\colon (|w| \geq k)\ \exists xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$,und $\forall i \geq 0\colon xy^i z \in L$

In diesem Fall:

- $k = 3$

Beispiel

$L = \{\mathsf{a}^k \mid k \text{ ungerade}\} \in \mathsf{REG}$

Zur Erinnerung: pumbar heißt
$\exists k \in \mathbf{N}\, \forall w \in L\colon (|w| \geq k)\ \exists xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$,und $\forall i \geq 0\colon xy^iz \in L$

In diesem Fall:

- $k = 3$
- $\forall w \in L$ zerteile w wie folgt

Beispiel

$L = \{\mathsf{a}^k \mid k \text{ ungerade}\} \in \mathsf{REG}$

Zur Erinnerung: pumbar heißt

$\exists k \in \mathbf{N}\, \forall w \in L\colon (|w| \geq k)\, \exists xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$,und $\forall i \geq 0\colon xy^iz \in L$

In diesem Fall:

- $k = 3$
- $\forall w \in L$ zerteile w wie folgt

  $w = \underset{x}{\mathtt{a}}\underbrace{\mathtt{aa}}_{y}\underbrace{\mathtt{aaa}\cdots\mathtt{a}}_{z}$

Beispiel

$L = \{\mathsf{a}^k \mid k \text{ ungerade}\} \in \text{REG}$

Zur Erinnerung: pumbar heißt
$\exists k \in \mathbf{N}\, \forall w \in L\colon (|w| \geq k)\, \exists xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$,und $\forall i \geq 0\colon xy^iz \in L$

In diesem Fall:

- $k = 3$
- $\forall w \in L$ zerteile w wie folgt
  $w = \underset{x}{\mathtt{a}}\underbrace{\mathtt{aa}}_{y}\underbrace{\mathtt{aaa}\cdots\mathtt{a}}_{z}$
- $|xy| \leq k$ und $|y| > 0$ sind erfüllt

Beispiel

$L = \{\mathtt{a}^k \mid k \text{ ungerade}\} \in \mathsf{REG}$

Zur Erinnerung: pumbar heißt
$\exists k \in \mathbf{N}\, \forall w \in L\colon (|w| \geq k)\ \exists xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$,und $\forall i \geq 0\colon xy^iz \in L$

In diesem Fall:

- $k = 3$
- $\forall w \in L$ zerteile w wie folgt
  $w = \underset{x}{\mathtt{a}}\underbrace{\mathtt{aa}}_{y}\underbrace{\mathtt{aaa}\cdots\mathtt{a}}_{z}$
- $|xy| \leq k$ und $|y| > 0$ sind erfüllt
- $\forall i \geq 0$ gilt: w und xy^iz unterscheiden sich um $2i$ as

Beispiel

$L = \{\mathsf{a}^k \mid k \text{ ungerade}\} \in \mathsf{REG}$

Zur Erinnerung: pumbar heißt
$\exists k \in \mathbf{N}\ \forall w \in L\colon (|w| \geq k)\ \exists xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$,und $\forall i \geq 0\colon xy^iz \in L$

In diesem Fall:

- $k = 3$
- $\forall w \in L$ zerteile w wie folgt
  $w = \underset{x}{\mathsf{a}}\underbrace{\mathsf{aa}}_{y}\underbrace{\mathsf{aaa}\cdots\mathsf{a}}_{z}$
- $|xy| \leq k$ und $|y| > 0$ sind erfüllt
- $\forall i \geq 0$ gilt: w und xy^iz unterscheiden sich um $2i$ as
  $\rightarrow xy^iz$ besitzt eine ungerade Anzahl von as

Beispiel

$L = \{\mathtt{a}^k \mid k \text{ ungerade}\} \in \text{REG}$

Zur Erinnerung: pumbar heißt

$\exists k \in \mathbf{N}\ \forall w \in L\colon (|w| \geq k)\ \exists xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$,und $\forall i \geq 0\colon xy^i z \in L$

In diesem Fall:

- $k = 3$
- $\forall w \in L$ zerteile w wie folgt

  $w = \underset{x}{\mathtt{a}}\underbrace{\mathtt{aa}}_{y}\underbrace{\mathtt{aaa}\cdots\mathtt{a}}_{z}$
- $|xy| \leq k$ und $|y| > 0$ sind erfüllt
- $\forall i \geq 0$ gilt: w und $xy^i z$ unterscheiden sich um $2i$ as

  $\rightarrow xy^i z$ besitzt eine ungerade Anzahl von as

  $\rightarrow xy^i z \in L$

Beispiel

$L = \{\mathsf{a}^k \mid k \text{ ungerade}\} \in \text{REG}$

Zur Erinnerung: pumbar heißt
$\exists k \in \mathbf{N}\ \forall w \in L\colon (|w| \geq k)\ \exists xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$,und $\forall i \geq 0\colon xy^iz \in L$

In diesem Fall:

- $k = 3$
- $\forall w \in L$ zerteile w wie folgt

  $w = \underbrace{\mathtt{a}}_{x}\underbrace{\mathtt{aa}}_{y}\underbrace{\mathtt{aaa}\cdots\mathtt{a}}_{z}$
- $|xy| \leq k$ und $|y| > 0$ sind erfüllt
- $\forall i \geq 0$ gilt: w und xy^iz unterscheiden sich um $2i$ as

  $\to xy^iz$ besitzt eine ungerade Anzahl von as

  $\to xy^iz \in L$
- L ist pumpbar

Beweis des Pumpinglemmas

Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

- sei L regulär, und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA der L erkennt

Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

- sei L regulär, und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA der L erkennt
- wir setzen $k = |Q| + 1$

Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

- sei L regulär, und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA der L erkennt
- wir setzen $k = |Q| + 1$
- jeder w-Lauf ($|w| \geq k$) besucht mindestens $k = |Q| + 1$ Zustände $\rightarrow \geq 1$ Zustand doppelt

Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

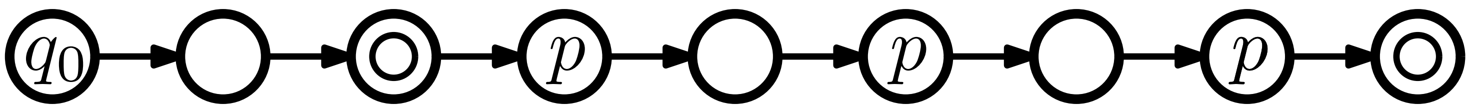
- sei L regulär, und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA der L erkennt
- wir setzen $k = |Q| + 1$
- jeder w-Lauf ($|w| \geq k$) besucht mindestens $k = |Q| + 1$ Zustände $\to \geq 1$ Zustand doppelt
- sei p der 1. Zustand der mehrfach besucht wurde

Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

- sei L regulär, und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA der L erkennt
- wir setzen $k = |Q| + 1$
- jeder w-Lauf ($|w| \geq k$) besucht mindestens $k = |Q| + 1$ Zustände $\rightarrow \geq 1$ Zustand doppelt
- sei p der 1. Zustand der mehrfach besucht wurde

Lauf:

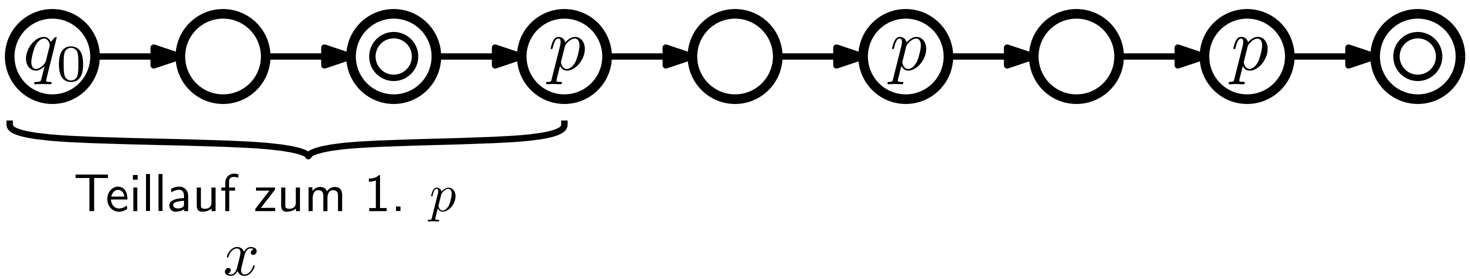


Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

- sei L regulär, und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA der L erkennt
- wir setzen $k = |Q| + 1$
- jeder w-Lauf ($|w| \geq k$) besucht mindestens $k = |Q| + 1$ Zustände $\rightarrow \geq 1$ Zustand doppelt
- sei p der 1. Zustand der mehrfach besucht wurde

Lauf:

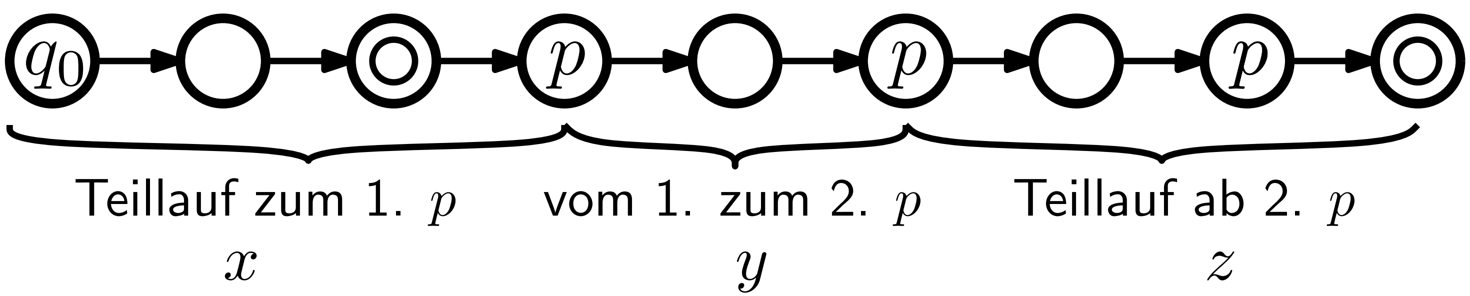


Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

- sei L regulär, und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA der L erkennt
- wir setzen $k = |Q| + 1$
- jeder w-Lauf ($|w| \geq k$) besucht mindestens $k = |Q| + 1$ Zustände
  $\rightarrow \geq 1$ Zustand doppelt
- sei p der 1. Zustand der mehrfach besucht wurde

