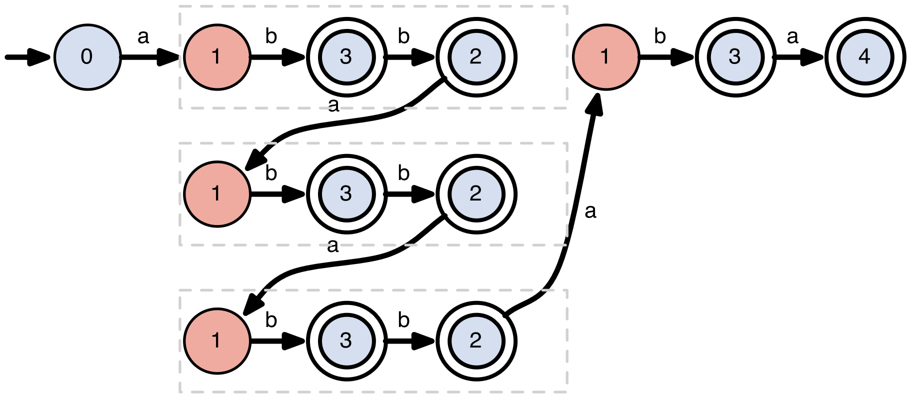
Berechenbarkeitstheorie

10. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster

Alle Folien unter Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported Lizenz.

Ziel: KA entspricht KF

Satz 12

Eine Sprache L wird genau dann von einem KA erkannt, wenn $L \in$ CFL.

1. Teil des Beweis

Wenn $L \in$ CFL dann gibt es KA $K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ mit $L(K) = L$

✓ Letzte Vorlesung

2. Teil des Beweises

Für jeden KA $K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ gilt $L(K) \in$ CFL

heute

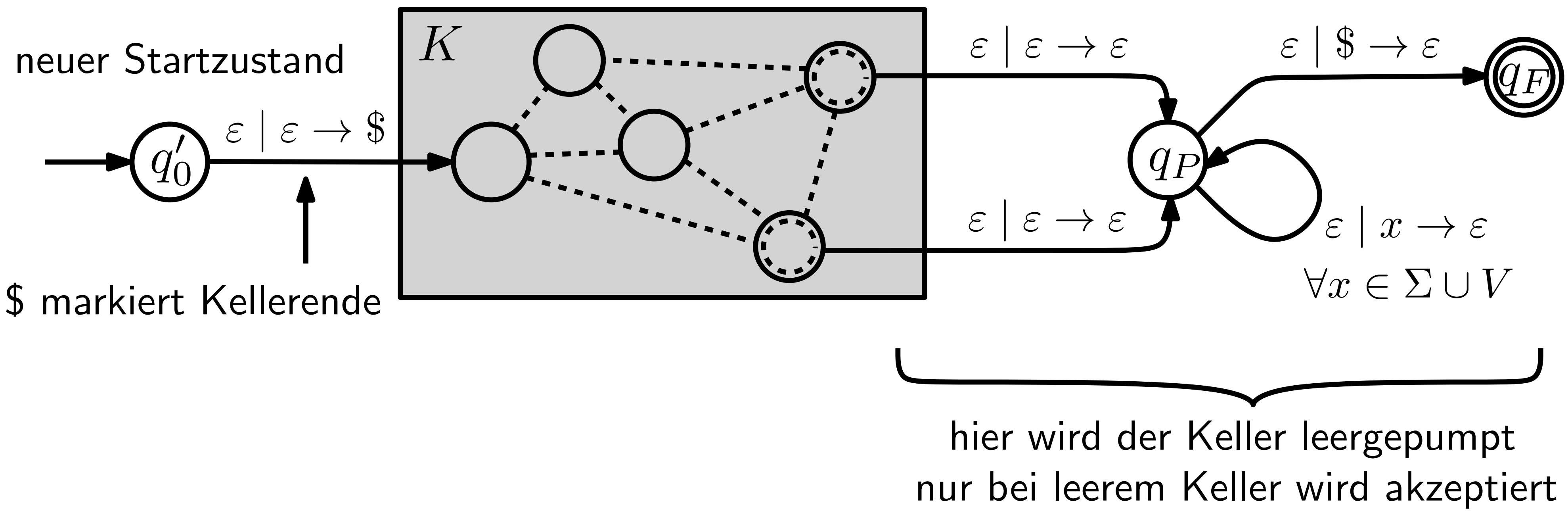
2. Teil des Beweises

Für jeden KA $K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ gilt $L(K) \in$ CFL

