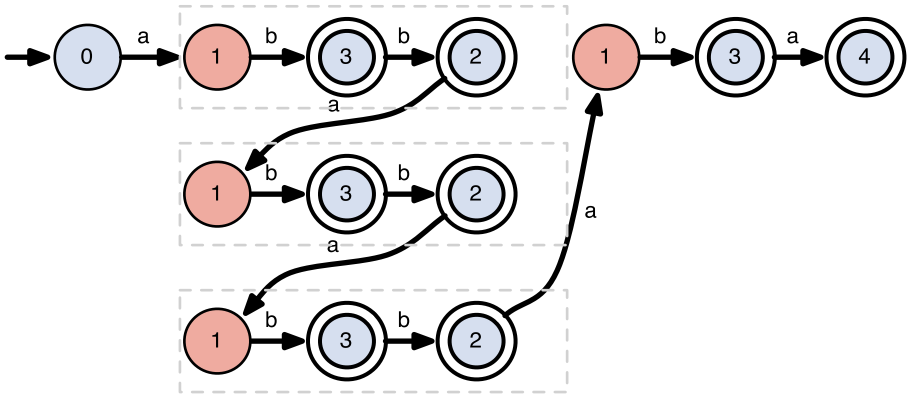
Berechenbarkeitstheorie

11. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster

Kontextfreies Pumpinglemma

- Wie können wir bestimmen, dass eine Sprache nicht kontextfrei ist?

Definition

Eine Sprache heißt **kf-pumpbar** gdw., es gibt ein $k \in \mathbf{N}$, sodass für alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geq k$ es eine Zerlegung von $w = uvxyz$ gibt, für die gilt:

1. $|vxy| \leq k$,
2. $\forall i \geq 0\colon uv^ixy^iz \in L$,
3. $|vy| > 0$.

(Anm.: Aus pumpbar folgt kf-pumpbar)

Kontextfreies Pumpinglemma

$$L \in \text{CFL} \quad \Rightarrow \quad L \text{ ist kf-pumpbar}$$

Beispiel $L = \{rr \mid r \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

$\forall k \in \mathbf{N}\ \exists w \in L\colon (|w| \geq k)\ \forall uvxyz = w$ mit $|vxy| \leq k, |vy| > 0$ gilt
$\exists i \geq 0\colon uv^ixy^iz \notin L$

- wir wählen $w \in L$ in Abhängigkeit von k, in unserem Fall $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k\mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$
- für jede Zerteilung $w = uvxyz$ hat uv^0xy^0z immer die Form $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*$

Fall A liegen beide Pumpstellen im ersten r, erhalte ich $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*\mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$, wobei der Anfang ungleich $\mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$ ist

Fall B liegen beide Pumpstellen im letzten r, erhalte ich $\mathtt{a}^k\mathtt{b}^k\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*$, wobei das Ende ungleich $\mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$ ist

Fall C benutzen die Pumpstellen Teile aus beiden rs, erhalte ich $\mathtt{a}^k\mathtt{b}^*\mathtt{a}^*\mathtt{b}^k$, wobei das Mittelteil ungleich $\mathtt{b}^k\mathtt{a}^k$ ist

- in jedem der Fälle ist uv^0xy^0z nicht aus L

Abschluss von CFL

Satz 13

CFL ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation, und Kleene Stern.

- sei $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1)$ kfG für L_1 und $G_2 = (V_2, \Sigma, R_2, S_2)$ kfG für L_2 (V_1 und V_2 disjunkt)
- definiere $G_3 = (V_1 \cup V_2, \Sigma, R_3, S_3)$ mit S_3 neues Symbol und R_3 besteht aus den Regeln R_1 und R_2 plus der Regel $S_3 \to S_1 | S_2$
  $\to L(G_3) = L_1 \cup L_2$
- definiere $G_3 = (V_1 \cup V_2, \Sigma, R_3, S_3)$ mit S_3 neues Symbol und R_3 besteht aus den Regeln R_1 und R_2 plus der Regel $S_3 \to S_1 S_2$
  $\to L(G_3) = L_1 \circ L_2$
- definiere $G_3 = (V_1, \Sigma, R_3, S_3)$ mit S_3 neues Symbol und R_3 besteht aus den Regeln R_1 plus den Regeln $S_3 \to S_3 S_3 | S_1 | \varepsilon$
  $\to L(G_3) = L_1^*$

Satz 14

CFL ist nicht abgeschlossen unter Schnitt und Komplement.