Lauf:

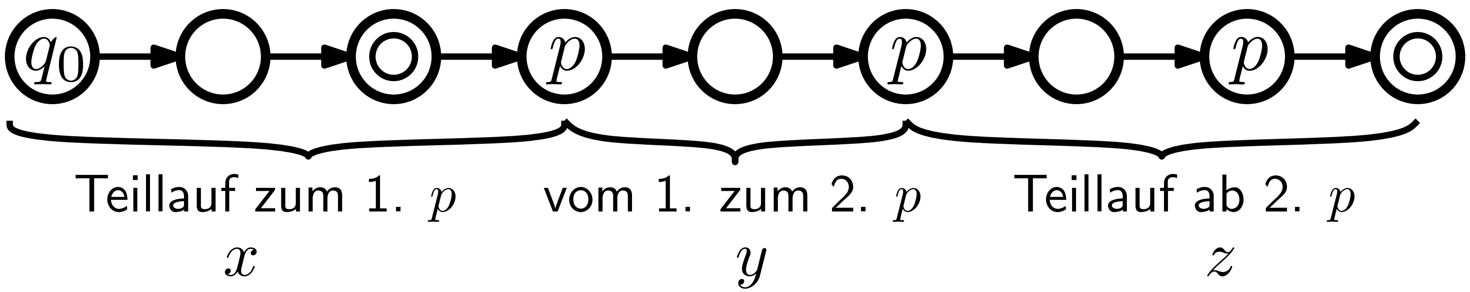


Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

- sei L regulär, und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA der L erkennt
- wir setzen $k = |Q| + 1$
- jeder w-Lauf ($|w| \geq k$) besucht mindestens $k = |Q| + 1$ Zustände $\rightarrow \geq 1$ Zustand doppelt
- sei p der 1. Zustand der mehrfach besucht wurde

Lauf:



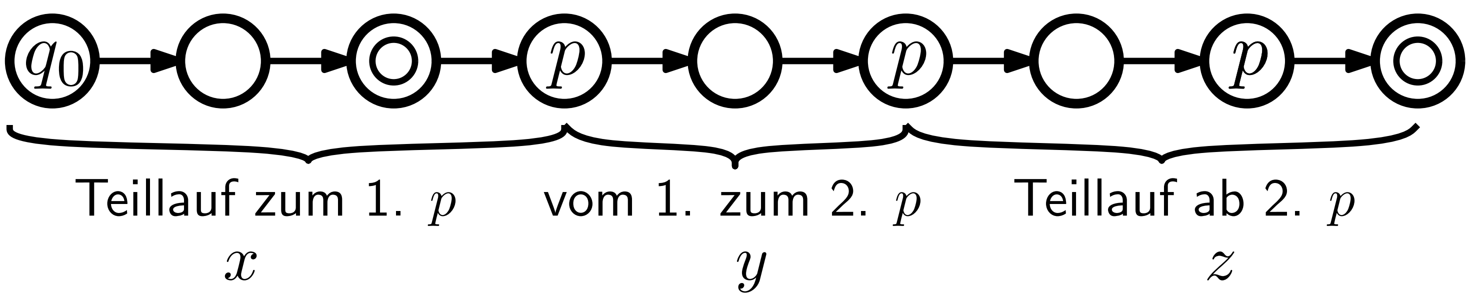
- Eigenschaft 1: $|y| > 0$

Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

- sei L regulär, und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA der L erkennt
- wir setzen $k = |Q| + 1$
- jeder w-Lauf ($|w| \geq k$) besucht mindestens $k = |Q| + 1$ Zustände
  $\rightarrow \geq 1$ Zustand doppelt
- sei p der 1. Zustand der mehrfach besucht wurde

Lauf:



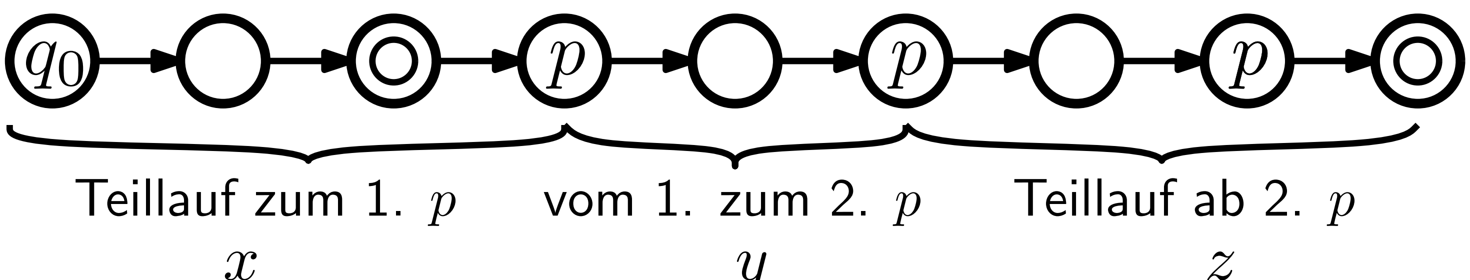
- Eigenschaft 1: $|y| > 0$
- Eigenschaft 2: $|xy| \leq k$

Beweis des Pumpinglemmas

Zu zeigen: L ist regulär, dann ist L pumpbar

- sei L regulär, und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA der L erkennt
- wir setzen $k = |Q| + 1$
- jeder w-Lauf ($|w| \geq k$) besucht mindestens $k = |Q| + 1$ Zustände $\rightarrow \geq 1$ Zustand doppelt
- sei p der 1. Zustand der mehrfach besucht wurde

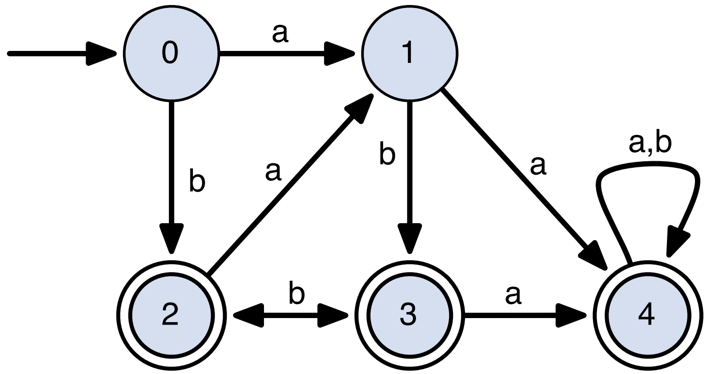
Lauf:



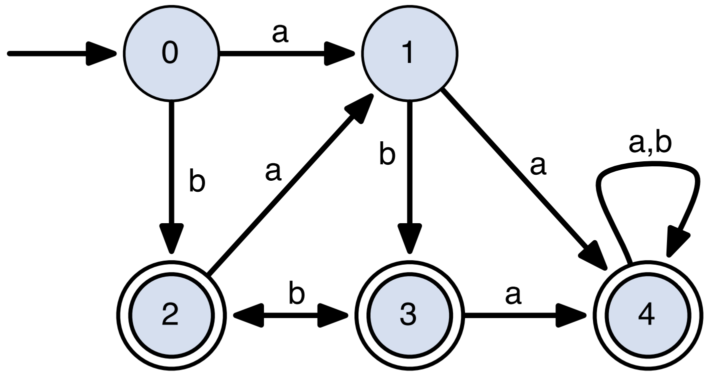
- Eigenschaft 1: $|y| > 0$
- Eigenschaft 2: $|xy| \leq k$
- Eigenschaft 3: $\forall i \geq 0\colon xy^iz \in L$