1. Schritt Modifikation des KA

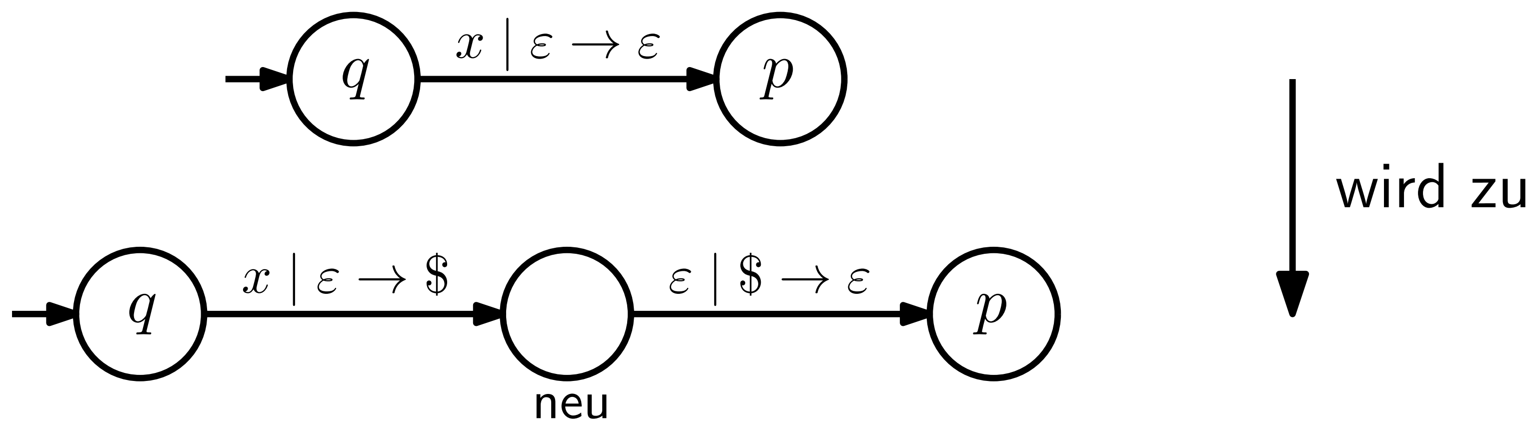
- Baue K so um, dass
  1. $F = \{q_F\}$
  2. akzeptiert wird nur mit leerem Keller
  3. nur Push oder Pop (kein Push+Pop)
- Für 1. und 2. führe 3 neue Zustände q_0', q_F, q_P ein