- $L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^m \mid n, m \geq 0\}$, $L_2 = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n, m \geq 0\}$
- L_1 und L_2 sind kontextfrei

  Grammatik für L_1:
  $$\begin{array}{lcl} S & \to & AC \\ A & \to & \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \varepsilon \\ C & \to & \mathtt{c}C \mid \varepsilon \end{array}$$
- $L_1 \cap L_2 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$ ist bekanntlich nicht kontextfrei
- wäre CFL abgeschlossen unter Komplement würde gelten, $\forall L_1, L_2 \in \text{CFL}: \overline{\bar{L}_1 \cup \bar{L}_2} \in \text{CFL}$
- da $\overline{\bar{L}_1 \cup \bar{L}_2} = L_1 \cap L_2$ wäre CFL dann abgeschlossen unter Schnitt $\to$ Widerspruch

Erinnerung Vorlesungsübersicht

1. Reguläre Sprachen
    - endliche Automaten
    - Nichtdeterminismus
    - reguläre Ausdrücke
2. Kontext-freie Sprachen
    - Grammatiken
    - Kellerautomaten
3. Berechenbarkeitstheorie
    - Turingmaschinen
    - Unentscheidbarkeit
4. Komplexitätstheorie
    - P und NP
    - NP-vollständige Problem

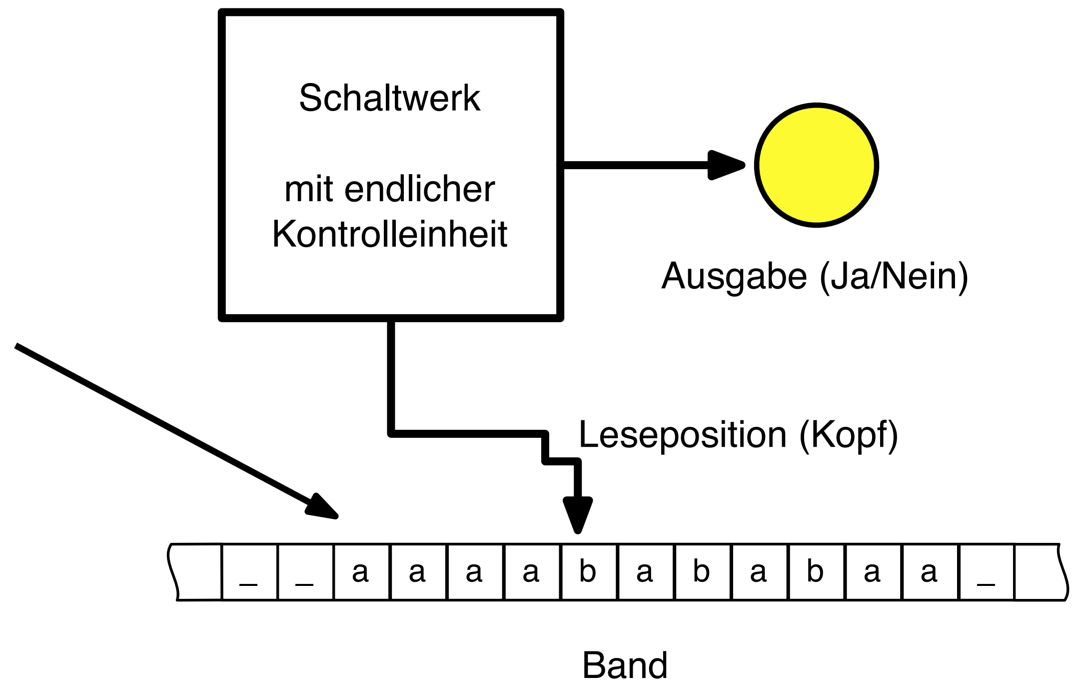
3. Kapitel

Berechenbarkeitstheorie

Turingmaschinen

- **Ziel:** starkes Berechnungsmodell, welches die Arbeitsweise eines idealisierten *Computers* nachbildet
- eingeführt 1936 von Alan Turing

Kopf kann auf dem unbeschränktem Schreib-Lese-Band frei nach links und rechts bewegt werden werden (in 1er Schritten)



- Übergänge vom Zeichen an Kopfposition abhängig

Definition

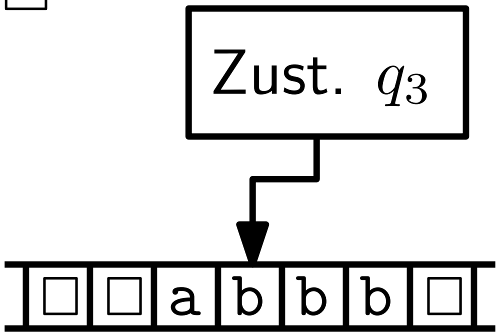
Eine **Turingmachine (TM)** ist ein 7-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_V)$, mit:

- der Zustandsmenge Q,
- dem Eingabealphabet Σ, dem Arbeitsalphabet Γ,
- der Übergangsfunktion $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$,
- $q_0, q_A, q_V \in Q$ mit $q_A \neq q_V$.