Am Beispiel

Am Beispiel M

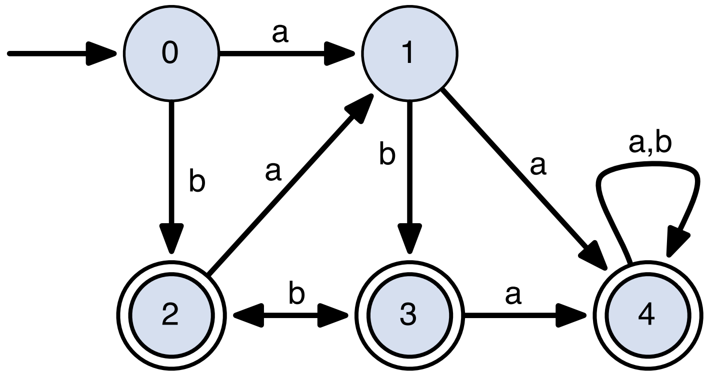


Am Beispiel M



$$|Q| = 5$$
$$k = 5$$

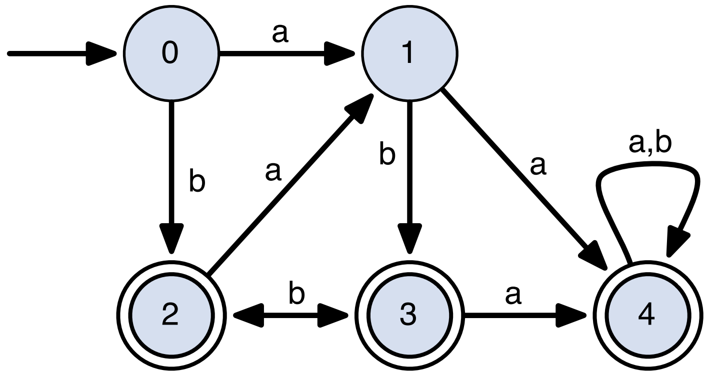
Am Beispiel M



$$|Q| = 5$$
$$k = 5$$

$w = \texttt{abbaba}$ hat folgenden Lauf

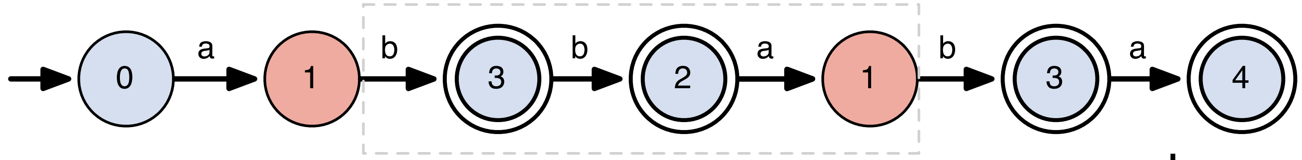
Am Beispiel M



$|Q| = 5$

$k = 5$

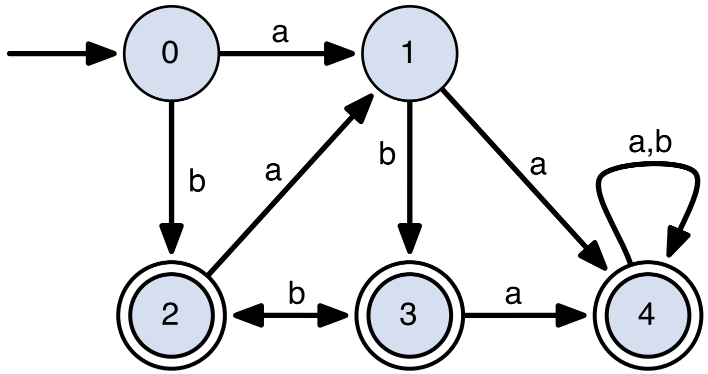
$w =$ abbaba hat folgenden Lauf



erster doppelter Zustand ist 1

$x =$ a, $y =$ bba, $z =$ ba

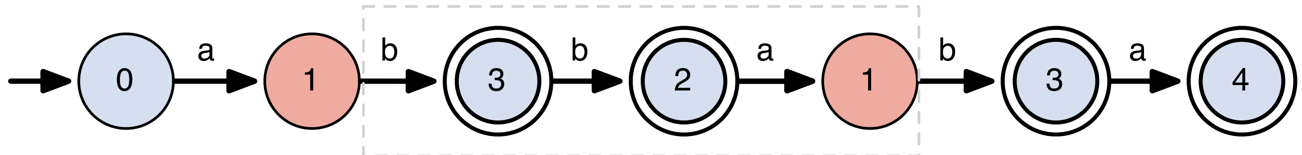
Am Beispiel M



$|Q| = 5$

$k = 5$

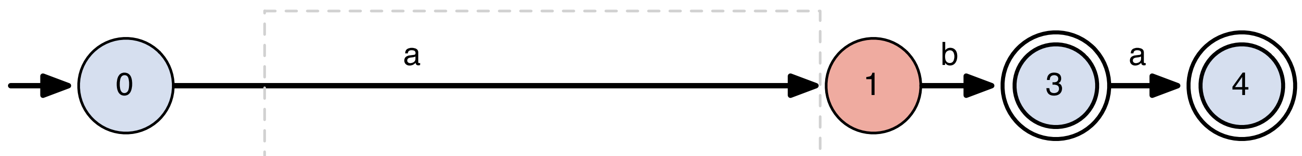
$w =$ abbaba hat folgenden Lauf



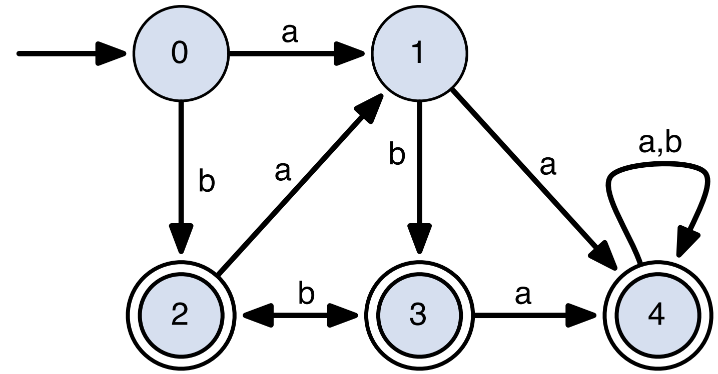
erster doppelter Zustand ist 1

$x =$ a, $y =$ bba, $z =$ ba

Wiederholung $i = 0$



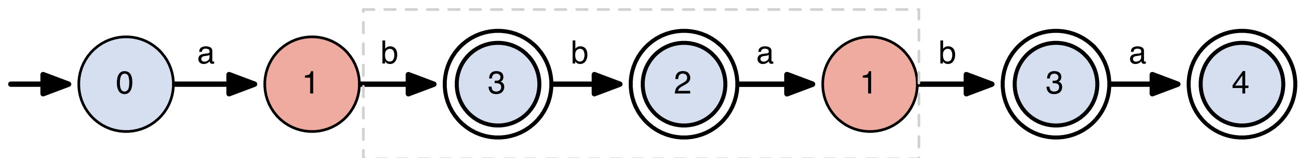
Am Beispiel M



$|Q| = 5$

$k = 5$

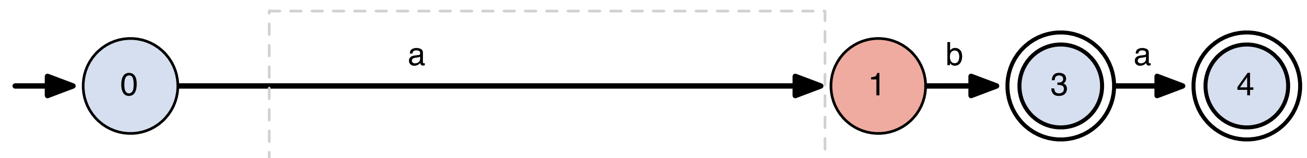
$w =$ abbaba hat folgenden Lauf



erster doppelter Zustand ist 1

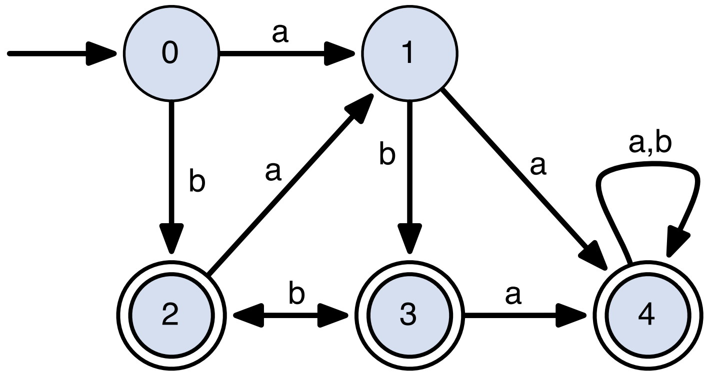
$x =$ a, $y =$ bba, $z =$ ba

Wiederholung $i = 0$



$xz =$ aba hat akzeptierenden Lauf

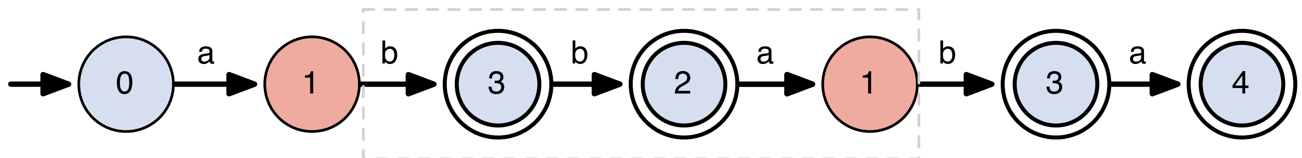
Am Beispiel M



$|Q| = 5$ 5

$k = 5$

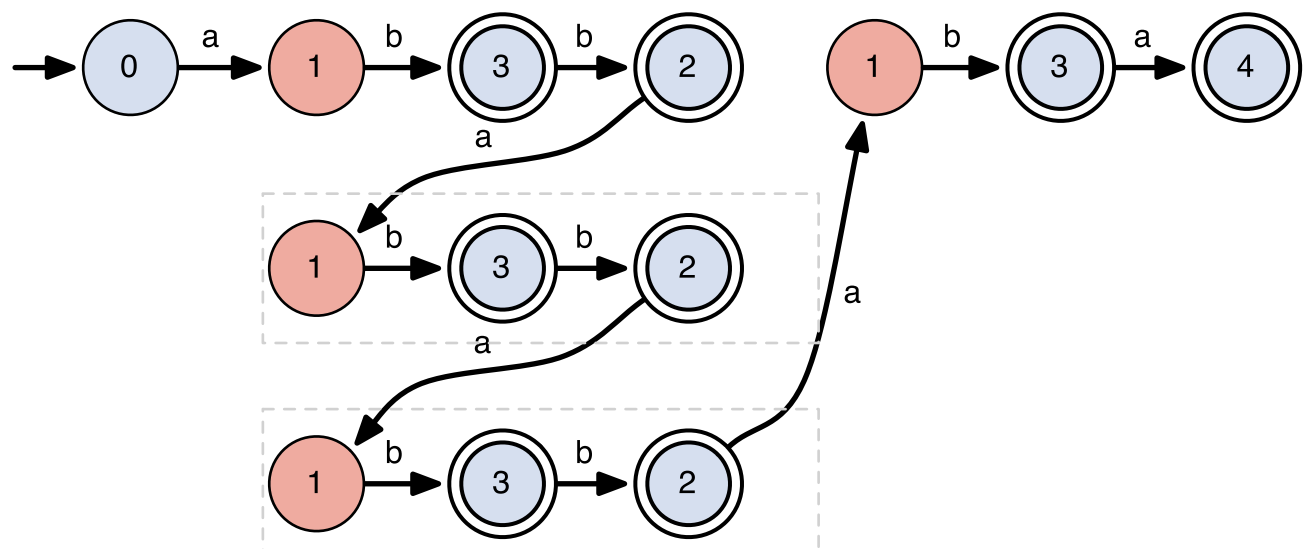
$w =$ abbaba hat folgenden Lauf



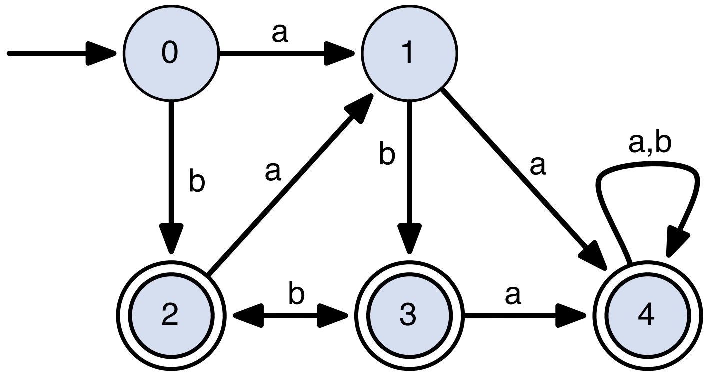
erster doppelter Zustand ist 1

$x =$ a, $y =$ bba, $z =$ ba

Wiederholung $i = 3$



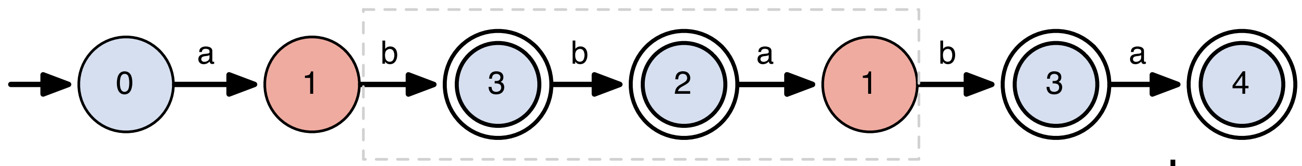
Am Beispiel M



$|Q| = 5$

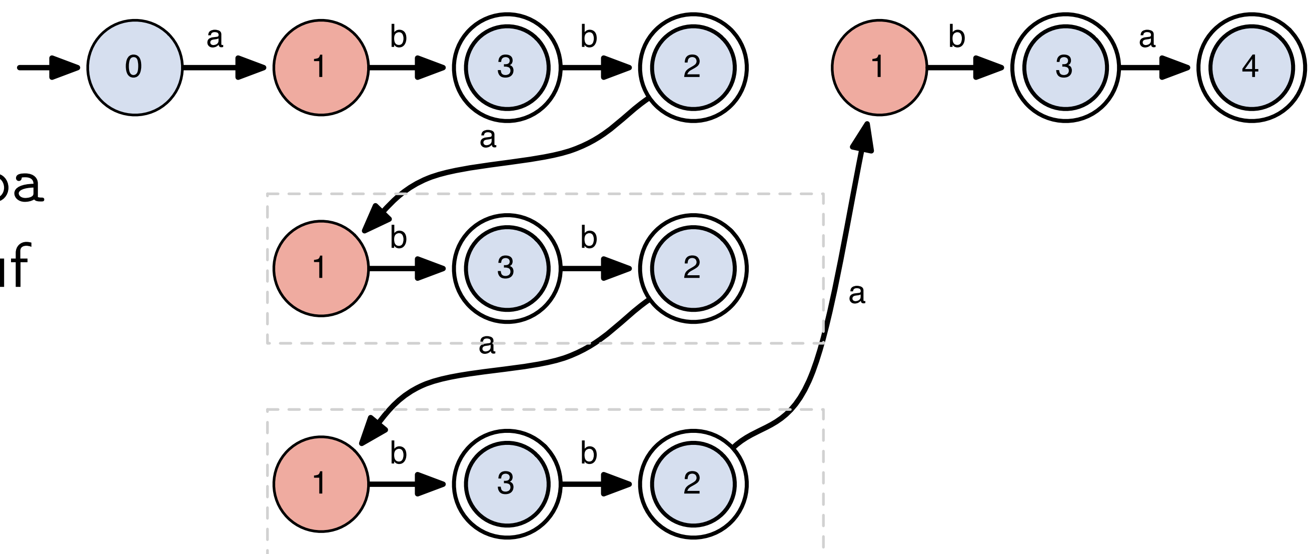
$k = 5$

$w =$ abbaba hat folgenden Lauf



erster doppelter Zustand ist 1
$x =$ a, $y =$ bba, $z =$ ba

Wiederholung $i = 3$



$xyyyz =$ abbabbabbaba
hat akzeptierenden Lauf

Anwendung des Pumpinglemmas

Anwendung des Pumpinglemmas

- PL: $L \in \mathrm{REG} \Rightarrow L$ ist pumpbar

Anwendung des Pumpinglemmas

- PL: $L \in$ REG $\Rightarrow L$ ist pumpbar
- Umkehrung PL: L nicht pumpbar $\Rightarrow L \notin$ REG

Anwendung des Pumpinglemmas

- PL: $L \in$ REG $\Rightarrow L$ ist pumpbar
- Umkehrung PL: L nicht pumpbar $\Rightarrow L \notin$ REG
- **nicht pumpbar heißt:**
  - $\forall k \in \mathbf{N}$
  - $\exists w \in L\colon (|w| \geq k)$
  - $\forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$ gilt
  - $\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

Anwendung des Pumpinglemmas

- PL: $L \in$ REG $\Rightarrow L$ ist pumpbar
- Umkehrung PL: L nicht pumpbar $\Rightarrow L \notin$ REG
- **nicht pumpbar heißt:**
  - $\forall k \in \mathbf{N}$
  - $\exists w \in L\colon (|w| \geq k)$
  - $\forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$ gilt
  - $\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$
- Interpretation als 2-Spieler Spiel:
  - Gegenspieler wählt bei den $\forall$ Quantoren.
  - Wir wählen bei den $\exists$ Quantoren.
  - Wahl in Abhängigkeit der vorigen Auswahlen.

Anwendung des Pumpinglemmas

- PL: $L \in$ REG $\Rightarrow L$ ist pumpbar
- Umkehrung PL: L nicht pumpbar $\Rightarrow L \notin$ REG
- **nicht pumpbar heißt:**
  - $\forall k \in \mathbf{N}$
  - $\exists w \in L\colon (|w| \geq k)$
  - $\forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$ gilt
  - $\exists i \geq 0\colon xy^i z \notin L$
- Interpretation als 2-Spieler Spiel:
  - Gegenspieler wählt bei den $\forall$ Quantoren.
  - Wir wählen bei den $\exists$ Quantoren.
  - Wahl in Abhängigkeit der vorigen Auswahlen.
  - Haben wir eine Gewinnstrategie ist die Sprache nicht pumpbar und somit nicht regulär.

1. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

1. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

Zu zeigen:

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k, |y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

1. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

Zu zeigen:

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k, |y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

- Gegenspieler bestimmt k

1. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

Zu zeigen:

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

- Gegenspieler bestimmt k
- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$

1. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

Zu zeigen:

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

- Gegenspieler bestimmt k
- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$
- Gegenspieler wählt Zerteilung von w

1. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

Zu zeigen:

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

- Gegenspieler bestimmt k
- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$
- Gegenspieler wählt Zerteilung von w
- wir zeigen: für jede seiner Wahlen finden wir ein i, so dass $xy^iz \notin L$

1. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

Zu zeigen:

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

- Gegenspieler bestimmt k
- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$
- Gegenspieler wählt Zerteilung von w
- wir zeigen: für jede seiner Wahlen finden wir ein i, so dass $xy^iz \notin L$
- in unserem Fall wissen wir dass $y \in L(\mathtt{a}^*)$ und $y \neq \varepsilon$

1. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

Zu zeigen:

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

- Gegenspieler bestimmt k
- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$
- Gegenspieler wählt Zerteilung von w
- wir zeigen: für jede seiner Wahlen finden wir ein i, so dass $xy^iz \notin L$
- in unserem Fall wissen wir dass $y \in L(\mathtt{a}^*)$ und $y \neq \varepsilon$
- d.h. für $i = 2$ ist $xy^iz = \mathtt{a}^{k+|y|}\mathtt{b}^k \notin L$

1. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

Zu zeigen:

$$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w \text{ mit } |xy| \leq k, |y| > 0 \text{ gilt } \exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$$

- Gegenspieler bestimmt k
- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$
- Gegenspieler wählt Zerteilung von w
- wir zeigen: für jede seiner Wahlen finden wir ein i, so dass $xy^iz \notin L$
- in unserem Fall wissen wir dass $y \in L(\mathtt{a}^*)$ und $y \neq \varepsilon$
- d.h. für $i = 2$ ist $xy^iz = \mathtt{a}^{k+|y|}\mathtt{b}^k \notin L$
- also ist L nicht pumpbar und somit nicht regulär

2. Beispiel $L = \{uu \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

2. Beispiel $L = \{uu \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

Zur Erinnerung

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k, |y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

2. Beispiel $L = \{uu \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

Zur Erinnerung

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}\mathtt{a}^k\mathtt{b}$

2. Beispiel $L = \{uu \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

Zur Erinnerung

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k, |y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}\mathtt{a}^k\mathtt{b}$
- wir zeigen für jede Zerteilung gibt es ein i, so dass $xy^iz \notin L$

