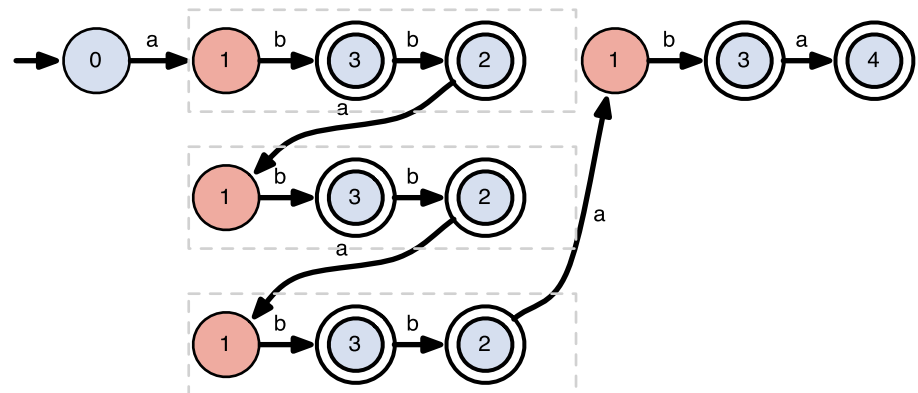


Berechenbarkeitstheorie

15. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke

Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung

WWU Münster

Reduktionen

2

15. Vorlesung

Reduktionen

2

- wir haben bereits die Nichtentscheidbarkeit einer Sprache durch Diagonalisierung gezeigt

- wir haben bereits die Nichtentscheidbarkeit einer Sprache durch Diagonalisierung gezeigt
- Idee lässt sich abwandeln, z.B. für $\text{HALT} := \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$

- wir haben bereits die Nichtentscheidbarkeit einer Sprache durch Diagonalisierung gezeigt
- Idee lässt sich abwandeln, z.B. für $\text{HALT} := \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$

	1	2	3	4
T_1	↑	↓	↓	↓
T_2	↓	↓	↓	↑
T_3	↓	↑	↓	↓
T_4	↓	↓	↓	↓

- wir haben bereits die Nichtentscheidbarkeit einer Sprache durch Diagonalisierung gezeigt
- Idee lässt sich abwandeln, z.B. für $\text{HALT} := \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$

	1	2	3	4
T_1	↑	↓	↓	↓
T_2	↓	↓	↓	↑
T_3	↓	↑	↓	↓
T_4	↓	↓	↓	↓

Falls $\text{HALT} \in \mathbb{E}$ kann ich eine Diagonalisierungsmaschine D bauen

1. entscheide ob Eingabe $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ aus HALT
2. Wenn ja, gehe in Endlosschleife, wenn nein stoppe

- wir haben bereits die Nichtentscheidbarkeit einer Sprache durch Diagonalisierung gezeigt
- Idee lässt sich abwandeln, z.B. für $\text{HALT} := \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$

	1	2	3	4
T_1	↑	↓	↓	↓
T_2	↓	↓	↓	↑
T_3	↓	↑	↓	↓
T_4	↓	↓	↓	↓
D	↓	↑	↑	↑

Falls $\text{HALT} \in \mathbb{E}$ kann ich eine Diagonalisierungsmaschine D bauen

1. entscheide ob Eingabe $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ aus HALT
2. Wenn ja, gehe in Endlosschleife, wenn nein stoppe

- wir haben bereits die Nichtentscheidbarkeit einer Sprache durch Diagonalisierung gezeigt
- Idee lässt sich abwandeln, z.B. für $\text{HALT} := \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$

	1	2	3	4
T_1	↑	↓	↓	↓
T_2	↓	↓	↓	↑
T_3	↓	↑	↓	↓
T_4	↓	↓	↓	↓
D	↓	↑	↑	↑

Falls $\text{HALT} \in \mathbb{E}$ kann ich eine Diagonalisierungsmaschine D bauen

1. entscheide ob Eingabe $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ aus HALT
2. Wenn ja, gehe in Endlosschleife, wenn nein stoppe

- D kann nicht existieren \rightarrow HALT ist nicht entscheidbar

- wir haben bereits die Nichtentscheidbarkeit einer Sprache durch Diagonalisierung gezeigt
- Idee lässt sich abwandeln, z.B. für $\text{HALT} := \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$

	1	2	3	4
T_1	↑	↓	↓	↓
T_2	↓	↓	↓	↑
T_3	↓	↑	↓	↓
T_4	↓	↓	↓	↓
D	↓	↑	↑	↑

Falls $\text{HALT} \in \mathbb{E}$ kann ich eine Diagonalisierungsmaschine D bauen

1. entscheide ob Eingabe $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ aus HALT
2. Wenn ja, gehe in Endlosschleife, wenn nein stoppe

- D kann nicht existieren \rightarrow HALT ist nicht entscheidbar
- gleiche Konstruktion zeigt, dass $\text{SHALT} = \{x \mid M_x(x) \downarrow\} \notin \mathbb{E}$

- wir haben bereits die Nichtentscheidbarkeit einer Sprache durch Diagonalisierung gezeigt
- Idee lässt sich abwandeln, z.B. für $\text{HALT} := \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$

	1	2	3	4
T_1	↑	↓	↓	↓
T_2	↓	↓	↓	↑
T_3	↓	↑	↓	↓
T_4	↓	↓	↓	↓
D	↓	↑	↑	↑

Falls $\text{HALT} \in \mathbb{E}$ kann ich eine Diagonalisierungsmaschine D bauen

1. entscheide ob Eingabe $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ aus HALT
2. Wenn ja, gehe in Endlosschleife, wenn nein stoppe

- D kann nicht existieren \rightarrow HALT ist nicht entscheidbar
- gleiche Konstruktion zeigt, dass $\text{SHALT} = \{x \mid M_x(x) \downarrow\} \notin \mathbb{E}$
(denn für die Diagonalisierung muss ich nur wissen ob $M_x(x) \uparrow$ oder $M_x(x) \downarrow$)

- wir haben bereits die Nichtentscheidbarkeit einer Sprache durch Diagonalisierung gezeigt
- Idee lässt sich abwandeln, z.B. für $\text{HALT} := \{\langle M, w \rangle \mid M(w) \downarrow\}$

	1	2	3	4
T_1	↑	↓	↓	↓
T_2	↓	↓	↓	↑
T_3	↓	↑	↓	↓
T_4	↓	↓	↓	↓
D	↓	↑	↑	↑

Falls $\text{HALT} \in \mathbb{E}$ kann ich eine Diagonalisierungsmaschine D bauen

1. entscheide ob Eingabe $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ aus HALT
2. Wenn ja, gehe in Endlosschleife, wenn nein stoppe

- D kann nicht existieren \rightarrow HALT ist nicht entscheidbar
- gleiche Konstruktion zeigt, dass $\text{SHALT} = \{x \mid M_x(x) \downarrow\} \notin \mathbb{E}$
(denn für die Diagonalisierung muss ich nur wissen ob $M_x(x) \uparrow$ oder $M_x(x) \downarrow$)
- **Gesucht:** Methode zum Transfer dieser Ergebnisse

