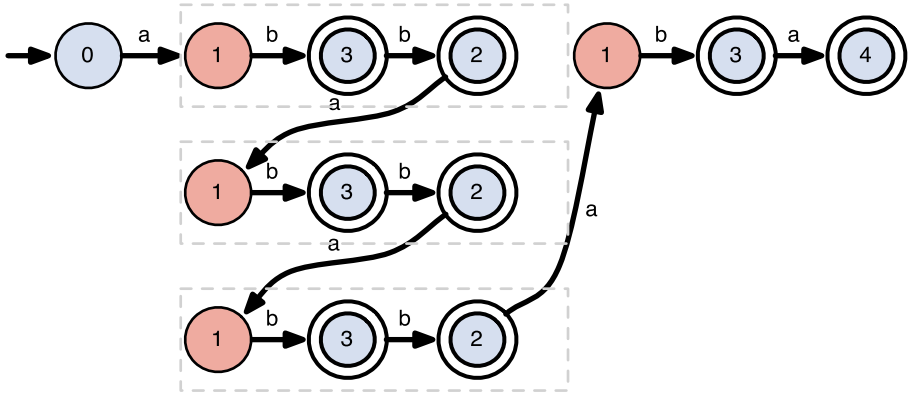
# Berechenbarkeitstheorie

13. Vorlesung




Dr. Franziska Jahnke
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster

# Nichtdeterministische TM (NTM) [2]



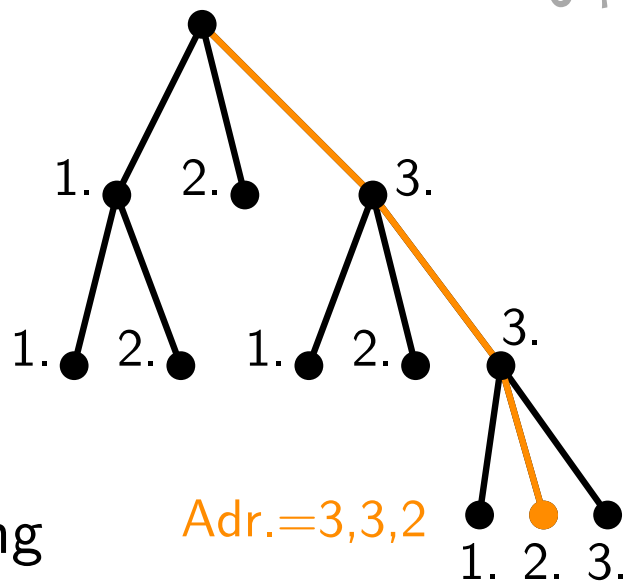
- TM definiert wie bisher, bis auf
  $\delta \colon Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$
- **Def. Berechnungsbaum:**
  - Baum dessen Knoten mit Konfigurationen beschriftet sind
  - Wurzel = Startkonfiguration
  - Blätter = akz./verwerfende Konfigurationen
  - Kinder eines Knotens mit Beschriftung $C$ sind mit den Folgekonfigurationen von $C$ beschriftet
- Berechnungsbaum nicht notwendiger Weise endlich
- Berechnungsbaum hängt von TM **und** Eingabe ab
- Lauf=Wurzel-Blatt Pfad im Berechnungsbaum
  bei (det.) TM sprechen wir von einem Berechnungspfad

## Satz 16

Jede NTM kann durch eine herkömmliche TM simuliert werden.