2. Beispiel $L = \{uu \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

Zur Erinnerung

$$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w \text{ mit } |xy| \leq k, |y| > 0 \text{ gilt}$$
$$\exists i \geq 0\colon xy^i z \notin L$$

- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{ba}^k\mathtt{b}$
- wir zeigen für jede Zerteilung gibt es ein i, so dass $xy^iz \notin L$

  $\rightarrow$ y besteht nur aus as

2. Beispiel $L = \{uu \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

Zur Erinnerung

$$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w \text{ mit } |xy| \leq k, |y| > 0 \text{ gilt}$$
$$\exists i \geq 0\colon xy^i z \notin L$$

- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}\mathtt{a}^k\mathtt{b}$
- wir zeigen für jede Zerteilung gibt es ein i, so dass $xy^i z \notin L$
  - $\to$ y besteht nur aus as
  - $\to$ $xy^i z$ enthält genau zweimal das Zeichen b

2. Beispiel $L = \{uu \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

Zur Erinnerung

$$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w \text{ mit } |xy| \leq k, |y| > 0 \text{ gilt}$$
$$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$$

- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}\mathtt{a}^k\mathtt{b}$
- wir zeigen für jede Zerteilung gibt es ein i, so dass $xy^iz \notin L$
  - $\rightarrow$ y besteht nur aus as
  - $\rightarrow$ xy^iz enthält genau zweimal das Zeichen b
  - $\rightarrow$ bs legen Endpositionen von u fest

2. Beispiel $L = \{uu \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

Zur Erinnerung

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w$ mit $|xy| \leq k$,$|y| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$

- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}\mathtt{a}^k\mathtt{b}$
- wir zeigen für jede Zerteilung gibt es ein i, so dass $xy^iz \notin L$
  - $\rightarrow$ y besteht nur aus as
  - $\rightarrow$ xy^iz enthält genau zweimal das Zeichen b
  - $\rightarrow$ bs legen Endpositionen von u fest
  - $\rightarrow$ $xy^0z = \mathtt{a}^{k-|y|}\mathtt{b}\mathtt{a}^k\mathtt{b} \notin L$

2. Beispiel $L = \{uu \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

Zur Erinnerung

$$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall xyz = w \text{ mit } |xy| \leq k, |y| > 0 \text{ gilt}$$
$$\exists i \geq 0\colon xy^iz \notin L$$

- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}\mathtt{a}^k\mathtt{b}$
- wir zeigen für jede Zerteilung gibt es ein i, so dass $xy^iz \notin L$
  - $\rightarrow$ y besteht nur aus as
  - $\rightarrow$ xy^iz enthält genau zweimal das Zeichen $\mathtt{b}$
  - $\rightarrow$ bs legen Endpositionen von u fest
  - $\rightarrow$ $xy^0z = \mathtt{a}^{k-|y|}\mathtt{b}\mathtt{a}^k\mathtt{b} \notin L$
  - $\rightarrow$ L ist nicht pumpbar, also ist L nicht regulär

3. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

3. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

- Abständen zwischen Quadratzahlen wachsen linear

$$\underbrace{1 \quad\quad 4}_{1}\;\underbrace{\quad\quad 9}_{3}\;\underbrace{\quad\quad 16}_{5}\;\underbrace{\quad\quad 25}_{7}$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

3. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

- Abstände zwischen Quadratzahlen wachsen linear

$$\underbrace{1 \quad\quad 4}_{1} \underbrace{\quad\quad 9}_{3} \underbrace{\quad\quad 16}_{5} \underbrace{\quad\quad 25}_{7} \qquad (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

- für Pumplänge k wählen wir $w = \mathtt{a}^{k^2} \in L$

3. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

- Abstände zwischen Quadratzahlen wachsen linear

$$\underbrace{1 \qquad 4}_{1}\underbrace{\qquad 9}_{3}\underbrace{\qquad 16}_{5}\underbrace{\qquad 25}_{7} \qquad (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

- für Pumplänge k wählen wir $w = \mathtt{a}^{k^2} \in L$
- da $\Sigma = \{\mathtt{a}\}$ spielt bei der Zerteilung von w nur die Länge von y eine Rolle

3. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

- Abstände zwischen Quadratzahlen wachsen linear

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & \end{array}$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

- für Pumplänge k wählen wir $w = \mathtt{a}^{k^2} \in L$
- da $\Sigma = \{\mathtt{a}\}$ spielt bei der Zerteilung von w nur die Länge von y eine Rolle
- wir wählen $i = 2$, d.h. $|xy^iz| \leq k^2 + k$

3. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

- Abstände zwischen Quadratzahlen wachsen linear

$$\underbrace{1 \quad 4}_{1}\underbrace{\quad 9}_{3}\underbrace{\quad 16}_{5}\underbrace{\quad 25}_{7} \qquad (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

- für Pumplänge k wählen wir $w = \mathtt{a}^{k^2} \in L$
- da $\Sigma = \{\mathtt{a}\}$ spielt bei der Zerteilung von w nur die Länge von y eine Rolle
- wir wählen $i = 2$, d.h. $|xy^iz| \leq k^2 + k$
- die zu k^2 nächste Quadratzahl ist $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

3. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

- Abstände zwischen Quadratzahlen wachsen linear

$$1 \underbrace{\qquad\qquad}_{1} 4 \underbrace{\qquad\qquad}_{3} 9 \underbrace{\qquad\qquad}_{5} 16 \underbrace{\qquad\qquad}_{7} 25$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

- für Pumplänge k wählen wir $w = \mathtt{a}^{k^2} \in L$
- da $\Sigma = \{\mathtt{a}\}$ spielt bei der Zerteilung von w nur die Länge von y eine Rolle
- wir wählen $i = 2$, d.h. $|xy^iz| \leq k^2 + k$
- die zu k^2 nächste Quadratzahl ist $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$
- $k^2 < |xy^2z| \leq k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

3. Beispiel $L = \{\mathsf{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

- Abstände zwischen Quadratzahlen wachsen linear

$$\underbrace{1 \quad 4}_{1} \underbrace{\quad 9}_{3} \underbrace{\quad 16}_{5} \underbrace{\quad 25}_{7} \qquad (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

- für Pumplänge k wählen wir $w = \mathsf{a}^{k^2} \in L$
- da $\Sigma = \{\mathsf{a}\}$ spielt bei der Zerteilung von w nur die Länge von y eine Rolle
- wir wählen $i = 2$, d.h. $|xy^iz| \leq k^2 + k$
- die zu k^2 nächste Quadratzahl ist $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$
- $k^2 < |xy^2z| \leq k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$
- $|xy^2z|$ liegt zwischen k^2 und $(k+1)^2$ und kann demnach keine Quadratzahl sein

3. Beispiel $L = \{\mathsf{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

- Abstände zwischen Quadratzahlen wachsen linear

$$\underbrace{1 \quad\quad 4}_{1}\underbrace{\quad\quad 9}_{3}\underbrace{\quad\quad 16}_{5}\underbrace{\quad\quad 25}_{7}$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

- für Pumplänge k wählen wir $w = \mathsf{a}^{k^2} \in L$
- da $\Sigma = \{\mathsf{a}\}$ spielt bei der Zerteilung von w nur die Länge von y eine Rolle
- wir wählen $i = 2$, d.h. $|xy^iz| \leq k^2 + k$
- die zu k^2 nächste Quadratzahl ist $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$
- $k^2 < |xy^2z| \leq k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$
- $|xy^2z|$ liegt zwischen k^2 und $(k+1)^2$ und kann demnach keine Quadratzahl sein

$\rightarrow L$ **nicht pumpbar** $\rightarrow L \notin$ **REG**

2. Kapitel

Kontextfreie Sprachen

Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatiken

- Grammatiken = Formalismus zum Beschreiben von Sprachen mit Ableitungsregeln

Kontextfreie Grammatiken

- Grammatiken = Formalismus zum Beschreiben von Sprachen mit Ableitungsregeln
- Ziel: $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$ soll erkannt werden

Kontextfreie Grammatiken

- Grammatiken = Formalismus zum Beschreiben von Sprachen mit Ableitungsregeln
- Ziel: $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$ soll erkannt werden
- Ziel: Modell soll *beherrschbar* bleiben

Kontextfreie Grammatiken

- Grammatiken = Formalismus zum Beschreiben von Sprachen mit Ableitungsregeln
- Ziel: $\{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n \mid n \geq 0\}$ soll erkannt werden
- Ziel: Modell soll *beherrschbar* bleiben

Kontextfreie Grammatik

Eine Kontextfreie Grammatik G ist ein 4 Tupel (V, Σ, R, S), bestehend aus

- V endliche Menge von Variablen,
- $\Sigma \neq \emptyset$ endliche Menge von Terminalsymbolen,
- $R \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ einer endliche Menge von Regeln,
- $S \in V$ einem Startsymbol.