Schema

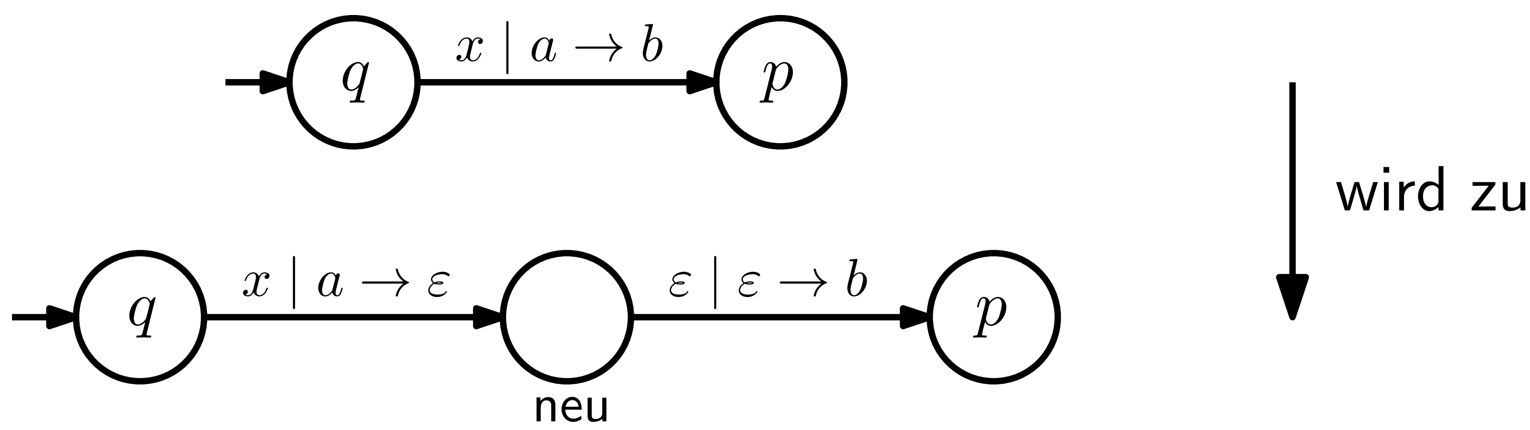


- Für 3. (jeder Übergang ist Push oder Pop)

Befehle die Keller unberührt lassen



Befehle Push+Pop (simultan)



Konstruktion Grammatik für $L(K)$

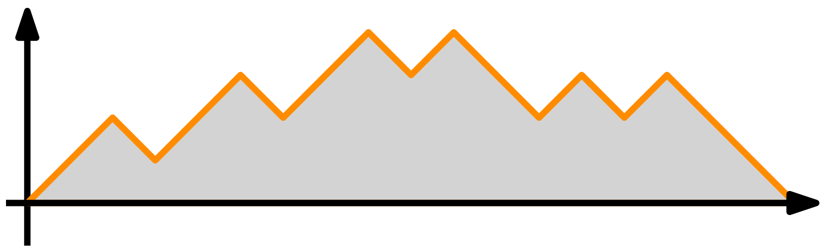
- Variablen in G haben die Form A_{pq}, für jedes Zustandspaar p, q
- Interpretation:

$$\{w \mid A_{pq} \Rightarrow^* w\} = \text{Wörter die Zustand } p \text{ nach } q \text{ mit leerem Keller überführen} \qquad (p \rightarrow_\ell^* q)$$