## Beweis

- Durchsuche den Berechnungsbaum nach akz. Konfiguration
- **Breitensuche**, da Baum unendliche Pfade haben kann
- Ordne die ausgehenden Kanten (z.B. lexikographisch nach Folgekonfiguration)
- Adresse eines Knotens = Alternativen auf seinem Pfad
- Zähle auf einem speziellem Band der TM, alle Adressen der Länge nach auf (Details folgen)
- Simuliere auf einem anderem Band den Übergang zur Konfiguration der angegebenen Adresse
- Akzeptiere, wenn die berechnete Konf. akzeptierend, sonst weiter mit nächster Adresse




□

# TM mit Ausgabe



- TM $M$ wie bisher mit einem besonderem Band, dem Ausgabeband
- Ausgabeband ist nur beschriebbar
- Kopf des Ausgabebandes bewegt sich nur nach einem Schreibevorgang einen Schritt nach rechts, bleibt ansonsten stehen
- $M$ beschreibt folgende Funktion:

$$f_M(x) := y, \text{ mit } M(\langle x \rangle) \text{ stoppt akzeptierend und auf dem Ausgabeband steht } \langle y \rangle$$

- verwirft $M$ oder stoppt $M$ nicht, dann ist die Funktion $f_M$ für diese Eingabe undefiniert

# Berechenbare Funktionen



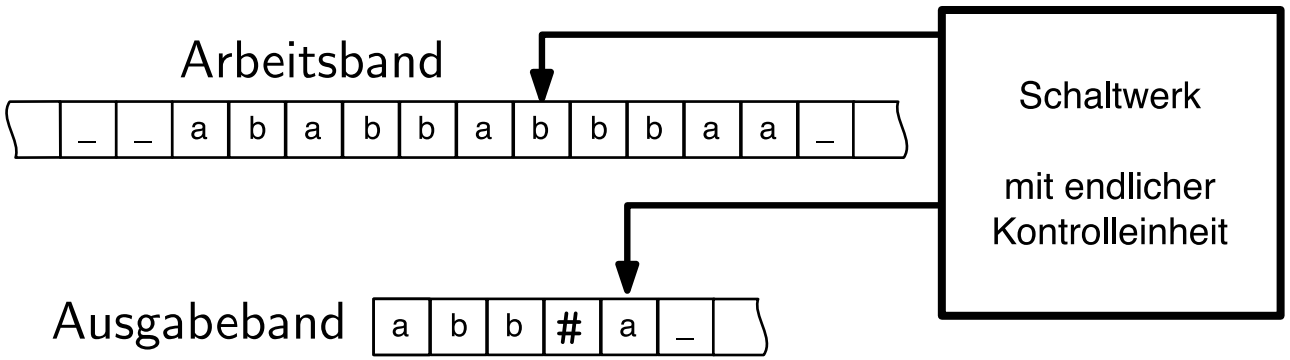
**Definition**

Eine Funktion $f$ heißt **berechenbar**, gdw. es eine TM $M$ gibt mit $f_M \equiv f$.

- Beispiel einer berechenbaren Funktion:
  $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ und $f(x) = 2^x$
  (Turingmaschine die $\{\mathsf{a}^{2^n} \mid n \geq 0\}$ erkennt kann entsprechend abgewandelt werden)
- Rechtseindeutige Relationen heißen auch **partielle** Funktionen.
- In diesem Sinne beschreibt jede TM eine partielle Funktion.
- Um Hervorzuheben, dass eine partielle Funktion überall definiert ist, nennen wir solche Funktionen **total**.

# TM als Aufzähler

- ein **Aufzähler für** $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine 2-Band TM mit einem Ausgabeband und einem Arbeitsband




- Ausgabeband nicht lesbar, nach jedem Zugriff bewegt sich Kopf einen Schritt nach rechts, bleibt sonst stehen
- TM schreibt auf das Ausgabeband $w_1\#w_2\#w_3\cdots$, wobei $\# \notin \Sigma$ und $L = \bigcup_i w_i$
- Achtung: Wiederholungen der Wörter aus $L$ erlaubt
- Sprachen, für die es einen Aufzähler gibt, heißen **aufzählbar**