- Schreibweise:
  - $(x, w) \in R$ wird geschrieben als $x \to w$

- Schreibweise:
  - $(x, w) \in R$ wird geschrieben als $x \to w$

    linke Seite $\nearrow$ $\qquad$ $\nwarrow$ rechte Seite

- Schreibweise:
  - $(x, w) \in R$ wird geschrieben als $x \to w$

    linke Seite   rechte Seite
  - Zusammenfassen aller Regeln mit der gleichen linken Seite

- Schreibweise:
  - $(x, w) \in R$ wird geschrieben als $x \to w$

    linke Seite rechte Seite

  - Zusammenfassen aller Regeln mit der gleichen linken Seite

    $(x, w_1), (x, w_2), (x, w_3) \in R$ geschrieben als $x \to w_1 \mid w_2 \mid w_3$

- Schreibweise:
  - $(x, w) \in R$ wird geschrieben als $x \to w$

    linke Seite rechte Seite
  - Zusammenfassen aller Regeln mit der gleichen linken Seite

    $(x, w_1), (x, w_2), (x, w_3) \in R$ geschrieben als $x \to w_1 \mid w_2 \mid w_3$
  - Variablen $=$ Großbuchstaben

- Schreibweise:
  - $(x, w) \in R$ wird geschrieben als $x \to w$

    linke Seite ↗ ↖ rechte Seite

  - Zusammenfassen aller Regeln mit der gleichen linken Seite

    $(x, w_1), (x, w_2), (x, w_3) \in R$ geschrieben als $x \to w_1 \mid w_2 \mid w_3$
  - Variablen $=$ Großbuchstaben
  - Terminalsymbole $=$ Kleinbuchstaben, Ziffern, Sonderzeichen

- Schreibweise:
  - $(x, w) \in R$ wird geschrieben als $x \to w$

    linke Seite   rechte Seite

  - Zusammenfassen aller Regeln mit der gleichen linken Seite

    $(x, w_1), (x, w_2), (x, w_3) \in R$ geschrieben als $x \to w_1 \mid w_2 \mid w_3$
  - Variablen = Großbuchstaben
  - Terminalsymbole = Kleinbuchstaben, Ziffern, Sonderzeichen
  - wenn nicht anders angegeben, Startsymbol immer S

- Schreibweise:
  - $(x, w) \in R$ wird geschrieben als $x \to w$

    linke Seite rechte Seite
  - Zusammenfassen aller Regeln mit der gleichen linken Seite

    $(x, w_1), (x, w_2), (x, w_3) \in R$ geschrieben als $x \to w_1 \mid w_2 \mid w_3$
  - Variablen = Großbuchstaben
  - Terminalsymbole = Kleinbuchstaben, Ziffern, Sonderzeichen
  - wenn nicht anders angegeben, Startsymbol immer S
  - es genügt i.A. die Regeln der Grammatik anzugeben

- Schreibweise:
  - $(x, w) \in R$ wird geschrieben als $x \to w$

    linke Seite ↗ ↖ rechte Seite
  - Zusammenfassen aller Regeln mit der gleichen linken Seite

    $(x, w_1), (x, w_2), (x, w_3) \in R$ geschrieben als $x \to w_1 \mid w_2 \mid w_3$
  - Variablen $=$ Großbuchstaben
  - Terminalsymbole $=$ Kleinbuchstaben, Ziffern, Sonderzeichen
  - wenn nicht anders angegeben, Startsymbol immer S
  - es genügt i.A. die Regeln der Grammatik anzugeben
- Beispiel:

$$
\begin{array}{rcl}
S & \to & \mathtt{a}AA \mid \varepsilon \\
A & \to & \mathtt{a}X_1 \mid \mathtt{a} \\
X_1 & \to & \mathtt{ba}A
\end{array}
$$

Sprache einer kf Grammatik

Sprache einer kf Grammatik

- wenn $u, v, w \in (\Sigma \cup V)^*$ und $A \to w$ eine Regel, dann leitet uAv zu uwv ab

Sprache einer kf Grammatik

- wenn $u, v, w \in (\Sigma \cup V)^*$ und $A \to w$ eine Regel, dann leitet uAv zu uwv ab
  Schreibweise: $uAv \Rightarrow uwv$

Sprache einer kf Grammatik

- wenn $u, v, w \in (\Sigma \cup V)^*$ und $A \to w$ eine Regel, dann leitet uAv zu uwv ab
  Schreibweise: $uAv \Rightarrow uwv$
- wiederholtes Ableiten: $uAv \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow t$

Sprache einer kf Grammatik

- wenn $u, v, w \in (\Sigma \cup V)^*$ und $A \to w$ eine Regel, dann leitet uAv zu uwv ab
  Schreibweise: $uAv \Rightarrow uwv$
- wiederholtes Ableiten: $uAv \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow t$
  Schreibweise: $uAv \Rightarrow^* t$

Sprache einer kf Grammatik

- wenn $u, v, w \in (\Sigma \cup V)^*$ und $A \to w$ eine Regel, dann leitet uAv zu uwv ab
  Schreibweise: $uAv \Rightarrow uwv$
- wiederholtes Ableiten: $uAv \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow t$
  Schreibweise: $uAv \Rightarrow^* t$

Definition

Für eine kf Grammatik G ist die Sprache der Grammatik $L(G)$ definiert als
$$L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}.$$

Sprache einer kf Grammatik

- wenn $u, v, w \in (\Sigma \cup V)^*$ und $A \to w$ eine Regel, dann leitet uAv zu uwv ab
  Schreibweise: $uAv \Rightarrow uwv$
- wiederholtes Ableiten: $uAv \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow t$
  Schreibweise: $uAv \Rightarrow^* t$

Definition

Für eine kf Grammatik G ist die Sprache der Grammatik $L(G)$ definiert als

$$L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}.$$

- also alle Wörter **über** Σ die ich aus dem Startsymbol ableiten kann

Beispiel 1

$$S \rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

Beispiel 1

$$S \quad \rightarrow \quad \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{aa}S\mathtt{bb} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathtt{a}^k S \mathtt{b}^k \Rightarrow \mathtt{a}^k \mathtt{b}^k$$

Beispiel 1

$$S \quad \rightarrow \quad \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{aa}S\mathtt{bb} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathtt{a}^k S \mathtt{b}^k \Rightarrow \mathtt{a}^k \mathtt{b}^k$$

$$L(G) = \{\mathtt{a}^n \mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$$

Beispiel 1

$$S \quad \rightarrow \quad \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{aa}S\mathtt{bb} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathtt{a}^k S \mathtt{b}^k \Rightarrow \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$$

$$L(G) = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$$

Beispiel 2

$$S \quad \rightarrow \quad \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{b}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

Beispiel 1

$$S \quad \to \quad \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{aa}S\mathtt{bb} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathtt{a}^k S \mathtt{b}^k \Rightarrow \mathtt{a}^k \mathtt{b}^k$$

$$L(G) = \{\mathtt{a}^n \mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$$

Beispiel 2

$$S \quad \to \quad \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{b}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{ab}S\mathtt{ba} \Rightarrow \cdots \Rightarrow uS\overleftarrow{u} \Rightarrow u\overleftarrow{u}$$

Beispiel 1

$$S \quad \to \quad \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{aa}S\mathtt{bb} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathtt{a}^k S \mathtt{b}^k \Rightarrow \mathtt{a}^k \mathtt{b}^k$$

$$L(G) = \{\mathtt{a}^n \mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$$

Beispiel 2

$$S \quad \to \quad \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{b}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{ab}S\mathtt{ba} \Rightarrow \cdots \Rightarrow uS\overleftarrow{u} \Rightarrow u\overleftarrow{u}$$

$$L(G) = \{u\overleftarrow{u} \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$$

Beispiel 1

$$S \quad \to \quad \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{aa}S\mathtt{bb} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathtt{a}^k S \mathtt{b}^k \Rightarrow \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$$

$$L(G) = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$$

Beispiel 2

$$S \quad \to \quad \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{b}S\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{ab}S\mathtt{ba} \Rightarrow \cdots \Rightarrow uS\overleftarrow{u} \Rightarrow u\overleftarrow{u}$$

$$L(G) = \{u\overleftarrow{u} \mid u \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\}$$

Beispiel 3

$$S \quad \to \quad (S) \mid SS \mid \varepsilon$$

Beispiel 1

$$S \rightarrow \texttt{a}S\texttt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \texttt{a}S\texttt{b} \Rightarrow \texttt{aa}S\texttt{bb} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \texttt{a}^k S \texttt{b}^k \Rightarrow \texttt{a}^k\texttt{b}^k$$

$$L(G) = \{\texttt{a}^n\texttt{b}^n \mid n \geq 0\}$$

Beispiel 2

$$S \rightarrow \texttt{a}S\texttt{a} \mid \texttt{b}S\texttt{b} \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow \texttt{a}S\texttt{a} \Rightarrow \texttt{ab}S\texttt{ba} \Rightarrow \cdots \Rightarrow uS\overleftarrow{u} \Rightarrow u\overleftarrow{u}$$

$$L(G) = \{u\overleftarrow{u} \mid u \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*\}$$

Beispiel 3

$$S \rightarrow (S) \mid SS \mid \varepsilon$$

$$L(G) = \{w \in \{(,)\}^* \mid w \text{ korrekt gklammert }\}$$

Ableitungsbäume

Ableitungsbäume

- beim DEA/NEA *bezeugte* der Lauf eines Wortes die Berechnung

Ableitungsbäume

- beim DEA/NEA *bezeugte* der Lauf eines Wortes die Berechnung
- lineare Ableitungssequenz $S \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow w$ erfasst die *Struktur* der Berechnung unzureichend

Ableitungsbäume

- beim DEA/NEA *bezeugte* der Lauf eines Wortes die Berechnung
- lineare Ableitungssequenz $S \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow w$ erfasst die *Struktur* der Berechnung unzureichend
- **Alternative:** Ableitungsbaum eines Wortes w

Ableitungsbäume

- beim DEA/NEA *bezeugte* der Lauf eines Wortes die Berechnung
- lineare Ableitungssequenz $S \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow w$ erfasst die *Struktur* der Berechnung unzureichend
- **Alternative:** Ableitungsbaum eines Wortes w
  - Knotenbeschrifteter Baum mit Elementen aus $\Sigma \cup V$

Ableitungsbäume

- beim DEA/NEA *bezeugte* der Lauf eines Wortes die Berechnung
- lineare Ableitungssequenz $S \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow w$ erfasst die *Struktur* der Berechnung unzureichend
- **Alternative:** Ableitungsbaum eines Wortes w
  - Knotenbeschrifteter Baum mit Elementen aus $\Sigma \cup V$
  - ausgezeichnete Wurzel, mit S beschriftet