Konfiguration einer TM

- Konfiguration $=$ Bandinhalt $+$ Kopfposition $+$ aktueller Zustand
- Bandinhalt $=$ **beschriebene Zeichen** des Bandes$=$ endliches Wort
- Default Symbol des Bandes heißt Blank-Symbol, $\square$
- Schreibweise für Konfigurationen: $w_1 q w_2$
  $\rightarrow$ Bandinhalt $w_1 w_2$, Kopf hinter w_1, Zustand q

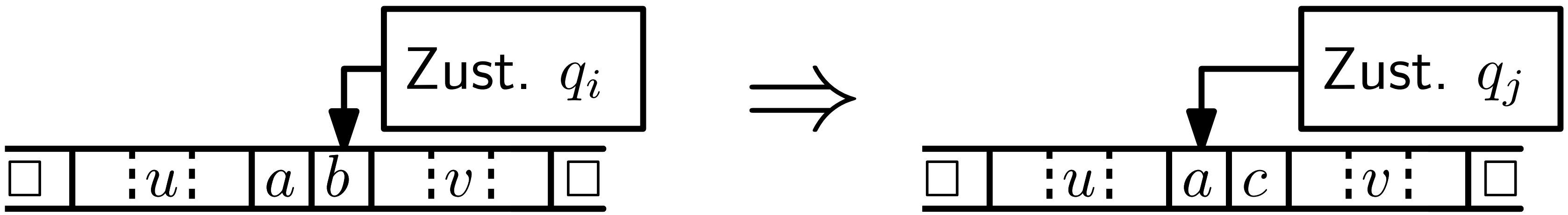
Beispiel: a$q_3$bbb



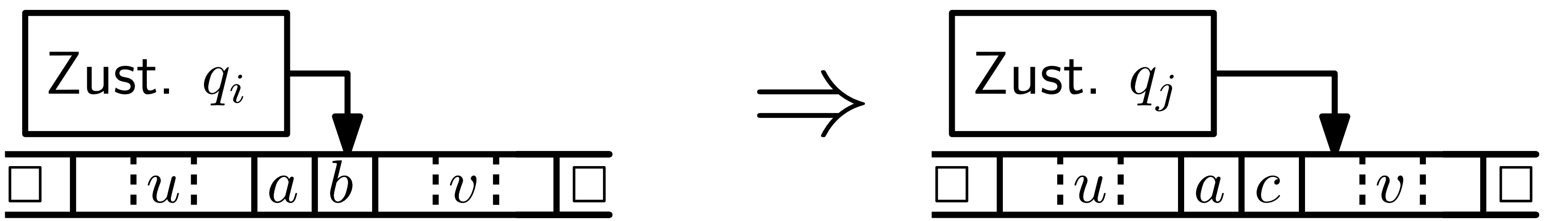
Überführung von Konfigurationen

Sei $u, v \in \Gamma^*$ und $a, b, c \in \Gamma$, sowie $q_i, q_j \in Q$

① $ua\, q_i\, bv$ geht über nach $u\, q_j\, acv$, gdw.
$\delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$



② $ua\, q_i\, bv$ geht über nach $uac\, q_j\, v$, gdw.
$\delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$



③ $u\, q_A v$ heißt akzeptierend, $u\, q_V v$ verwerfend, und $q_0\, w$ Startkonfiguration (für Eingabe w)

Akzeptanz bei Turingmaschinen

Definition

Eine Turingmaschine M **akzeptiert ein Wort** $w \in \Sigma^*$ genau dann wenn eine Folge von nicht-verwerfenden Konfigurationen $C_1, \ldots, C_n$ existiert mit:

Lauf der TM

1. $C_1 = q_0\, w$ (Startkonfiguration)
2. $\forall i = 1, \ldots, n-1$: C_i geht über nach C_{i+1}
3. C_n akzeptierend

Def.:

Eine TM M **erkennt** die Sprache $\{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$

2 Möglichkeiten für Nichtakzeptanz

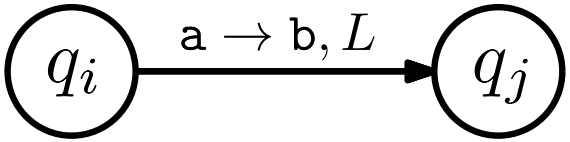
① Lauf führt zu einer Konfiguration mit q_V

