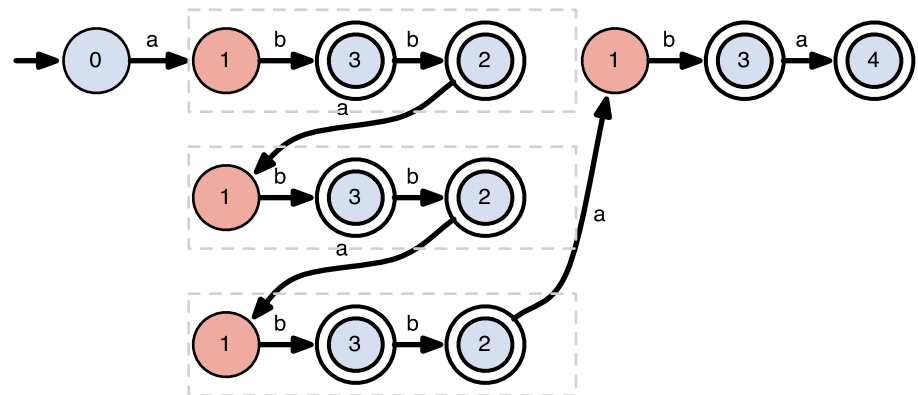


Berechenbarkeitstheorie

14. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke

Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung

WWU Münster

Erinnerung - Abzählbarkeit

2

- zwei Mengen heißen **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt

Definition

Eine Menge X heißt **abzählbar**, gdw.

1. X ist endlich, oder
2. X und die natürlichen Zahlen sind gleichmächtig.

Beispiel: $\{0, 1\}^*$ ist abzählbar.

- wir bezeichnen die Menge der Funktionen $f: X \rightarrow Y$ als Y^X

Satz 18

Die Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist nicht abzählbar.

- **Idee:** Diagonalisierung

Korollar

Die Menge der Funktionen $\{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$ ist überabzählbar.


Begründung : Da es eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und $\{0, 1\}^*$ gibt, wäre sonst auch $\{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$ abzählbar.

Satz 19

Es gibt eine Sprache, die nicht erkennbar ist.

Vorüberlegung :

- eine TM kann durch ein endliches Wort kodiert werden
 - Nummeriere alle Zustände von q_0, q_1, \dots, q_k , notiere k
 - $q_A = q_x$ und $q_V = q_y$
 - Kodiere jeden Zustandsübergang δ durch ein Wort z_i und verkette diese Wörter $z = z_1 \# z_2 \# z_3 \dots$
 - Wort zu $\delta(j, b) = (i, a, L)$ ist $1^j 001^i 01$

0 entspricht a, 00 entspricht b, usw. 
 - Kodierung $\langle T \rangle$ ist Binärkodierung von $1^k 0^x 1^y \# z$ (Turingwort)

- jedem Wort über $\{0, 1\}$ kann eine TM zugewiesen werden 4

$$T_w := \begin{cases} \text{TM für Turingwort } w & , \text{ falls } w \text{ Kodierung für TM} \\ \text{alles verwerfende TM} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

- jede TM erscheint als Kodierung T_w für ein Wort w

Beweis Satz 19:

- $\mathcal{M} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist TM}\} = \{0, 1\}^*$ ist abzählbar
 $\rightarrow \mathbb{A} = \{L(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$ abzählbar
- $\mathcal{L} = \{L \subseteq \{0, 1\}^*\}$ ist die Menge aller Sprachen über $\{0, 1\}$
- charakteristische Funktion zu $L \in \mathcal{L} : \chi_L(w) = \begin{cases} 0 & w \notin L \\ 1 & w \in L \end{cases}$
- 1-1 Beziehung zwischen charakteristischen Funktionen und \mathcal{L}
- Menge der charakteristischen Funktionen ist $\{0, 1\}^{\{0, 1\}^*}$
 \rightarrow überabzählbar $\rightarrow \mathcal{L}$ ist überabzählbar
- es gibt "mehr" Sprachen als Turingmaschinen, mindestens eine Sprache wird nicht erkannt □

- wir können jeder TM ein Wort über $\{0, 1\}^*$ eindeutig zuordnen
- also gibt es nur abzählbar viele TM, und auch nur abzählbar viele Sprachen die von TM erkannt werden
- es gibt aber überabzählbar viel Funktionen von $\{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$

	ε	0	1	00	01	10	11	000	
f_0	0	1	0	0	0	1	1	1	
f_1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
f_2	0	0	0	1	0	0	1	1	
f_3	1	1	0	1	0	0	0	1	
\vdots					\vdots				
g	1	1	1	0	0	1	0	1	