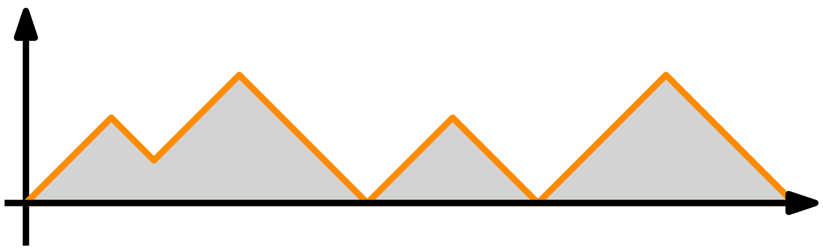
Keller am Anfang und am Ende leer

- es gibt 2 Möglichkeiten für $p \rightarrow_\ell^* q$

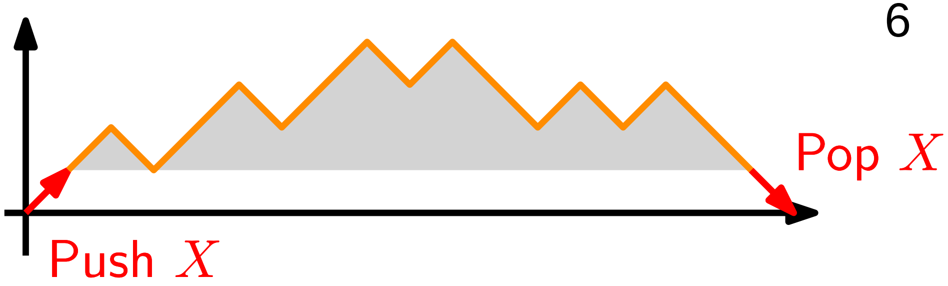
1. Keller wird niemals leer



2. Keller wird leer

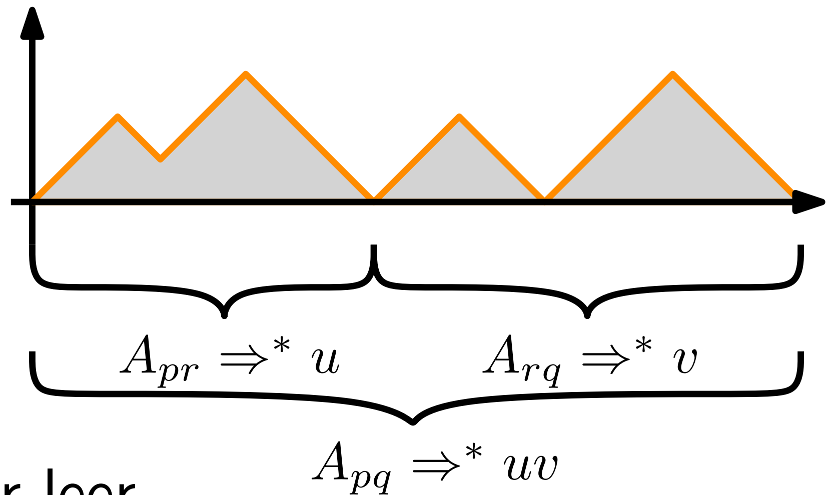


1. Keller wird niemals leer



- erster Übergang war ein Push (z.B. Push X)
- letzter Übergang war ein Pop (konkret Pop X)
- wenn beim ersten Übergang a gelesen, Folgezustand r, beim letzten b gelesen, Vorzustand s, dann $A_{pq} \to \mathtt{a}A_{rs}\mathtt{b}$

2. Keller wird leer



- im Zustand r wird der Keller leer
- dann gilt $A_{pq} \to A_{pr}A_{rq}$

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ für $L(K)$

- $V = \{A_{pq} \mid p, q \in Q\}$, sowie $S = A_{q_0' q_F}$
- für alle $p, q, r, s \in Q$, $t \in \Gamma$, $a, b \in \Sigma_\varepsilon$: ($p = q$, etc. möglich)
  wenn $(r, t) \in \delta(p, a, \varepsilon)$ und $(q, \varepsilon) \in \delta(s, b, t)$
  dann füge $A_{pq} \to a A_{rs} b$ den Regeln R hinzu

$$p \xrightarrow{a \mid \varepsilon \to t} r \qquad\qquad s \xrightarrow{b \mid t \to \varepsilon} q$$

- für alle $p, q, r \in Q$: füge $A_{pq} \to A_{pr} A_{rq}$ den Regeln R hinzu
- für alle $p \in Q$: füge $A_{pp} \to \varepsilon$ den Regeln R hinzu
- nach Konstruktion gilt:

$$A_{pq} \Rightarrow^* w \iff w \text{ führt von } p \text{ nach } q \text{ mit leerem Keller}$$

- Wörter der Sprache führen von q_0' nach q_F mit leeren Keller
  $\to$ dies sind die Wörter die ich aus S ableiten kann $\to L(G) = L(K)$

Formaler Korrektheitsbeweis

1. Teil

Wir zeigen: Wenn $A_{p,q} \Rightarrow^* w$ gilt, dann kommt man mit w von p nach q mit leerem Keller.

Beweis Induktion über Anzahl der Ableitungsschritte für w

I.A. In einem Schritt kann man nur $A_{p,p} \to \varepsilon$ ableiten. Mit ε komme ich von p nach p mit leerem Keller.

I.S. Angenommen, Aussage gilt für Ableitungen, die k-viele Ableitungsschritte verwenden.