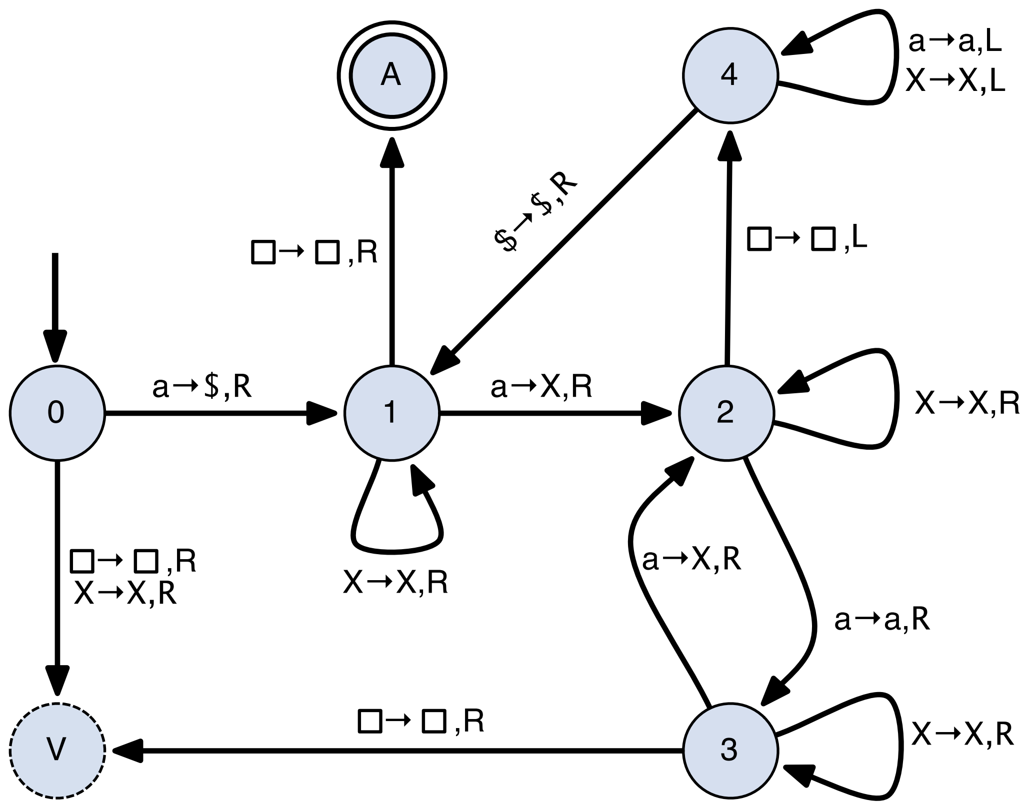
② Lauf erreicht weder q_V noch q_A
(M stoppt nicht)

Beispiel $L = \{\mathtt{a}^{2^n} \in \{\mathtt{a}\}^* \mid n \geq 0\}$

- **Idee:** k ist 2er-Potenz ungleich 1 $\iff$ $k/2$ ist 2er-Potenz
- Kann ich die Eingabe wiederholt halbieren?
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_A, q_V\}, \Gamma = \{\mathtt{a}, \mathtt{X}, \$, \square\}$
- Angabe von δ in Diagrammform

$\delta(q_i, \mathtt{a}) = (q_j, \mathtt{b}, L)$





1. Markiere Anfang durch \$ q_0
2. war das das einzige Zeichen, dann akzeptiere q_1
3. lösche jedes 2. a auf dem Band q_2, q_3
   3.1. bei Misserfolg (ungerade Anzahl) verwerfe
   3.2. bei Erfolg (gerade Anzahl) gehe zum \$ nach links q_4
4. Goto 2.

Angabe von TM Programmen

① Diagrammform

- Programm wird präzise angegben
- Spezifikation von Q und Γ
- Übergangsfunktion δ wird in Diagrammform angegeben
- Fehlende Übergänge im Diagramm würden nach q_V überführen

② Modulbeschreibung

- Programm wird verbal beschrieben
- Abfolge von Modulen (=Befehlssequenzen)
- Module sind problemlos als TM-Teilprogramm formulierbar
- Bsp.:
  Gehe ans Ende des Bandes links und ersetze jede zweite 1 durch eine 0
- Bsp.:
  Merke das aktuelle Zeichen im Zustand, gehe bis zum ersten \$ nach rechts und ersetze \$ durch das gemerkte Zeichen