Definition

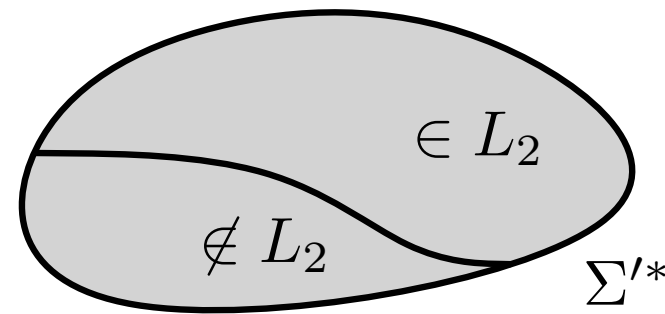
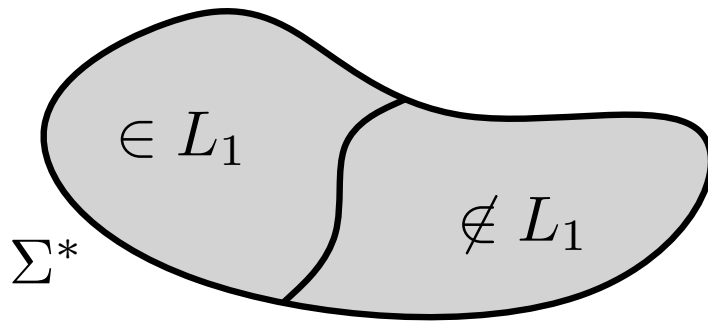
Seien $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma'^*$ Sprachen. Die Funktion f heißt **many-one Reduktion von L_1 auf L_2** , gdw.

1. f ist berechenbar und total,
2. $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$.

Definition

Seien $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma'^*$ Sprachen. Die Funktion f heißt **many-one Reduktion von L_1 auf L_2** , gdw.

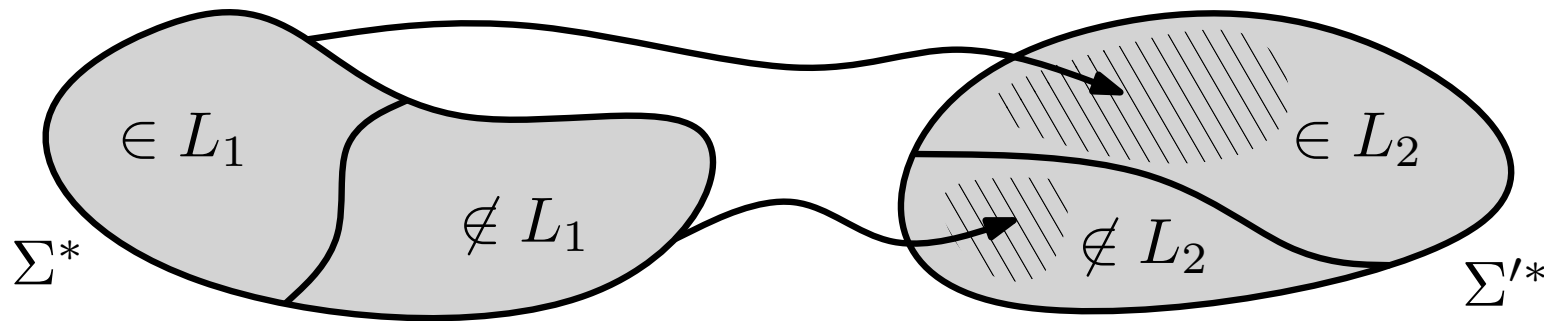
1. f ist berechenbar und total,
2. $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$.



Definition

Seien $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma'^*$ Sprachen. Die Funktion f heißt **many-one Reduktion von L_1 auf L_2** , gdw.

1. f ist berechenbar und total,
2. $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$.

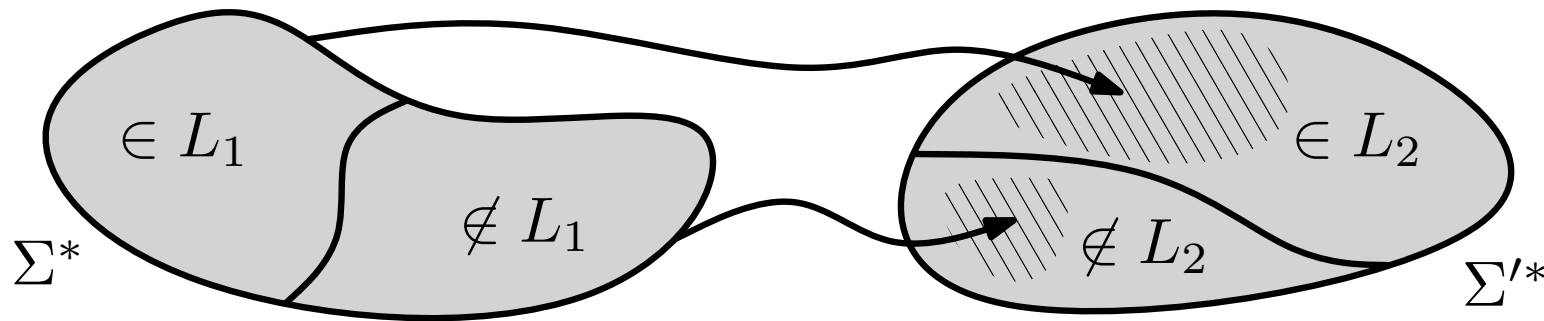


f muss weder injektiv noch surjektiv sein (many-one)

Definition

Seien $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma'^*$ Sprachen. Die Funktion f heißt **many-one Reduktion von L_1 auf L_2** , gdw.

1. f ist berechenbar und total,
2. $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$.



f muss weder injektiv noch surjektiv sein (many-one)

Definition

Eine Sprache L_1 ist **many-one reduzierbar** auf L_2 , gdw. es eine many-one Reduktion von L_1 auf L_2 gibt.

Schreibweise: $L_1 \leq_m L_2$

Satz 23

Sei $L_1 \leq_m L_2$, dann gilt

- (a) $L_2 \in \mathbb{E} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{E}$
- (b) $L_2 \in \mathbb{A} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}$
- (c) $L_2 \in \mathbb{A}^{\text{co}} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}^{\text{co}}$

Satz 23

Sei $L_1 \leq_m L_2$, dann gilt

- (a) $L_2 \in \mathbb{E} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{E}$
- (b) $L_2 \in \mathbb{A} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}$
- (c) $L_2 \in \mathbb{A}^{\text{co}} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}^{\text{co}}$

Korollar

Sei $L_1 \leq_m L_2$, dann gilt

- (a) $L_1 \notin \mathbb{E} \Rightarrow L_2 \notin \mathbb{E}$
- (b) $L_1 \notin \mathbb{A} \Rightarrow L_2 \notin \mathbb{A}$
- (c) $L_1 \notin \mathbb{A}^{\text{co}} \Rightarrow L_2 \notin \mathbb{A}^{\text{co}}$

Satz 23

Sei $L_1 \leq_m L_2$, dann gilt

- (a) $L_2 \in \mathbb{E} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{E}$
- (b) $L_2 \in \mathbb{A} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}$
- (c) $L_2 \in \mathbb{A}^{\text{co}} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}^{\text{co}}$

Beweis (exemplarisch für (a))

- Sei M der Entscheider für L_2 und f eine many-one Reduktion von L_1 auf L_2 .

Satz 23

Sei $L_1 \leq_m L_2$, dann gilt

- (a) $L_2 \in \mathbb{E} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{E}$
- (b) $L_2 \in \mathbb{A} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}$
- (c) $L_2 \in \mathbb{A}^{\text{co}} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}^{\text{co}}$

Beweis (exemplarisch für (a))

- Sei M der Entscheider für L_2 und f eine many-one Reduktion von L_1 auf L_2 .
- Sei M_f TM, die f berechnet.