Ableitungsbäume

- beim DEA/NEA *bezeugte* der Lauf eines Wortes die Berechnung
- lineare Ableitungssequenz $S \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow w$ erfasst die *Struktur* der Berechnung unzureichend
- **Alternative:** Ableitungsbaum eines Wortes w
  - Knotenbeschrifteter Baum mit Elementen aus $\Sigma \cup V$
  - ausgezeichnete Wurzel, mit S beschriftet
  - Blätter enthalten Terminalsymbole

Ableitungsbäume

- beim DEA/NEA *bezeugte* der Lauf eines Wortes die Berechnung
- lineare Ableitungssequenz $S \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow w$ erfasst die *Struktur* der Berechnung unzureichend
- **Alternative:** Ableitungsbaum eines Wortes w
  - Knotenbeschrifteter Baum mit Elementen aus $\Sigma \cup V$
  - ausgezeichnete Wurzel, mit S beschriftet
  - Blätter enthalten Terminalsymbole
  - wenn Knoten Bezeichnung $X \in V$ hat und die Kinder (von links) $u_1, u_2, u_3, \ldots$, dann muss es die Regel geben $X \rightarrow u_1 u_2 u_3$ geben

Ableitungsbäume

- beim DEA/NEA *bezeugte* der Lauf eines Wortes die Berechnung
- lineare Ableitungssequenz $S \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow w$ erfasst die *Struktur* der Berechnung unzureichend
- **Alternative:** Ableitungsbaum eines Wortes w
  - Knotenbeschrifteter Baum mit Elementen aus $\Sigma \cup V$
  - ausgezeichnete Wurzel, mit S beschriftet
  - Blätter enthalten Terminalsymbole
  - wenn Knoten Bezeichnung $X \in V$ hat und die Kinder (von links) $u_1, u_2, u_3, \ldots$, dann muss es die Regel geben $X \to u_1 u_2 u_3$ geben
  - $w =$Terminale des Baumes in Post-Order

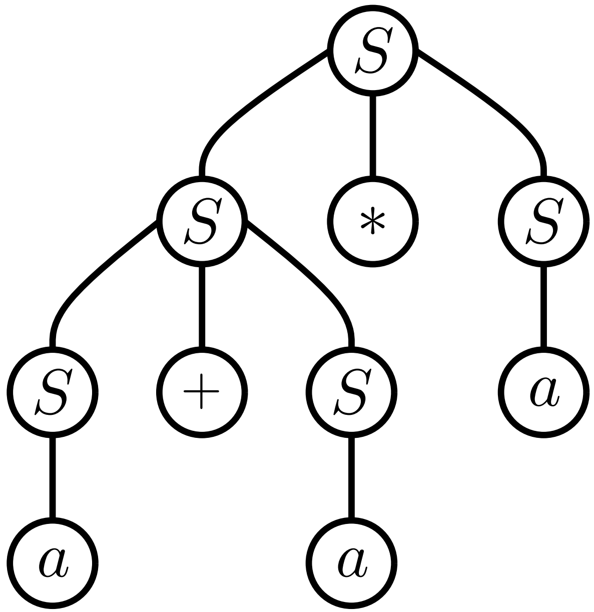
Beispiel

Beispiel $S \;\rightarrow\; S + S \mid S * S \mid \texttt{a}$

$w = a + a * a$

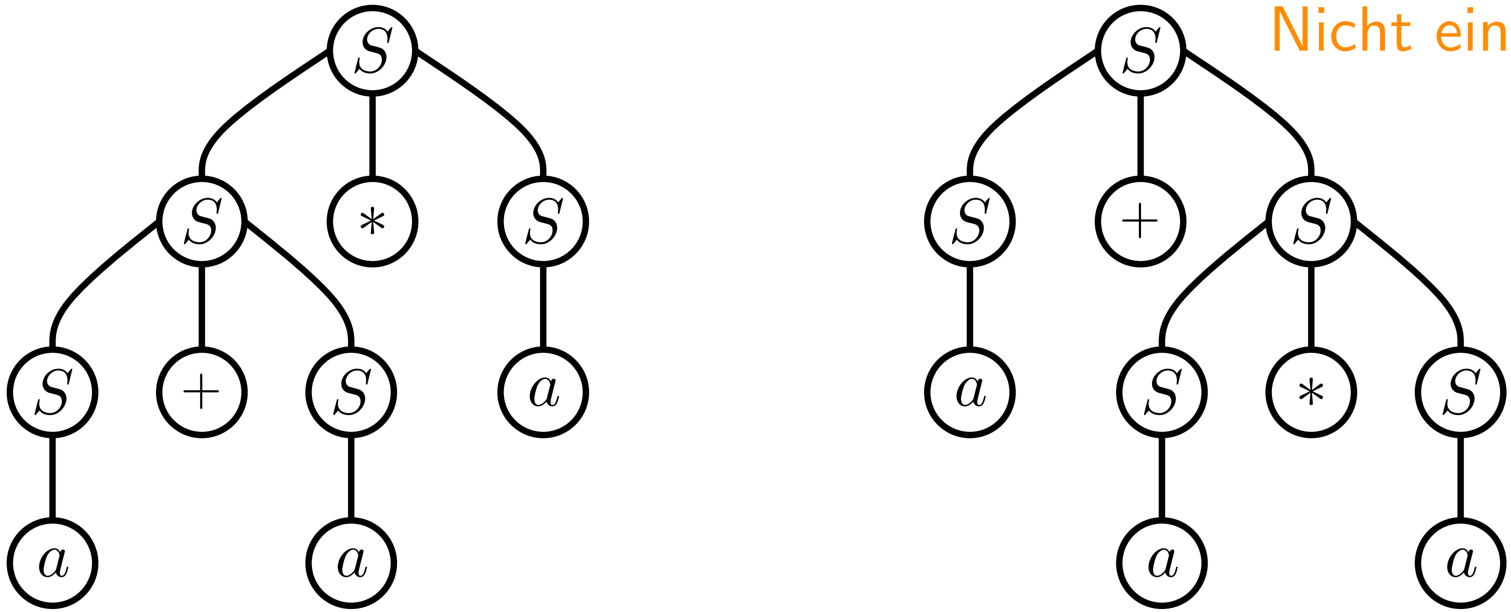
Beispiel $S \rightarrow S + S \mid S * S \mid \texttt{a}$

$w = a + a * a$



Beispiel $S \rightarrow S + S \mid S * S \mid \texttt{a}$

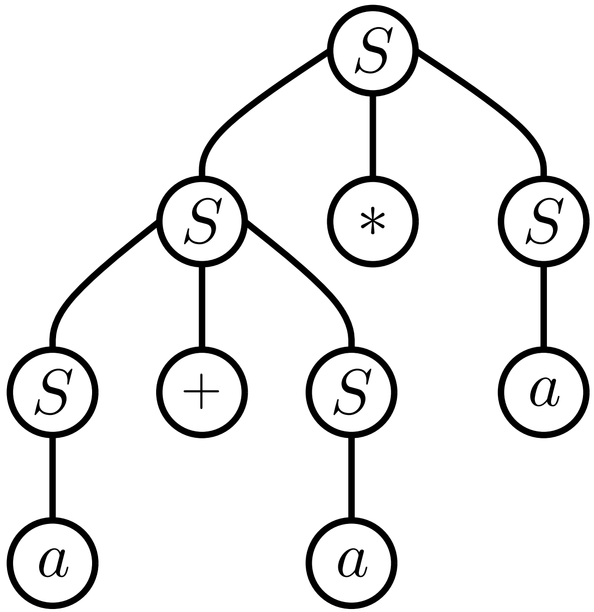
$w = a + a * a$

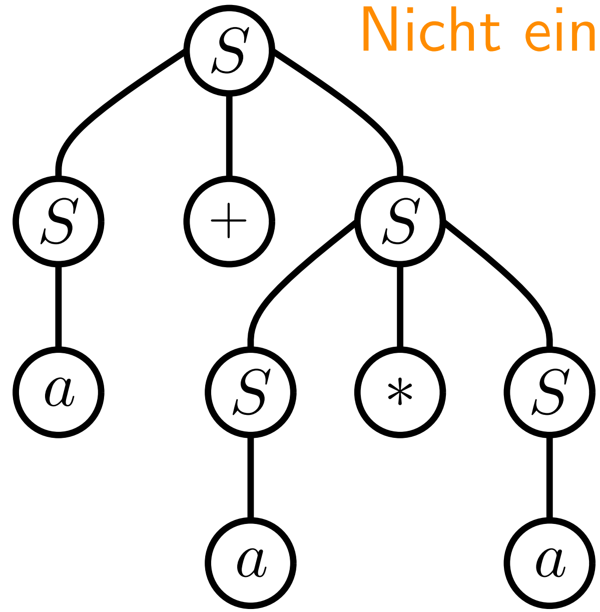


Nicht eindeutig!