# Beispiel $L = \Sigma^* = \{0,1\}^*$

- Ausgabeband soll #0#1#00#01#10# ... enthalten
- Ablauf: Zähle zuerst $\Sigma^0$ auf, dann $\Sigma^1$, $\Sigma^2$, usw.
- Modul A: Zähle $\Sigma^i$ auf (Eingabe Arbeitsband $0^i$)
  1. Kopiere Arbeitsband+ # auf Ausgabe
  2. Wenn auf Arbeitsband $1^*$ steht, verlasse Modul
  3. Addiere+1 auf Binärzahl auf Arbeitsband
  4. Gehe zu 1.
- Modul: Addiere +1
  1. Gehe nach rechts
  2. Wenn Kopf auf 1 ersetze 1 durch 0, gehe einen Schritt nach links und wiederhole 2.
  3. Wenn 0 ersetze 0 durch 1 und stoppe Modul
- Hauptmodul:
  1. Schreibe #0#1# auf das Ausgabe- und 1 aufs Arbeitsband
  2. Ersetze alle 1en durch 0en plus Extra-0
  3. Führe Modul A aus, dann wiederhole ab 2.

## Satz 17

$L$ ist aufzählbar $\iff$ $L$ ist erkennbar

### Beweis

**1. Teil** $L$ ist aufzählbar $\Rightarrow$ $L$ ist erkennbar

- Sein $A$ ein Aufzähler für $L$
- Wir konstruieren TM $M$, welche $L$ erkennt (d.h. alle $w \in L$ werden akzeptiert)
- $M$ simuliert $A$ auf zwei Extra-Bändern (Unterprogramm)
- Falls ein $\#$ aufs Ausgabeband geschrieben wurde, vergleiche Wort zwischen den letzten beiden $\#$ mit der Eingabe
- Falls beide Wörter identisch sind, folgt dass $w \in L$, dann akzeptiere
- Ansonsten fahre mit Simulation von $A$ fort
- $M(w)$ zykelt für alle $w \notin L$, aber das ist erlaubt

**2. Teil** $L$ ist erkennbar $\Rightarrow$ $L$ ist aufzählbar

- Sei $M$ TM die $L$ erkennt, wir konstruieren Aufzähler $A$ für $L$
- Zähle $\Sigma^*$ als $s_1\#s_2\#s_3\#\ldots$ auf Extra-Band auf (mittels Aufzähler, so weit wie es benötigt wird)

**Algorithm 3:** Aufzähler für $L$

```
1 for i = 1 to ∞ do
2 |   for j = 1 to i do
3 |   |   Simuliere M(s_j) i Schritte lang;
4 |   |   Bei Erfolg schreibe s_j# aufs Ausgabeband;
5 |   end
6 end
```

- Algorithmus kann mittels Mehrspurtechnik auf einem Arbeits- und Ausgabeband realisiert werden
- alle $s_j \in L$ werden ab einem bestimmten $i$ erkannt, und erscheinen dann auf dem Ausgabeband
- $s_j \notin L$ wird nie ausgegeben $\square$

# Die Church-Turing-These





- **Frage:** Was ist eine sinnvolle Definition für den Begriff *berechenbar*
- 1900 formulierte D. Hilbert auf dem 2. Mathematischen Kongress in Paris 23 offene Probleme
- **10. Problem:** Finde ein Verfahren das feststellt ob ein Polynom eine ganzzahlige Nullstelle hat? (Lösung von Diophantischen Gleichungen)
- konkret fragte Hilbert:

  > *... Verfahren angeben, nach welchem sich mittelst einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*

- In der heutigen Terminologie fragt Hilbert nach der Existenz eines Algorithmus (endliche Folge von elementaren Befehlen).
- Was heißt "Folge von elementaren Befehlen" genau?

## Church-Turing-These

Wir verstehen unter (intuitiv) berechenbar alle die Funktionen die eine Turingmaschine berechnen kann.