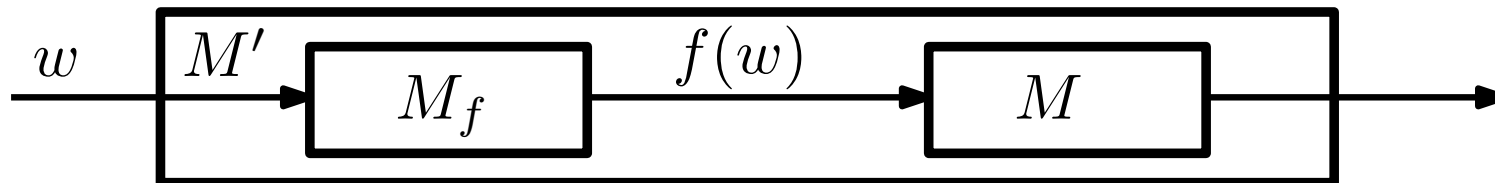
Satz 23

Sei $L_1 \leq_m L_2$, dann gilt

- (a) $L_2 \in \mathbb{E} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{E}$
- (b) $L_2 \in \mathbb{A} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}$
- (c) $L_2 \in \mathbb{A}^{\text{co}} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}^{\text{co}}$

Beweis (exemplarisch für (a))

- Sei M der Entscheider für L_2 und f eine many-one Reduktion von L_1 auf L_2 .
- Sei M_f TM, die f berechnet.
- Konstruiere neue TM M' , als Hintereinanderschaltung von M und M_f



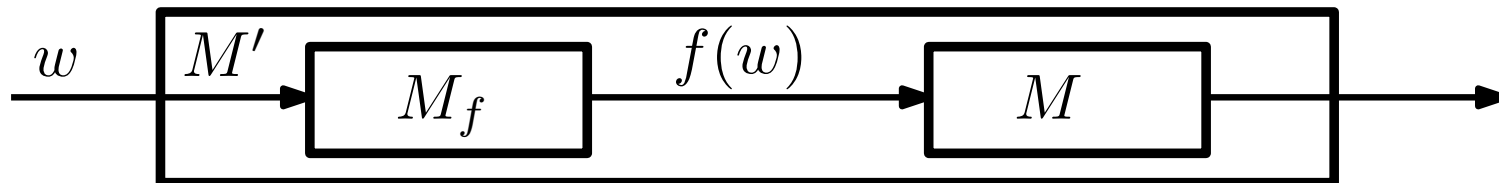
Satz 23

Sei $L_1 \leq_m L_2$, dann gilt

- (a) $L_2 \in \mathbb{E} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{E}$
- (b) $L_2 \in \mathbb{A} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}$
- (c) $L_2 \in \mathbb{A}^{\text{co}} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}^{\text{co}}$

Beweis (exemplarisch für (a))

- Sei M der Entscheider für L_2 und f eine many-one Reduktion von L_1 auf L_2 .
- Sei M_f TM, die f berechnet.
- Konstruiere neue TM M' , als Hintereinanderschaltung von M und M_f



$$M'(w) \text{ akz.} \iff M(f(w)) \text{ akz.} \iff f(w) \in L_2 \iff w \in L_1$$

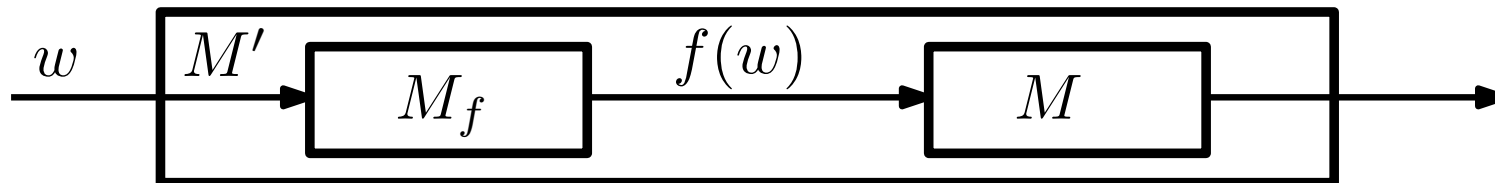
Satz 23

Sei $L_1 \leq_m L_2$, dann gilt

- (a) $L_2 \in \mathbb{E} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{E}$
- (b) $L_2 \in \mathbb{A} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}$
- (c) $L_2 \in \mathbb{A}^{\text{co}} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}^{\text{co}}$

Beweis (exemplarisch für (a))

- Sei M der Entscheider für L_2 und f eine many-one Reduktion von L_1 auf L_2 .
- Sei M_f TM, die f berechnet.
- Konstruiere neue TM M' , als Hintereinanderschaltung von M und M_f



$$M'(w) \text{ akz.} \iff M(f(w)) \text{ akz.} \iff f(w) \in L_2 \iff w \in L_1$$

- da M' Entscheider $\rightarrow L_1 \in \mathbb{E}$

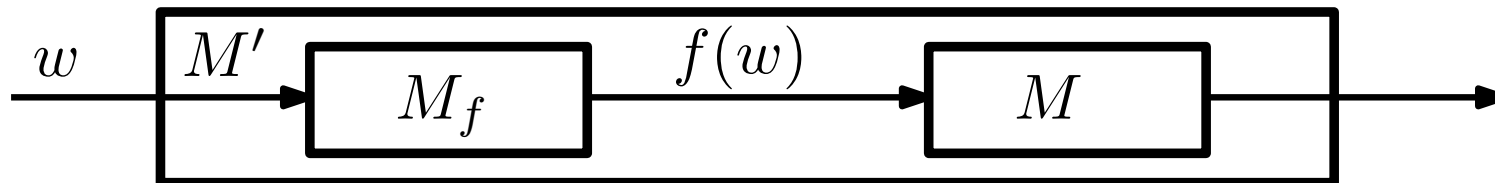
Satz 23

Sei $L_1 \leq_m L_2$, dann gilt

- (a) $L_2 \in \mathbb{E} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{E}$
- (b) $L_2 \in \mathbb{A} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}$
- (c) $L_2 \in \mathbb{A}^{\text{co}} \Rightarrow L_1 \in \mathbb{A}^{\text{co}}$

Beweis (exemplarisch für (a))

- Sei M der Entscheider für L_2 und f eine many-one Reduktion von L_1 auf L_2 .
- Sei M_f TM, die f berechnet.
- Konstruiere neue TM M' , als Hintereinanderschaltung von M und M_f



$$M'(w) \text{ akz.} \iff M(f(w)) \text{ akz.} \iff f(w) \in L_2 \iff w \in L_1$$

- da M' Entscheider $\rightarrow L_1 \in \mathbb{E}$
- Teil (b) und (c) analog

□

Alternativer Beweis für $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$

- Wir zeigen $A_{\text{TM}} \leq_m \text{HALT}$,
denn da $A_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$ folgt daraus $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$.