2.Fall: Erste Ableitung hat die Form $A_{p,q} \to A_{p,r}A_{r,q}$.

Es gilt $w = uv$, man kommt in maximal k Schritten mit u von p nach r und mit v von r nach q (jeweils mit leerem Keller).

Also kommt man mit w von p nach q mit leerem Keller.

Formaler Korrektheitsbeweis

2. Teil

Wir zeigen: Wenn man mit w von p nach q mit leerem Keller kommt, dann gilt $A_{p,q} \Rightarrow^* w$.

Beweis Ind. über Anzahl Übergänge beim Lauf von p nach q

I.A. 0 Übergänge: In diesem Fall verbleiben wir im Zustand p und nur ε kann erkannt werden. Dies wird durch $A_{p,p} \to \varepsilon$ gewährleistet.

I.S. Angenommen, Aussage gilt für Läufe, in denen k-viele Übergänge vorkommen.

2.Fall: Beim Lauf von p nach q wird Keller in Zustand r leer
Sei u der Teil von w, welcher im Lauf von p nach r gelesen wird und sei $w = uv$.
Nach Annahme gilt $A_{p,r} \Rightarrow^* u$ und $A_{r,q} \Rightarrow^* v$.

Da es die Regel $A_{p,q} \Rightarrow A_{p,r}A_{r,q}$ gibt, folgt $A_{p,q} \Rightarrow^* w$.

Kontextfreies Pumpinglemma

- Wie können wir bestimmen, dass eine Sprache nicht kontextfrei ist?

Definition

Eine Sprache heißt **kf-pumpbar** gdw., es gibt ein $k \in \mathbf{N}$, sodass für alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geq k$ es eine Zerlegung von $w = uvxyz$ gibt, für die gilt:

1. $|vxy| \leq k$,
2. $\forall i \geq 0\colon uv^ixy^iz \in L$,
3. $|vy| > 0$.

(Anm.: Aus pumpbar folgt kf-pumpbar)

Kontextfreies Pumpinglemma

$$L \in \mathsf{CFL} \quad \Rightarrow \quad L \text{ ist kf-pumpbar}$$

Beispiel

$L = \{r\overleftarrow{r} \mid r \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}^*\} \in \mathsf{CFL}$

Zur Erinnerung: kf-pumbar heißt
$\exists k \in \mathbf{N}\ \forall w \in L\colon (|w| \geq k)\ \exists uvxyz = w$ mit $|vxy| \leq k$,$|vy| > 0$,und
$\forall i \geq 0\colon uv^ixy^iz \in L$

In diesem Fall:

- $k = 2$
- $\forall w = r\overleftarrow{r}$ zerteile w wie folgt

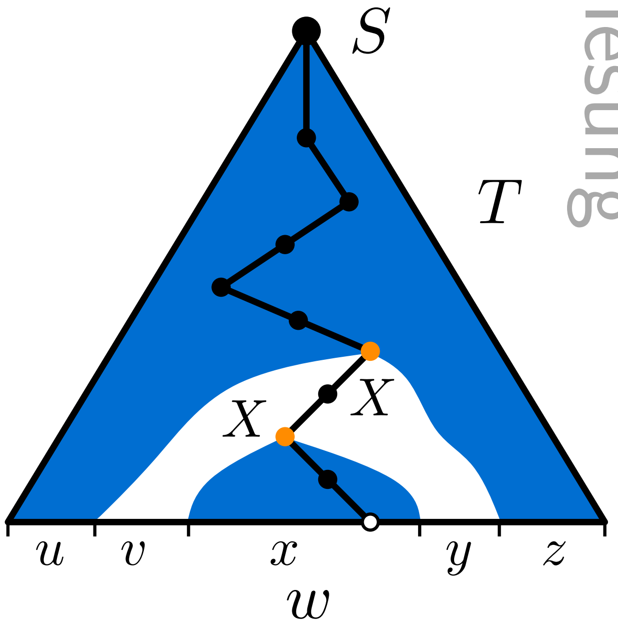
$$w = \underbrace{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}_{u}\underset{v}{a_k}\underset{x=\varepsilon}{}\underset{y}{a_k}\underbrace{a_{k-1}\cdots a_2 a_1}_{z}$$