### Rechtfertigung

- es gibt sehr viele alternative Berechnungsmodelle die zur TM äquivalent sind (Registermaschine, $\lambda$-Kalkül, $\mu$-rekursive Funktionen, ... )
- jede Art von sinnvollen Pseudocode kann in ein TM-Programm überführt werden
- TM äquivalente Berechnungsmodelle brauchen nur sehr einfache Annahmen: ihre endlichen Operationen können zuverlässig, wiederholbar und verifizierbar durchgeführt werden

  ↳ gestützt durch die physikalische Wahrnehmung von maschinellem Rechnen
- Anmerkung: Hilberts 10. Problem wurde 1970 von Matiyasevich negativ beantwortet

# Abzählbarkeit

- zwei Mengen heißen **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt

**Definition**

Eine Menge $X$ heißt **abzählbar**, gdw.

1. $X$ ist endlich, oder
2. $X$ und die natürlichen Zahlen sind gleichmächtig.

**Beispiel 1:** $\mathbf{Z}$ ist abzählbar

- wir müssen eine Bijektion zwischen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{Z}$ finden:

$$f(x) := \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ |2x| - 1 & x < 0 \end{cases}$$

- $f(0) = 0, f(-1) = 1, f(1) = 2, f(-2) = 3, \ldots$
- $f$ ist Bijektion

**Beispiel 2:** $\mathbf{N} \setminus \{0\}$ ist abzählbar

$f(x) := x - 1$ ist Bijektion zwischen $\mathbf{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbf{N}$

**Beispiel 3:** $\{0,1\}^*$ ist abzählbar

Gleichmächtigkeit ist transitiv, deshalb genügt es Bijektion $f : \{0,1\}^* \to \mathbf{N} \setminus \{0\}$ zu finden

$f(w) := \text{bin}(1 \circ w)$ Wert des $\{0,1\}^*$ Wortes als Binärzahl

**Beispiel 4:** $\mathbf{Q}_+$ ist abzählbar

Erster Schritt: Ordne alle Brüche in Tabelle $T$ an

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | ... |
| 2 | 2/1 | 2/2 | 2/3 | 2/4 | |
| 3 | 3/1 | 3/2 | 3/3 | 3/4 | |
| | ⋮ | | | | |

**Gegendiagonale** $k$**:** alle Zellen $T[i,j]$ mit $i + j = k$

**Idee:** Nummeriere alle Gegendiagonalen in aufsteigender Reihenfolge

- Konstruiere Liste $L$ wie folgt

  $L = \emptyset$
  **for** $i = 2$ **to** $\infty$
  Füge Gegendiagonale $i$ zu $L$ hinzu
  **endfor**

- $L = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \ldots$
- Konstruiere $L'$ von $L$ durch das Streichen doppelter Einträge
- $L' = \{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, 5, \ldots$
- Bijektion: $f : \mathbf{N} \setminus \{0\} \to \mathbf{Q}_+$ sei definiert als:
  $f(i) :=$ $i$ter Eintrag in $L'$
- Die Idee dieser Nummerierung stammt von Georg Cantor, und heißt deshalb **Cantor-Nummerierung**

# Beispiel einer nicht-abzählbaren Menge



- wir bezeichnen die Menge der Funktionen $f\colon X \to Y$ als $Y^X$

**Satz 18**

Die Menge $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ ist nicht abzählbar.

## Beweis

- **Technik:** Diagonalisierung
- wir verstehen $f \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ als abzählbare Folge von 0en und 1en
  $$f \mathrel{\widehat{=}} (0,0,1,1,0,0,1,0,1,\ldots$$
- wir nehmen an, dass $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ abzählbar ist, das heißt, es gibt für jedes $i \in \mathbf{N}$ genau eine Funktion $f_i \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$
- **wir wollen zeigen:** egal wie diese Bijektion aussieht wir finden immer ein $g \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$, welches in der Aufzählung fehlt
- **Idee:** für jede Aufzählung, konstruiere ein solches $g$, dass sich von den $f_i$ unterscheidet
- für $f_i \not\equiv g$ reicht es, dass $f$ und $g$ sich an einer Stelle unterscheiden