Alternativer Beweis für $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$

- Wir zeigen $A_{\text{TM}} \leq_m \text{HALT}$,
denn da $A_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$ folgt daraus $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$.
- Gesucht: Reduktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$

Alternativer Beweis für $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$

- Wir zeigen $A_{\text{TM}} \leq_m \text{HALT}$,
denn da $A_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$ folgt daraus $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$.
- Gesucht: Reduktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$

$f(\langle M, w \rangle) := \langle M', w \rangle$, wobei:

$M'(z)$

1. Simuliere $M(z)$
2. Wenn $M(z)$ verwirft, dann zykel
3. Ansonsten stoppe

Alternativer Beweis für $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$

- Wir zeigen $A_{\text{TM}} \leq_m \text{HALT}$,
denn da $A_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$ folgt daraus $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$.
- Gesucht: Reduktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$

$f(\langle M, w \rangle) := \langle M', w \rangle$, wobei:

$M'(z)$

1. Simuliere $M(z)$
2. Wenn $M(z)$ verwirft, dann zykel
3. Ansonsten stoppe

$$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff M \text{ akz. } w \iff M'(w) \downarrow \iff \langle M', w \rangle \in \text{HALT}$$

Alternativer Beweis für $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$

- Wir zeigen $A_{\text{TM}} \leq_m \text{HALT}$,
denn da $A_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$ folgt daraus $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$.
- Gesucht: Reduktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$

$f(\langle M, w \rangle) := \langle M', w \rangle$, wobei:

$M'(z)$

1. Simuliere $M(z)$
2. Wenn $M(z)$ verwirft, dann zykel
3. Ansonsten stoppe

$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff M \text{ akz. } w \iff M'(w) \downarrow \iff \langle M', w \rangle \in \text{HALT}$

- also: $\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff f(\langle M, w \rangle) \in \text{HALT}$

Alternativer Beweis für $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$

- Wir zeigen $A_{\text{TM}} \leq_m \text{HALT}$,
denn da $A_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$ folgt daraus $\text{HALT} \notin \mathbb{E}$.
- Gesucht: Reduktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$

$f(\langle M, w \rangle) := \langle M', w \rangle$, wobei:

$M'(z)$

1. Simuliere $M(z)$
2. Wenn $M(z)$ verwirft, dann zykel
3. Ansonsten stoppe

$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff M \text{ akz. } w \iff M'(w) \downarrow \iff \langle M', w \rangle \in \text{HALT}$

- also: $\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff f(\langle M, w \rangle) \in \text{HALT}$
- da f berechenbar und total: $A_{\text{TM}} \leq_m \text{HALT} \Rightarrow \text{HALT} \notin \mathbb{E}$

□

Satz 24

$$\text{REG}_{\text{TM}} := \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG}\} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

- Wir zeigen $\overline{\text{HALT}} \leq_m \text{REG}_{\text{TM}}$, denn daraus folgt $\text{REG}_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$.

Satz 24

$$\text{REG}_{\text{TM}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG} \} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

- Wir zeigen $\overline{\text{HALT}} \leq_m \text{REG}_{\text{TM}}$, denn daraus folgt $\text{REG}_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$.
- Gesucht: Reduktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$

$$\text{REG}_{\text{TM}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG} \} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

- Wir zeigen $\overline{\text{HALT}} \leq_m \text{REG}_{\text{TM}}$, denn daraus folgt $\text{REG}_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$.
- Gesucht: Reduktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$
 $f(\langle M, w \rangle) := \langle M' \rangle$, wobei:

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, wenn z die Form $a^n b^n$ hat

$$\text{REG}_{\text{TM}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG} \} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

- Wir zeigen $\overline{\text{HALT}} \leq_m \text{REG}_{\text{TM}}$, denn daraus folgt $\text{REG}_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$.
- Gesucht: Reduktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$
 $f(\langle M, w \rangle) := \langle M' \rangle$, wobei:

$$M'(z)$$

1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, wenn z die Form $a^n b^n$ hat

$$\langle M, w \rangle \in \overline{\text{HALT}} \Rightarrow M(w) \uparrow \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow L(M') \in \text{REG}$$

$$\text{REG}_{\text{TM}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG} \} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

- Wir zeigen $\overline{\text{HALT}} \leq_m \text{REG}_{\text{TM}}$, denn daraus folgt $\text{REG}_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$.
- Gesucht: Reduktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$
 $f(\langle M, w \rangle) := \langle M' \rangle$, wobei:

$$M'(z)$$

1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, wenn z die Form $a^n b^n$ hat

$$\langle M, w \rangle \in \overline{\text{HALT}} \Rightarrow M(w) \uparrow \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow L(M') \in \text{REG}$$

$$\begin{aligned} \langle M, w \rangle \notin \overline{\text{HALT}} &\Rightarrow M(w) \downarrow \Rightarrow L(M') = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \\ &\Rightarrow L(M') \notin \text{REG} \end{aligned}$$

Satz 24

$$\text{REG}_{\text{TM}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG} \} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

- Wir zeigen $\overline{\text{HALT}} \leq_m \text{REG}_{\text{TM}}$, denn daraus folgt $\text{REG}_{\text{TM}} \notin \mathbb{E}$.
- Gesucht: Reduktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$
 $f(\langle M, w \rangle) := \langle M' \rangle$, wobei:

$$M'(z)$$

1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, wenn z die Form $a^n b^n$ hat

$$\langle M, w \rangle \in \overline{\text{HALT}} \Rightarrow M(w) \uparrow \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow L(M') \in \text{REG}$$

$$\begin{aligned} \langle M, w \rangle \notin \overline{\text{HALT}} &\Rightarrow M(w) \downarrow \Rightarrow L(M') = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \\ &\Rightarrow L(M') \notin \text{REG} \end{aligned}$$

- f ist berechenbar und total, deshalb $\overline{\text{HALT}} \leq_m \text{REG}_{\text{TM}}$ □

Satz 24

$= \emptyset$

$$E_{\text{TM}} \quad \cancel{\text{REG}}_{\text{TM}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \notin \cancel{\text{REG}} \} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

Satz 24

$= \emptyset$

$$E_{\text{TM}} \quad \cancel{\text{REG}}_{\text{TM}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \notin \cancel{\text{REG}} \} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

- Wir zeigen $\overline{\text{HALT}} \leq_m \cancel{\text{REG}}_{\text{TM}}$

Satz 24

 $= \emptyset$

$$E_{\text{TM}} \quad \cancel{\text{REG}}_{\text{TM}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \cancel{\text{REG}} \} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

- Wir zeigen $\overline{\text{HALT}} \leq_m \cancel{\text{REG}}_{\text{TM}}$

$f(\langle M, w \rangle) := \langle M' \rangle$, wobei:

$$M'(z)$$

1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, wenn z die Form $a^n b^n$ hat

$$\langle M, w \rangle \in \overline{\text{HALT}} \Rightarrow M(w) \uparrow \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow L(M') \in \text{REG}$$

$$\begin{aligned} \langle M, w \rangle \notin \overline{\text{HALT}} &\Rightarrow M(w) \downarrow \Rightarrow L(M') = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \\ &\Rightarrow L(M') \notin \text{REG} \end{aligned}$$

Satz 24

$$= \emptyset$$

$$E_{\text{TM}} \quad \cancel{\text{REG}}_{\text{TM}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \cancel{\text{REG}} \} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

- Wir zeigen $\overline{\text{HALT}} \leq_m \cancel{\text{REG}}_{\text{TM}}$ E_{TM}

$f(\langle M, w \rangle) := \langle M' \rangle$, wobei:

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, wenn z die Form $a^n b^n$ hat