- diese Funktionen kodieren (bijektiv) Sprachen über $\{0, 1\}$
- es gibt mehr Sprachen als erkennbare Sprachen, also gibt es Sprachen die nicht erkennbar sind

- gesucht ist TM U , die andere TM simulieren kann
- $U(\langle M, w \rangle)$ soll genau dann akzeptieren, wenn $M(w)$ akzeptiert

Aufbau von U

- U besitzt Simulationband, welches die aktuelle Konfiguration von M enthält
- Befehle werden auf einem Befehlsband dekodiert (als Sequenz)

Simulation eines Schrittes von $M(w)$

- suche auf dem Befehlsband nach einem ausführbaren Befehl
- Modifiziere entsprechend des Befehls das Simulationsband (ersetzen durch Folgekonfiguration)

Programm von U

- Schreibe Startkonfiguration aufs Simulationsband
- Simuliere einen Schritt von $M(w)$
- Wiederhole, bis eine akzeptierende oder verwerfende Konfiguration vorliegt

Satz 20

Die Sprache $A_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \text{ akzeptiert}\}$ ist **nicht entscheidbar**.

Beweis

Angenommen $A_{\text{TM}} \in \mathbb{E}$, dann existiert für A_{TM} ein Entscheider H .

$$H(\langle M, w \rangle) = \begin{cases} \text{akzeptiert} & M \text{ akzeptiert } w \\ \text{verwirft} & M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht} \end{cases}$$

Wir konstruieren die Diagonalisierungsmaschine $D(\langle M \rangle)$ wie folgt:

1. D simuliert $H(\langle M, \langle M \rangle \rangle)$
2. D gibt das entgegengesetzte Ergebnis der Simulation zurück

$$\text{Also: } D(\langle M \rangle) = \begin{cases} \text{akzeptiert} & \text{wenn } M(\langle M \rangle) \text{ verwirft} \\ \text{verwirft} & \text{wenn } M(\langle M \rangle) \text{ akzeptiert} \end{cases}$$

$$\text{D.h.: } D(\langle D \rangle) = \begin{cases} \text{akzeptiert} & \text{wenn } D(\langle D \rangle) \text{ verwirft} \\ \text{verwirft} & \text{wenn } D(\langle D \rangle) \text{ akzeptiert} \end{cases}$$

→ Widerspruch, D , und somit H kann nicht existieren

Wir benutzen das Prinzip der Diagonalisierung

Aufzählung der TM	$\langle T_1 \rangle$	$\langle T_2 \rangle$	$\langle T_3 \rangle$	$\langle T_4 \rangle$	$\langle T_5 \rangle$	$\langle T_6 \rangle$	$\langle T_7 \rangle$	$\langle T_8 \rangle$	
T_1	A	A	A	A	A	V	V	V	
T_2	A	V	V	V	A	A	V	V	
T_3	A	A	A	V	A	A	V	V	...
T_4	V	V	A	V	A	A	A	V	
$H(\langle M, \langle M \rangle \rangle)$	A	V	A	V	V	A	A	V	
$D(\langle M \rangle)$	V	A	V	A	A	V	V	A	

- D anti-simuliert H
- D kann nicht in der Aufzählung der T_i enthalten sein
- Antisimulation funktioniert nur, wenn H ein Entscheider ist

Definition

Sei \mathcal{L} eine Menge von Sprachen über dem Alphabet Σ , dann bezeichnen wir mit \mathcal{L}^{co} die Menge der Komplementsprachen aus \mathcal{L} . Also

$$\mathcal{L}^{\text{co}} := \{\bar{L} \mid L \in \mathcal{L}\}$$

mit $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$.

- Achtung: im Allgemeinen gilt $\mathcal{L}^{\text{co}} \neq \bar{\mathcal{L}}$
- Beispiel: die co-regulären Sprachen $\text{REG}^{\text{co}} \rightarrow \text{REG}^{\text{co}} = \text{REG}$
- \mathbb{A}^{co} die Menge der co-aufzählbaren Sprachen

Satz 21

$$\mathbb{E} = \mathbb{A} \cap \mathbb{A}^{\text{co}}$$

Vorüberlegung zum Beweis: \mathbb{E} ist abgeschlossen unter Komplement

- $L \in \mathbb{E} \Rightarrow$ es gibt einen Entscheider M_L für L
- Tausch von q_A und q_V gibt Entscheider für $\bar{L} \rightarrow \bar{L} \in \mathbb{E}$