- Zeichne alle $f_i$ in eine Tabelle ein

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_0$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| $f_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| $f_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| $f_3$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| $\vdots$ | | | | | $\vdots$ | | | | |
| $g$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |

- Konstruiere für $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ folgende Funktion

$$g(x) := \begin{cases} 1, \text{falls } f_x(x) = 0 \\ 0, \text{falls } f_x(x) = 1 \end{cases}$$

- $\forall i$: $g$ unterscheidet sich von $f_i$ an der Stelle $i$ $(f_i(i) \neq g(i))$
- $g$ fehlt in der Aufzählung der $f_i$, $g$ ist aber eine Funktion $\{0,1\}^* \to \mathbf{N}$
- es gibt keine Aufzählung der Funktionen $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$, und somit ist diese Menge **überabzählbar**

□

**Korollar**

Die Menge der Funktionen $\{0,1\}^* \to \{0,1\}$ ist überabzählbar.

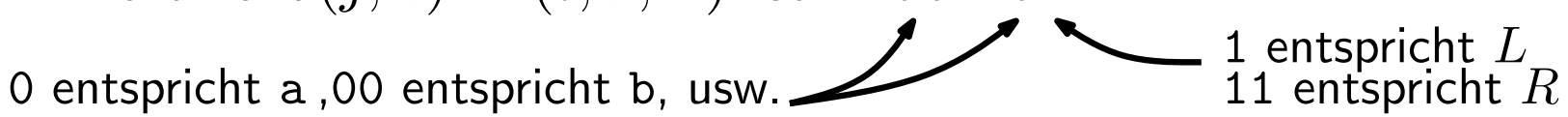
**Begründung :** Da es eine Bijektion zwischen $\mathbf{N}$ und $\{0,1\}^*$ gibt, wäre sonst auch $\{f \mid f : \mathbf{N} \to \{0,1\}\}$ abzählbar.

**Satz 19**

Es gibt eine Sprache, die nicht erkennbar ist.

**Vorüberlegung :**

- eine TM kann durch einen endliches Wort kodiert werden
  - Nummeriere alle Zustände von $q_0, q_1, \ldots q_k$, notiere $k$
  - $q_A = q_x$ und $q_V = q_y$
  - Kodiere jeden Zustandsübergang $\delta$ durch ein Wort $z_i$ und verkette diese Wörter $z = z_1 \# z_2 \# z_3 \cdots$
  - Wort zu $\delta(j, \mathtt{b}) = (i, \mathtt{a}, L)$ ist $1^j 0 0 1 1^i 0 1$




  - Kodierung $\langle T \rangle$ ist Binärkodierung von $1^k 0^x 1^y \# z$ (Turingwort)

- jedem Wort über $\{0,1\}$ kann eine TM zugewiesen werden

$$T_w := \begin{cases} \text{TM für Turingwort } w & \text{, falls } w \text{ Kodierung für TM} \\ \text{alles verwerfende TM} & \text{, sonst} \end{cases}$$

- jede TM erscheint als Kodierung $T_w$ für ein Wort $w$

**Beweis Satz 19:**

- $\mathcal{M} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist TM }\} = \{0,1\}^*$ ist abzählbar
  $\rightarrow \mathbb{A} = \{L(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$ abzählbar
- $\mathcal{L} = \{L \subseteq \{0,1\}^*\}$ ist die Menge aller Sprachen über $\{0,1\}$
- charakteristische Funktion zu $L \in \mathcal{L}$ : $\chi_L(w) = \begin{cases} 0 & w \notin L \\ 1 & w \in L \end{cases}$
- 1-1 Beziehung zwischen charakteristischen Funktionen und $\mathcal{L}$
- Menge der charakteristischen Funktionen ist $\{0,1\}^{\{0,1\}^*}$
  $\rightarrow$ überabzählbar $\rightarrow$ $\mathcal{L}$ ist überabzählbar
- es gibt "mehr" Sprachen als Turingmaschinen, mindestens eine Sprache wird nicht erkannt

□