$\langle M' \rangle \in E_{\text{TM}}$

$$\langle M, w \rangle \in \overline{\text{HALT}} \Rightarrow M(w) \uparrow \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow \cancel{L(M') \in \text{REG}}$$

$$\langle M, w \rangle \notin \overline{\text{HALT}} \Rightarrow M(w) \downarrow \Rightarrow L(M') = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$$

$$\Rightarrow \cancel{L(M') \in \text{REG}} \quad \langle M' \rangle \notin E_{\text{TM}}$$

Satz 24

$$= \emptyset$$

$$E_{\text{TM}} \quad \cancel{\text{REG}}_{\text{TM}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \cancel{\text{REG}} \} \notin \mathbb{E}$$

Beweis

- Wir zeigen $\overline{\text{HALT}} \leq_m \cancel{\text{REG}}_{\text{TM}}$ E_{TM}

$f(\langle M, w \rangle) := \langle M' \rangle$, wobei:

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, wenn z die Form $a^n b^n$ hat

$$\langle M, w \rangle \in \overline{\text{HALT}} \Rightarrow M(w) \uparrow \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow \cancel{L(M') \in \text{REG}} \quad \langle M' \rangle \in E_{\text{TM}}$$

$$\langle M, w \rangle \notin \overline{\text{HALT}} \Rightarrow M(w) \downarrow \Rightarrow L(M') = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$\Rightarrow \cancel{L(M') \in \text{REG}} \quad \langle M' \rangle \notin E_{\text{TM}}$$

Kann ich diese Konstruktion verallgemeinern?

Folgende Sprachen sind alle nicht entscheidbar

- $$\begin{aligned}L_1 &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG}\} \\L_2 &= \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 14582643\} \\L_3 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet totale Funktion}\} \\L_4 &= \{\langle M \rangle \mid f_M \equiv 0\}\end{aligned}$$

Folgende Sprachen sind alle nicht entscheidbar

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG}\} \\ L_2 &= \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 14582643\} \\ L_3 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet totale Funktion}\} \\ L_4 &= \{\langle M \rangle \mid f_M \equiv 0\} \end{aligned}$$

Folgende Sprachen sind alle nicht entscheidbar

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG}\} \\ L_2 &= \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 14582643\} \\ L_3 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet totale Funktion}\} \\ L_4 &= \{\langle M \rangle \mid f_M \equiv 0\} \end{aligned}$$

- Beweise sehr ähnlich zum Satz 24

Folgende Sprachen sind alle nicht entscheidbar

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG}\} \\ L_2 &= \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 14582643\} \\ L_3 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet totale Funktion}\} \\ L_4 &= \{\langle M \rangle \mid f_M \equiv 0\} \end{aligned}$$

- Beweise sehr ähnlich zum Satz 24

Formalisierung dieses Typs von Sprachen

- Sei $\mathcal{R} = \{f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \mid f \text{ rechtseindeutig und berechenbar}\}$ die Menge der partiell berechenbaren Funktionen

Folgende Sprachen sind alle nicht entscheidbar

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG}\} \\ L_2 &= \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 14582643\} \\ L_3 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet totale Funktion}\} \\ L_4 &= \{\langle M \rangle \mid f_M \equiv 0\} \end{aligned}$$

- Beweise sehr ähnlich zum Satz 24

Formalisierung dieses Typs von Sprachen

- Sei $\mathcal{R} = \{f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \mid f \text{ rechtseindeutig und berechenbar}\}$ die Menge der partiell berechenbaren Funktionen
- Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}$ heißt **Eigenschaft** von \mathcal{R}

Folgende Sprachen sind alle nicht entscheidbar

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG}\} \\
 L_2 &= \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 14582643\} \\
 L_3 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet totale Funktion}\} \\
 L_4 &= \{\langle M \rangle \mid f_M \equiv 0\}
 \end{aligned}$$

- Beweise sehr ähnlich zum Satz 24

Formalisierung dieses Typs von Sprachen

- Sei $\mathcal{R} = \{f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \mid f \text{ rechtseindeutig und berechenbar}\}$ die Menge der partiell berechenbaren Funktionen
- Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}$ heißt **Eigenschaft** von \mathcal{R}
 - Beispiel $\{f \in \mathcal{R} \mid f \text{ ist total}\}$ ist Eigenschaft
 - Beispiel $\{f \in \mathcal{R} \mid f \equiv 0\}$ ist Eigenschaft

Folgende Sprachen sind alle nicht entscheidbar

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG}\} \\
 L_2 &= \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 14582643\} \\
 L_3 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet totale Funktion}\} \\
 L_4 &= \{\langle M \rangle \mid f_M \equiv 0\}
 \end{aligned}$$

- Beweise sehr ähnlich zum Satz 24

Formalisierung dieses Typs von Sprachen

- Sei $\mathcal{R} = \{f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \mid f \text{ rechtseindeutig und berechenbar}\}$ die Menge der partiell berechenbaren Funktionen
- Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}$ heißt **Eigenschaft** von \mathcal{R}
 - Beispiel $\{f \in \mathcal{R} \mid f \text{ ist total}\}$ ist Eigenschaft
 - Beispiel $\{f \in \mathcal{R} \mid f \equiv 0\}$ ist Eigenschaft
- Die Eigenschaften $\mathcal{U} = \emptyset$ und $\mathcal{U} = \mathcal{R}$ heißen **triviale Eigenschaften**.

Folgende Sprachen sind alle nicht entscheidbar

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \text{REG}\} \\
 L_2 &= \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 14582643\} \\
 L_3 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet totale Funktion}\} \\
 L_4 &= \{\langle M \rangle \mid f_M \equiv 0\}
 \end{aligned}$$

- Beweise sehr ähnlich zum Satz 24

Formalisierung dieses Typs von Sprachen

- Sei $\mathcal{R} = \{f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \mid f \text{ rechtseindeutig und berechenbar}\}$ die Menge der partiell berechenbaren Funktionen
- Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}$ heißt **Eigenschaft** von \mathcal{R}
 Beispiel $\{f \in \mathcal{R} \mid f \text{ ist total}\}$ ist Eigenschaft
 Beispiel $\{f \in \mathcal{R} \mid f \equiv 0\}$ ist Eigenschaft
- Die Eigenschaften $\mathcal{U} = \emptyset$ und $\mathcal{U} = \mathcal{R}$ heißen **triviale Eigenschaften**.
- Struktur von $(L_1, L_2,)L_3, L_4$: Programme aller Funktionen mit Eigenschaft X .

Satz von Rice

Für eine nicht-triviale Eigenschaft $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ gilt

$$L_{\mathcal{U}} := \{\langle M \rangle \mid f_M \in \mathcal{U}\} \notin \mathbb{E}.$$

Satz von Rice

Für eine nicht-triviale Eigenschaft $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ gilt

$$L_{\mathcal{U}} := \{\langle M \rangle \mid f_M \in \mathcal{U}\} \notin \mathbb{E}.$$

Beweis

Satz von Rice

Für eine nicht-triviale Eigenschaft $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ gilt

$$L_{\mathcal{U}} := \{\langle M \rangle \mid f_M \in \mathcal{U}\} \notin \mathbb{E}.$$

Beweis

Wir zeigen:

$$\begin{aligned} & \text{HALT} \leq_m L_{\mathcal{U}} \\ & f: \langle M, w \rangle \rightarrow \langle M' \rangle \end{aligned}$$

Satz von Rice

Für eine nicht-triviale Eigenschaft $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ gilt

$$L_{\mathcal{U}} := \{\langle M \rangle \mid f_M \in \mathcal{U}\} \notin \mathbb{E}.$$