Beispiel $S \rightarrow S + S \mid S * S \mid \mathtt{a}$

$w = a + a * a$





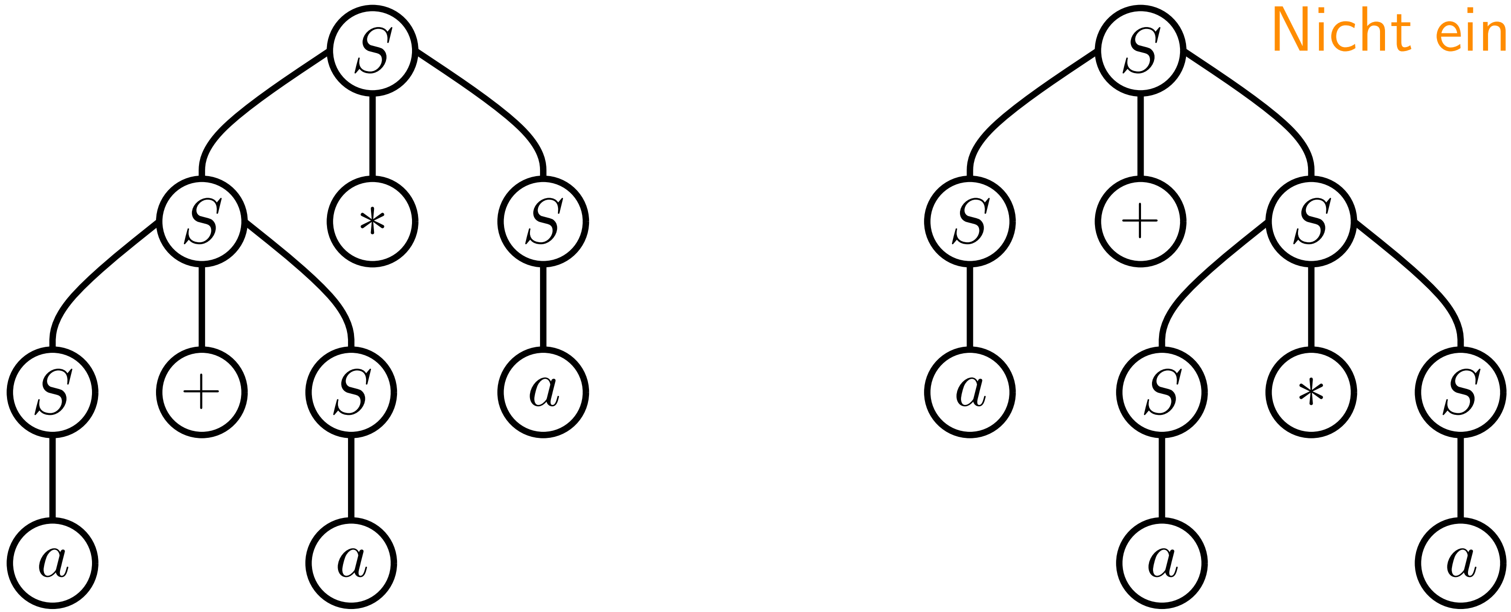
Nicht eindeutig!

Definition

Gibt es ein Wort in einer kf. Grammatik G mit zwei unterschiedlichen Ableitungsbäumen so heißt G **mehrdeutig**.

Beispiel $S \rightarrow S + S \mid S * S \mid \mathtt{a}$

$w = a + a * a$



Nicht eindeutig!

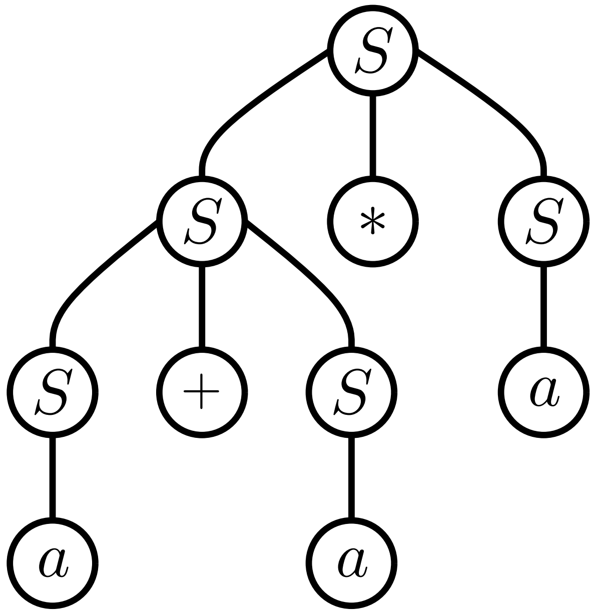
Definition

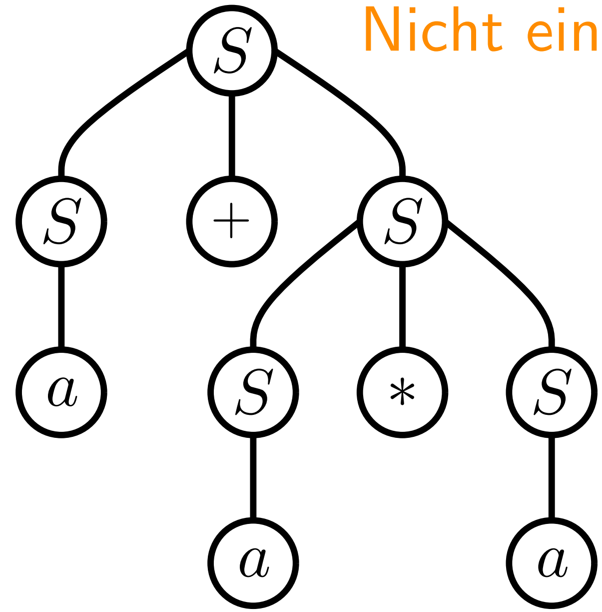
Gibt es ein Wort in einer kf. Grammatik G mit zwei unterschiedlichen Ableitungsbäumen so heißt G **mehrdeutig**.

Mehrdeutigkeit gilt es zu vermeiden!

Beispiel $S \to (S + S) \mid S * S \mid \texttt{a}$

$w = a + a * a$





Nicht eindeutig!

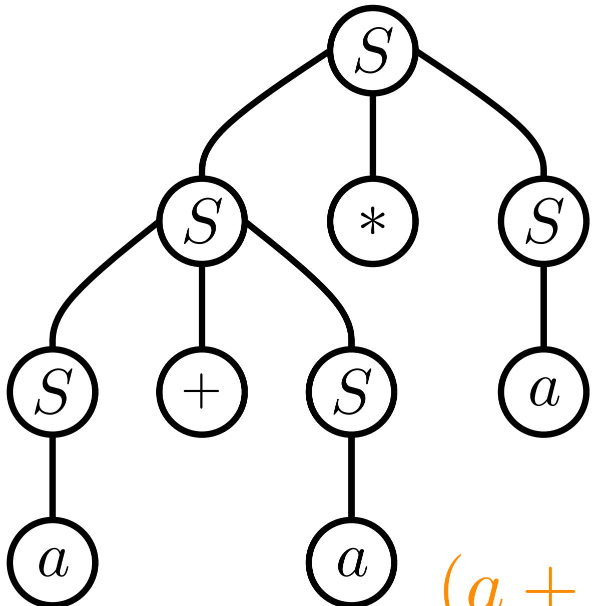
Definition

Gibt es ein Wort in einer kf. Grammatik G mit zwei unterschiedlichen Ableitungsbäumen so heißt G **mehrdeutig**.

Mehrdeutigkeit gilt es zu vermeiden!

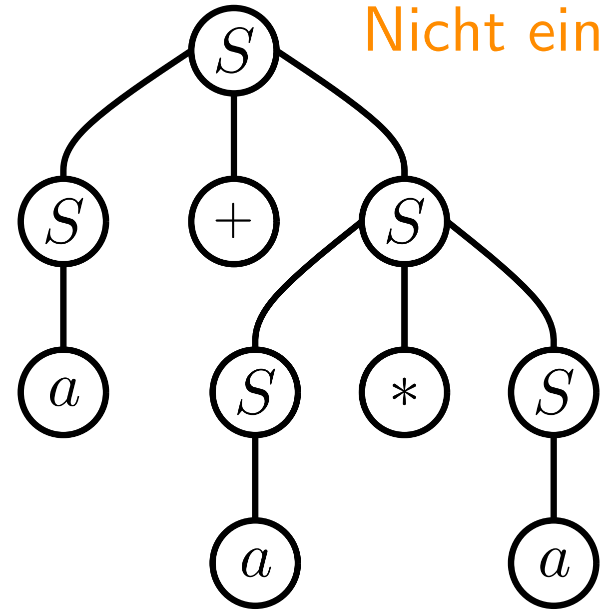
Beispiel $S \to (S + S) \mid S * S \mid \mathtt{a}$

$w = a + a * a$



$(a + a) * a$

Nicht eindeutig!



$(a + a * a)$

Definition

Gibt es ein Wort in einer kf. Grammatik G mit zwei unterschiedlichen Ableitungsbäumen so heißt G **mehrdeutig**.

Mehrdeutigkeit gilt es zu vermeiden!

Definition

Die Sprache $L(G)$ einer kf. Grammatik G heißt **kontextfreie Sprache**.

$$\mathsf{CFL} := \{L \mid L \text{ ist kontextfrei}\}$$

Definition

Die Sprache $L(G)$ einer kf. Grammatik G heißt **kontextfreie Sprache**.

$$\mathsf{CFL} := \{L \mid L \text{ ist kontextfrei}\}$$

Satz 10

$$L \in \mathsf{REG} \Rightarrow L \in \mathsf{CFL}$$

Definition

Die Sprache $L(G)$ einer kf. Grammatik G heißt **kontextfreie Sprache**.

$$\text{CFL} := \{L \mid L \text{ ist kontextfrei}\}$$

Satz 10

$$L \in \text{REG} \Rightarrow L \in \text{CFL}$$

- Aus Satz 10 folgt, dass REG $\subsetneq$ CFL ...

Definition

Die Sprache $L(G)$ einer kf. Grammatik G heißt **kontextfreie Sprache**.

$$\text{CFL} := \{L \mid L \text{ ist kontextfrei}\}$$

Satz 10

$$L \in \text{REG} \Rightarrow L \in \text{CFL}$$

- Aus Satz 10 folgt, dass REG $\subsetneq$ CFL ...

  ... denn $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$ ist kontextfrei aber nicht regulär

Definition

Die Sprache $L(G)$ einer kf. Grammatik G heißt **kontextfreie Sprache**.

$$\text{CFL} := \{L \mid L \text{ ist kontextfrei}\}$$

Satz 10

$$L \in \text{REG} \Rightarrow L \in \text{CFL}$$

- Aus Satz 10 folgt, dass REG $\subsetneq$ CFL ...

  ... denn $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$ ist kontextfrei aber nicht regulär