Beweis $\mathbb{E} = \mathbb{A} \cap \mathbb{A}^{\text{co}}$:**1. Teil** $L \in \mathbb{E} \Rightarrow L \in \mathbb{A} \cap \mathbb{A}^{\text{co}}$

- Wenn $L \in \mathbb{E}$, dann erkennt der Entscheider zu L die Sprache L , also $L \in \mathbb{A}$.
- Wenn $L \in \mathbb{E}$, dann $\bar{L} \in \mathbb{E}$ und der Entscheider zu \bar{L} erkennt \bar{L} , also $\bar{L} \in \mathbb{A}$ und somit $L \in \mathbb{A}^{\text{co}}$.
- $L \in \mathbb{A} \cap \mathbb{A}^{\text{co}}$

2. Teil $L \in \mathbb{A} \cap \mathbb{A}^{\text{co}} \Rightarrow L \in \mathbb{E}$

- Sei M eine TM die L erkennt und \bar{M} eine Turingmaschine die \bar{L} erkennt
- Baue neue TM M' , die abwechselnd bei Eingabe w , jeweils $M(w)$ und $\bar{M}(w)$ einen Schritt simuliert
- Akzeptiere, wenn $M(w)$ akzeptiert.
- Verwerfe, wenn $\bar{M}(w)$ akzeptiert.
- $M(w)$ oder $\bar{M}(w)$ muss akzeptieren $\rightarrow M'$ ist Entscheider
- $L \in \mathbb{E}$



Satz 22

$$\overline{A_{\text{TM}}} \notin \mathbb{A}$$

($A_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \text{ akzeptiert}\} \notin \mathbb{E}$)

Beweis

Die Sprache A_{TM} ist erkennbar ($A \in \mathbb{A}$), durch folgende TM: **(UTM)**

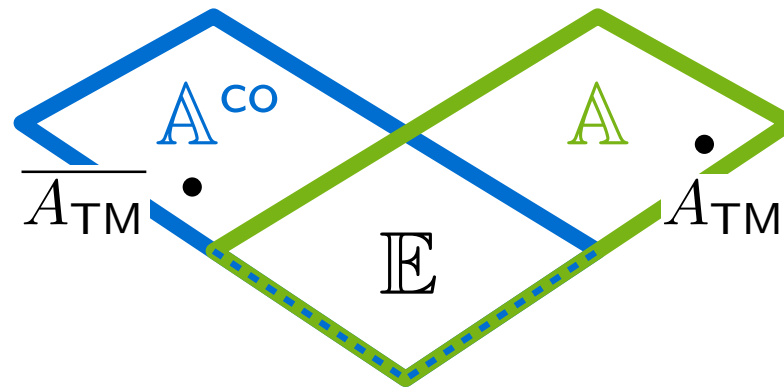
- bei Eingabe $\langle M, w \rangle$ simuliere $M(w)$
- stoppt die Simulation, gib das Ergebnis der Simulation weiter
→ alle Eingaben $\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}}$ werden akzeptiert

Nach Satz 20 ist jedoch A_{TM} nicht entscheidbar

Da nach Satz 21: $\mathbb{E} = \mathbb{A} \cap \mathbb{A}^{\text{co}}$, folgt dass $A_{\text{TM}} \notin \mathbb{A}^{\text{co}}$.

Also: $\overline{A_{\text{TM}}} \notin \mathbb{A}$.

□



- wir haben bereits die Nichtentscheidbarkeit einer Sprache durch Diagonalisierung gezeigt
- Idee lässt sich abwandeln, z.B. für $\text{HALT} := \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$

	1	2	3	4
T_1	↑	↓	↓	↓
T_2	↓	↓	↓	↑
T_3	↓	↑	↓	↓
T_4	↓	↓	↓	↓
D	↓	↑	↑	↑

Falls $\text{HALT} \in \mathbb{E}$ kann ich eine Diagonalisierungsmaschine D bauen

1. entscheide ob Eingabe $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ aus HALT
2. Wenn ja, gehe in Endlosschleife, wenn nein stoppe

- D kann nicht existieren \rightarrow HALT ist nicht entscheidbar
- gleiche Konstruktion zeigt, dass $\text{SHALT} = \{x \mid M_x(x) \downarrow\} \notin \mathbb{E}$
(denn für die Diagonalisierung muss ich nur wissen ob $M_x(x) \uparrow$ oder $M_x(x) \downarrow$)
- **Gesucht:** Methode zum Transfer dieser Ergebnisse