Beweis

Wir zeigen:

$$\begin{aligned} \text{HALT} &\leq_m L_{\mathcal{U}} \\ f: \langle M, w \rangle &\rightarrow \langle M' \rangle \end{aligned}$$

Sei f_0 die überall undefinierte Funktion

Satz von Rice

Für eine nicht-triviale Eigenschaft $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ gilt

$$L_{\mathcal{U}} := \{\langle M \rangle \mid f_M \in \mathcal{U}\} \notin \mathbb{E}.$$

Beweis

Wir zeigen:

$$\begin{aligned} \text{HALT} &\leq_m L_{\mathcal{U}} \\ f &: \langle M, w \rangle \rightarrow \langle M' \rangle \end{aligned}$$

Sei f_0 die überall undefinierte Funktion

1. Fall: $f_0 \notin \mathcal{U}$

Satz von Rice

Für eine nicht-triviale Eigenschaft $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ gilt

$$L_{\mathcal{U}} := \{\langle M \rangle \mid f_M \in \mathcal{U}\} \notin \mathbb{E}.$$

Beweis

Wir zeigen:

$$\begin{aligned} \text{HALT} &\leq_m L_{\mathcal{U}} \\ f: \langle M, w \rangle &\rightarrow \langle M' \rangle \end{aligned}$$

Sei f_0 die überall undefinierte Funktion

1. Fall: $f_0 \notin \mathcal{U}$

wir wählen $f_u \in \mathcal{U}$ und TM M_u die f_u berechnet (existiert, da $\mathcal{U} \neq \emptyset$)

Satz von Rice

Für eine nicht-triviale Eigenschaft $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ gilt

$$L_{\mathcal{U}} := \{\langle M \rangle \mid f_M \in \mathcal{U}\} \notin \mathbb{E}.$$

Beweis

Wir zeigen:

$$\text{HALT} \leq_m L_{\mathcal{U}}$$

$$f: \langle M, w \rangle \rightarrow \langle M' \rangle$$

Sei f_0 die überall undefinierte Funktion

1. Fall: $f_0 \notin \mathcal{U}$

wir wählen $f_u \in \mathcal{U}$ und TM M_u die f_u berechnet (existiert, da $\mathcal{U} \neq \emptyset$)

Die Reduktion arbeitet wie folgt: Zu einem gegebenen $\langle M, w \rangle$ konstruieren wir folgende Maschine M'

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. Simuliere $M_u(z)$

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. Simuliere $M_u(z)$

 $(f_0 \notin \mathcal{U})$ $(f_u \in \mathcal{U})$

$M'(z)$ 1. Simuliere $M(w)$ $(f_0 \notin \mathcal{U})$ 2. Simuliere $M_u(z)$ $(f_u \in \mathcal{U})$ $\langle M, w \rangle \notin \text{HALT} \Rightarrow M'$ stoppt bei keiner Eingabe $\Rightarrow M'$ berechnet f_0 $\Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{U}}$

$M'(z)$ 1. Simuliere $M(w)$ $(f_0 \notin \mathcal{U})$ 2. Simuliere $M_u(z)$ $(f_u \in \mathcal{U})$ $\langle M, w \rangle \notin \text{HALT} \Rightarrow M'$ stoppt bei keiner Eingabe $\Rightarrow M'$ berechnet f_0 $\Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{U}}$ $\langle M, w \rangle \in \text{HALT} \Rightarrow M'$ rechnet wie M_u $\Rightarrow \langle M' \rangle \in L_{\mathcal{U}}$

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. Simuliere $M_u(z)$

Reduktion!
Fall 1

 $(f_0 \notin \mathcal{U})$
 $(f_u \in \mathcal{U})$

$\langle M, w \rangle \notin \text{HALT} \Rightarrow M'$ stoppt bei keiner Eingabe

$\Rightarrow M'$ berechnet f_0

$\Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{U}}$

$\langle M, w \rangle \in \text{HALT} \Rightarrow M'$ rechnet wie M_u

$\Rightarrow \langle M' \rangle \in L_{\mathcal{U}}$

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. Simuliere $M_u(z)$

Reduktion!
Fall 1

 $(f_0 \notin \mathcal{U})$
 $(f_u \in \mathcal{U})$

$\langle M, w \rangle \notin \text{HALT} \Rightarrow M'$ stoppt bei keiner Eingabe

$\Rightarrow M'$ berechnet f_0

$\Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{U}}$

$\langle M, w \rangle \in \text{HALT} \Rightarrow M'$ rechnet wie M_u

$\Rightarrow \langle M' \rangle \in L_{\mathcal{U}}$

Also: $L_{\mathcal{U}} \notin \mathbb{E}$

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. Simuliere $M_u(z)$

Reduktion!
Fall 1

 $(f_0 \notin \mathcal{U})$
 $(f_u \in \mathcal{U})$

$\langle M, w \rangle \notin \text{HALT} \Rightarrow M'$ stoppt bei keiner Eingabe

$\Rightarrow M'$ berechnet f_0

$\Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{U}}$

$\langle M, w \rangle \in \text{HALT} \Rightarrow M'$ rechnet wie M_u

$\Rightarrow \langle M' \rangle \in L_{\mathcal{U}}$

Also: $L_{\mathcal{U}} \notin \mathbb{E}$

2. Fall: $f_0 \in \mathcal{U}$

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. Simuliere $M_u(z)$

Reduktion!
Fall 1

 $(f_0 \notin \mathcal{U})$
 $(f_u \in \mathcal{U})$

$\langle M, w \rangle \notin \text{HALT} \Rightarrow M'$ stoppt bei keiner Eingabe

$\Rightarrow M'$ berechnet f_0

$\Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{U}}$

$\langle M, w \rangle \in \text{HALT} \Rightarrow M'$ rechnet wie M_u

$\Rightarrow \langle M' \rangle \in L_{\mathcal{U}}$

Also: $L_{\mathcal{U}} \notin \mathbb{E}$

2. Fall: $f_0 \in \mathcal{U}$

betrachte $L_{\bar{\mathcal{U}}} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ berechnet Fkt. aus } \bar{\mathcal{U}} \}$

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. Simuliere $M_u(z)$

Reduktion!
Fall 1

 $(f_0 \notin \mathcal{U})$
 $(f_u \in \mathcal{U})$

$\langle M, w \rangle \notin \text{HALT} \Rightarrow M'$ stoppt bei keiner Eingabe

$\Rightarrow M'$ berechnet f_0

$\Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{U}}$

$\langle M, w \rangle \in \text{HALT} \Rightarrow M'$ rechnet wie M_u

$\Rightarrow \langle M' \rangle \in L_{\mathcal{U}}$

Also: $L_{\mathcal{U}} \notin \mathbb{E}$

2. Fall: $f_0 \in \mathcal{U}$

betrachte $L_{\bar{\mathcal{U}}} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ berechnet Fkt. aus } \bar{\mathcal{U}} \}$

$= \{ \langle M \rangle \mid M \text{ berechnet nicht Fkt. aus } \mathcal{U} \} = \overline{L_{\mathcal{U}}}$

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. Simuliere $M_u(z)$


 A yellow rectangular box with a black border and rounded corners, containing the text "Reduktion! Fall 1" in orange.