- $|vxy| = 2 \leq k$ und $|vy| = 2 > 0$
- $\forall i \geq 0$ gilt: uv^ixy^iz hat die Form $r\overleftarrow{r}$ mit $r = a_1 \cdots a_{k-1}a_k^i$
- L ist kf-pumpbar

Beweis kf Pumpinglemma

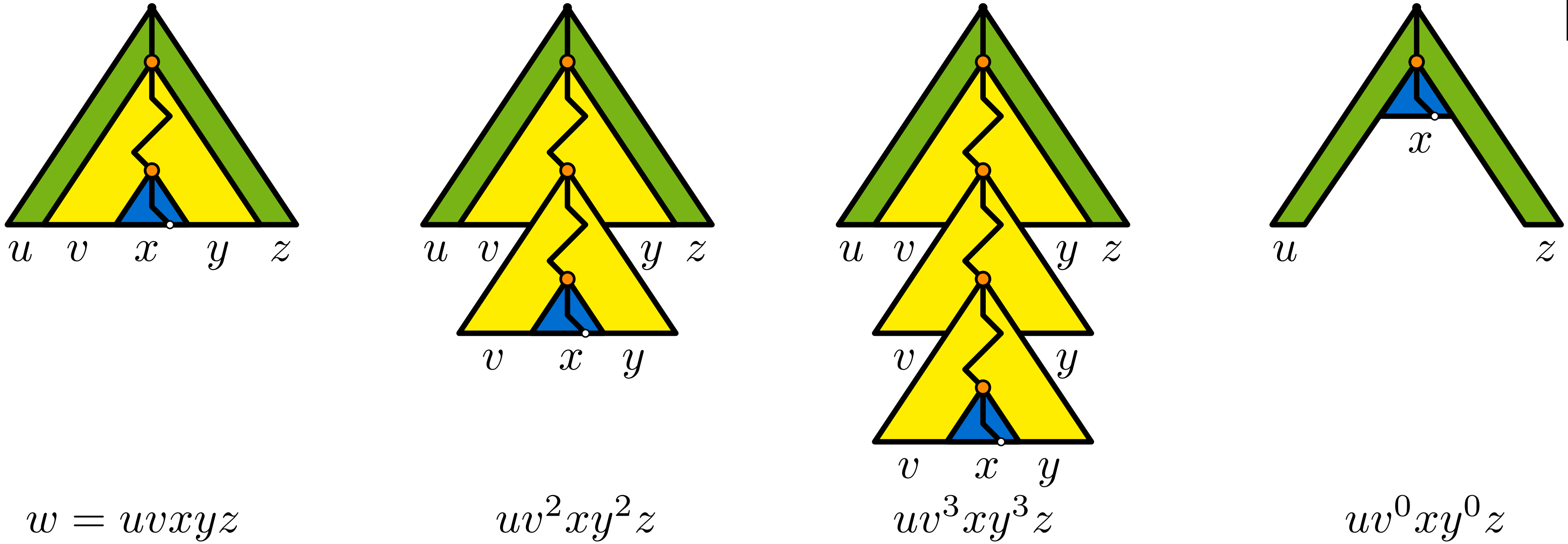
(Grundidee)

- sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kf Grammatik für L
- wenn $w \in L$ dann gibt es einen Ableitungsbaum für w
- wähle als T einen beliebigen Ableitungsbaum für w
- für w lang genug, muss es einen doppelten inneren Knoten X auf einem Pfad von S geben