$(f_0 \notin \mathcal{U})$
 $(f_u \in \mathcal{U})$

$\langle M, w \rangle \notin \text{HALT} \Rightarrow M'$ stoppt bei keiner Eingabe
 $\Rightarrow M'$ berechnet f_0
 $\Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{U}}$

$\langle M, w \rangle \in \text{HALT} \Rightarrow M'$ rechnet wie M_u
 $\Rightarrow \langle M' \rangle \in L_{\mathcal{U}}$

Also: $L_{\mathcal{U}} \notin \mathbb{E}$

2. Fall: $f_0 \in \mathcal{U}$

betrachte $L_{\bar{\mathcal{U}}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet Fkt. aus } \bar{\mathcal{U}}\}$
 $= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet nicht Fkt. aus } \mathcal{U}\} = \bar{L}_{\mathcal{U}}$

nach Fall 1 haben wir (da $f_0 \notin \bar{\mathcal{U}}$), dass $L_{\bar{\mathcal{U}}} \notin \mathbb{E} \Rightarrow \bar{L}_{\mathcal{U}} \notin \mathbb{E}$

$M'(z)$

1. Simuliere $M(w)$
2. Simuliere $M_u(z)$

Reduktion!
Fall 1

$(f_0 \notin \mathcal{U})$
 $(f_u \in \mathcal{U})$

$\langle M, w \rangle \notin \text{HALT} \Rightarrow M'$ stoppt bei keiner Eingabe
 $\Rightarrow M'$ berechnet f_0
 $\Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{U}}$

$\langle M, w \rangle \in \text{HALT} \Rightarrow M'$ rechnet wie M_u
 $\Rightarrow \langle M' \rangle \in L_{\mathcal{U}}$

Also: $L_{\mathcal{U}} \notin \mathbb{E}$

2. Fall: $f_0 \in \mathcal{U}$

betrachte $L_{\bar{\mathcal{U}}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet Fkt. aus } \bar{\mathcal{U}}\}$
 $= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet nicht Fkt. aus } \mathcal{U}\} = \bar{L}_{\mathcal{U}}$

nach Fall 1 haben wir (da $f_0 \notin \bar{\mathcal{U}}$), dass $L_{\bar{\mathcal{U}}} \notin \mathbb{E} \Rightarrow \bar{L}_{\mathcal{U}} \notin \mathbb{E}$

Da die entscheidbaren Sprachen aber unter Komplement abgeschlossen sind (Tausch q_A/q_V), ist somit auch $L_{\mathcal{U}} \notin \mathbb{E}$

Satz von Rice – Anwendungen

11

Folgende Sprachen sind nach dem Satz von Rice nicht entscheidbar:

$$L_1 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \text{ Bijektion} \}$$

$$L_2 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \text{ monoton steigend} \}$$

Satz von Rice – Anwendungen

11

Folgende Sprachen sind nach dem Satz von Rice nicht entscheidbar:

$$L_1 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \text{ Bijektion} \}$$

$$L_2 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \text{ monoton steigend} \}$$

Insbesondere gilt für $\mathcal{U} = \{g\}$:

$$L_3 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \equiv g \} \notin \mathbb{E}$$

Satz von Rice – Anwendungen

11

Folgende Sprachen sind nach dem Satz von Rice nicht entscheidbar:

$$L_1 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \text{ Bijektion} \}$$

$$L_2 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \text{ monoton steigend} \}$$

Insbesondere gilt für $\mathcal{U} = \{g\}$:

$$L_3 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \equiv g \} \notin \mathbb{E}$$

Nach 1-1-Beziehung von $\{0, 1\}^{\Sigma^*}$ und Sprachen über Σ erhält man:

Korollar

Sei $\mathcal{L} \subsetneq \{L \in \mathbb{A}\}$ mit $\mathcal{L} \neq \emptyset$ dann ist $\{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{L} \} \notin \mathbb{E}$

Folgende Sprachen sind nach dem Satz von Rice nicht entscheidbar:

$$L_1 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \text{ Bijektion} \}$$

$$L_2 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \text{ monoton steigend} \}$$

Insbesondere gilt für $\mathcal{U} = \{g\}$:

$$L_3 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \equiv g \} \notin \mathbb{E}$$

Nach 1-1-Beziehung von $\{0, 1\}^{\Sigma^*}$ und Sprachen über Σ erhält man:

Korollar

Sei $\mathcal{L} \subsetneq \{L \in \mathbb{A}\}$ mit $\mathcal{L} \neq \emptyset$ dann ist $\{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{L} \} \notin \mathbb{E}$

Folgende Sprachen sind nach dem Korollar nicht entscheidbar:

$$L_4 = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| = 100 \}$$

$$L_5 = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \mathbb{E} \setminus \text{REG} \}$$

Folgende Sprachen sind nach dem Satz von Rice nicht entscheidbar:

$$L_1 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \text{ Bijektion} \}$$

$$L_2 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \text{ monoton steigend} \}$$

Insbesondere gilt für $\mathcal{U} = \{g\}$:

$$L_3 = \{ \langle M \rangle \mid f_M \equiv g \} \notin \mathbb{E}$$

Nach 1-1-Beziehung von $\{0, 1\}^{\Sigma^*}$ und Sprachen über Σ erhält man:

Korollar

Sei $\mathcal{L} \subsetneq \{L \in \mathbb{A}\}$ mit $\mathcal{L} \neq \emptyset$ dann ist $\{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{L} \} \notin \mathbb{E}$

Folgende Sprachen sind nach dem Korollar nicht entscheidbar:

$$L_4 = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| = 100 \}$$

$$L_5 = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \mathbb{E} \setminus \text{REG} \}$$

Hier trifft der Satz von Rice keine Aussage

$$L_6 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ stoppt auf allen Eingaben nach 100 Schritten} \}$$

$$L_7 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ besucht bei Eingabe } \varepsilon \text{ Zustand } q_0 \text{ mehrfach} \}$$

Satz 25

$$\text{EQ}_{\text{TM}} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{A}^{\text{co}}$$

Satz 25

$$\text{EQ}_{\text{TM}} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{A}^{\text{co}}$$

Beweis

Vorüberlegung: $X \leq_m Y \iff \bar{X} \leq_m \bar{Y}$

Satz 25

$$\text{EQ}_{\text{TM}} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin \text{A} \cup \text{A}^{\text{co}}$$

Beweis

Vorüberlegung: $X \leq_m Y \iff \bar{X} \leq_m \bar{Y}$
(Nutze gleiche Reduktionsfunktion)

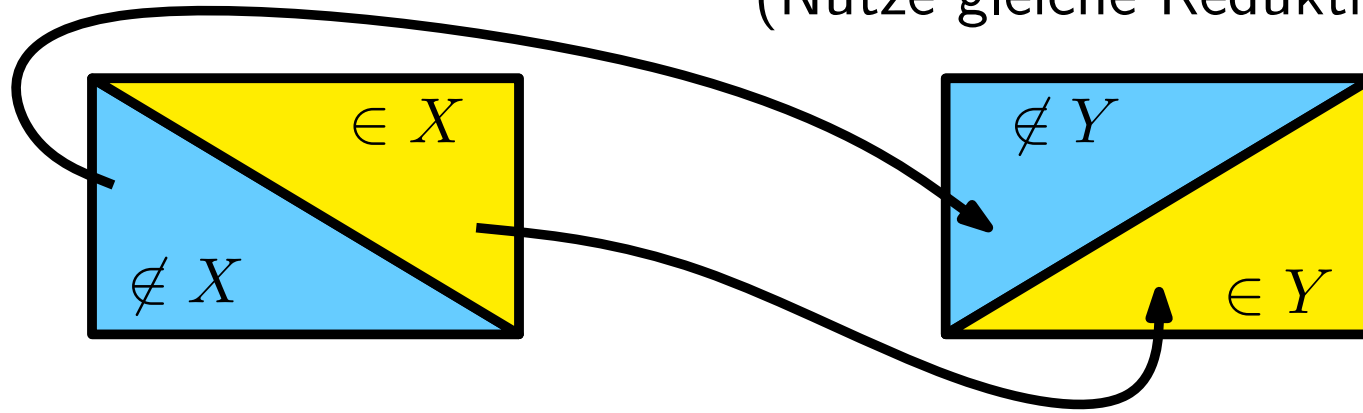
Satz 25

$$\text{EQ}_{\text{TM}} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{A}^{\text{co}}$$