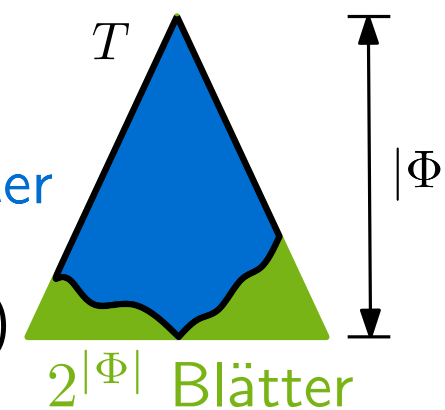


- Entfernt man diese Knoten zerfällt T is 3 Teilbäume, welche die Wörter u, v, x, y, z definieren
- aus diesen Teilbäumen, kann man neue Ableitungsbäume konstruieren, die dann $uv^ixy^iz \in L$ bezeugen

(Schema)



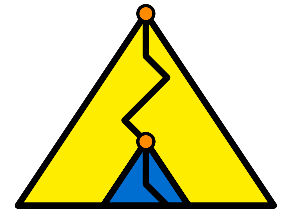
(Details)



$\leq 2^{|\Phi|}$ Blätter

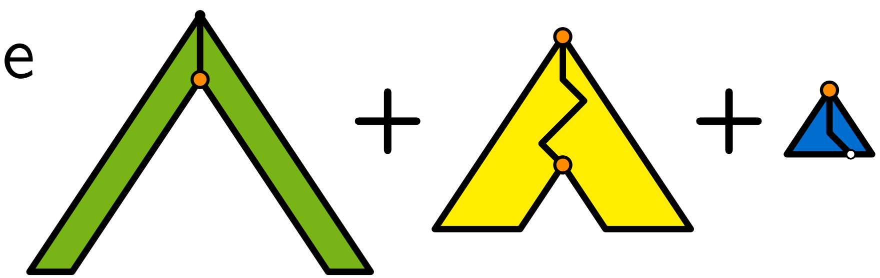
- wähle G in Chomsky Normalform
- wähle $k = 2^{|V|+1}$
- wähle Ableitungsbaum für w ohne Terminalsymbole (T)
- wähle als Φ einen längsten Wurzel–Blatt Pfad in T
- Blätter von $T = |w| \geq k = 2^{|V|+1}$, d.h. $|\Phi| \geq |V| + 1$

- da $|\Phi| \geq |V| + 1$ muss sich die Beschriftung mindestens eines der Knoten wiederholen
- X ist die erste sich wiederholende Variable (vom Blatt aus gesehen)
- Baum unter dem 2. X von unten hat $\leq k$ Blätter (Eigenschaft 1)

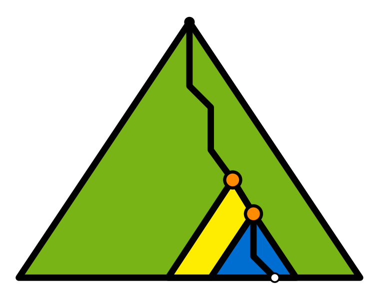


Höhe $\leq |V| + 1$
$|vxy| = \#$ Blätter
$\leq 2^{|V|+1} = k$

- wir können nun Ableitungsbäume für uv^ixy^iz konstruieren (Eigenschaft 2)



- selbst wenn die zwei 2 X direkt aufeinander folgen ist entweder $v \neq \varepsilon$ oder $y \neq \varepsilon$ (Eigenschaft 3)



$\square$

1. Beispiel $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$

Zu zeigen:

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall uvxyz = w$ mit $|vxy| \leq k$,$|vy| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon uv^ixy^iz \notin L$

- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k\mathtt{c}^k$
- wir zeigen: für jedes $uvxyz = w$ finden wir ein i, sodass $uv^ixy^iz \notin L$
- **1. Fall:** v oder y enthält verschiedene Zeichen, dann ist aber $uv^2xy^2z \notin L(\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*\mathtt{c}^*)$ und somit nicht aus L
- **2. Fall:** v und y haben die Form $\mathtt{a}^*$, $\mathtt{b}^*$, oder $\mathtt{c}^*$. Dann stimmen bei uv^2xy^2z nicht mehr die Anzahl der a, b und c überein $\rightarrow$ Wort nicht aus L.
- also ist L nicht kf-pumpbar und somit nicht kontextfrei