Beweis

Vorüberlegung: $X \leq_m Y \iff \bar{X} \leq_m \bar{Y}$

(Nutze gleiche Reduktionsfunktion)



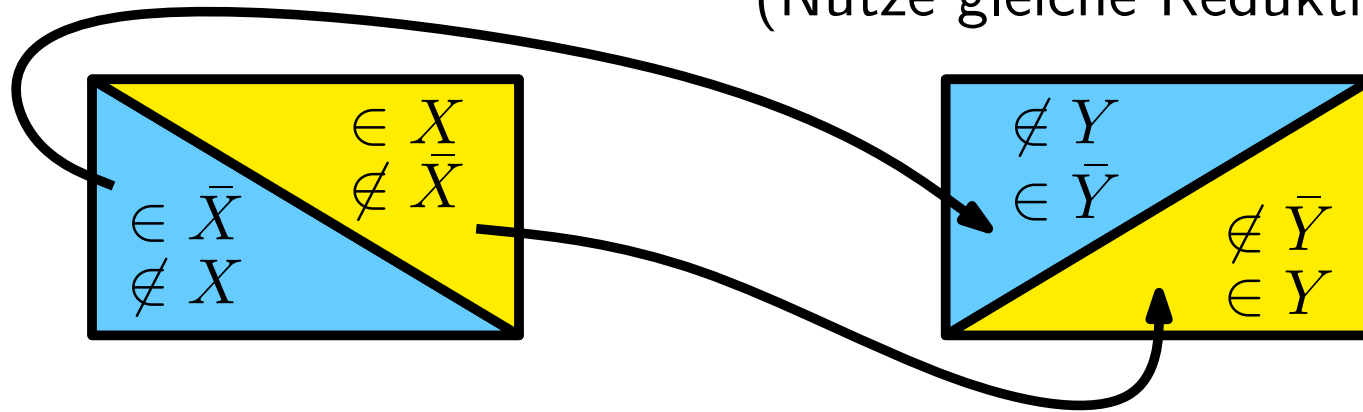
Satz 25

$$\text{EQ}_{\text{TM}} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{A}^{\text{co}}$$

Beweis

Vorüberlegung: $X \leq_m Y \iff \bar{X} \leq_m \bar{Y}$

(Nutze gleiche Reduktionsfunktion)



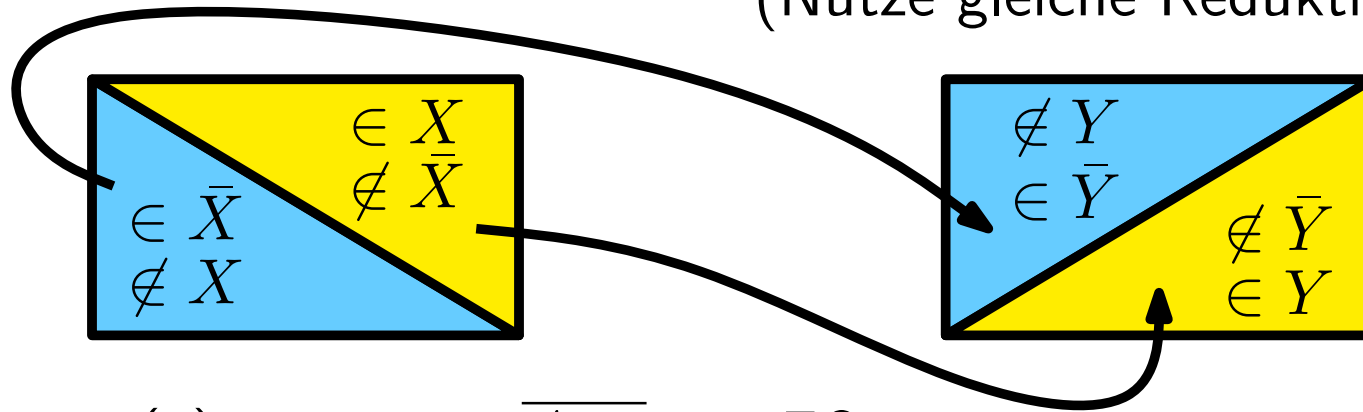
Satz 25

$$EQ_{TM} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin A \cup A^{co}$$

Beweis

Vorüberlegung: $X \leq_m Y \iff \bar{X} \leq_m \bar{Y}$

(Nutze gleiche Reduktionsfunktion)



Wir zeigen:(a)

$$\overline{A_{TM}} \leq_m EQ_{TM}$$

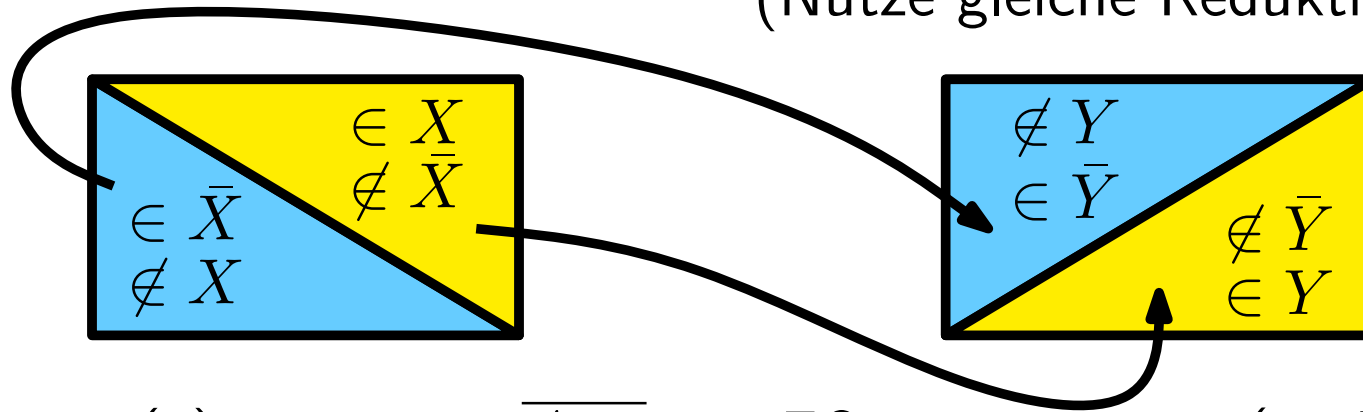
Satz 25

$$\text{EQ}_{\text{TM}} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{A}^{\text{co}}$$

Beweis

Vorüberlegung: $X \leq_m Y \iff \bar{X} \leq_m \bar{Y}$

(Nutze gleiche Reduktionsfunktion)



Wir zeigen:(a)

$$\overline{\text{A}_{\text{TM}}} \leq_m \text{EQ}_{\text{TM}}$$

($\rightarrow \text{EQ}_{\text{TM}} \notin \mathbb{A}$)

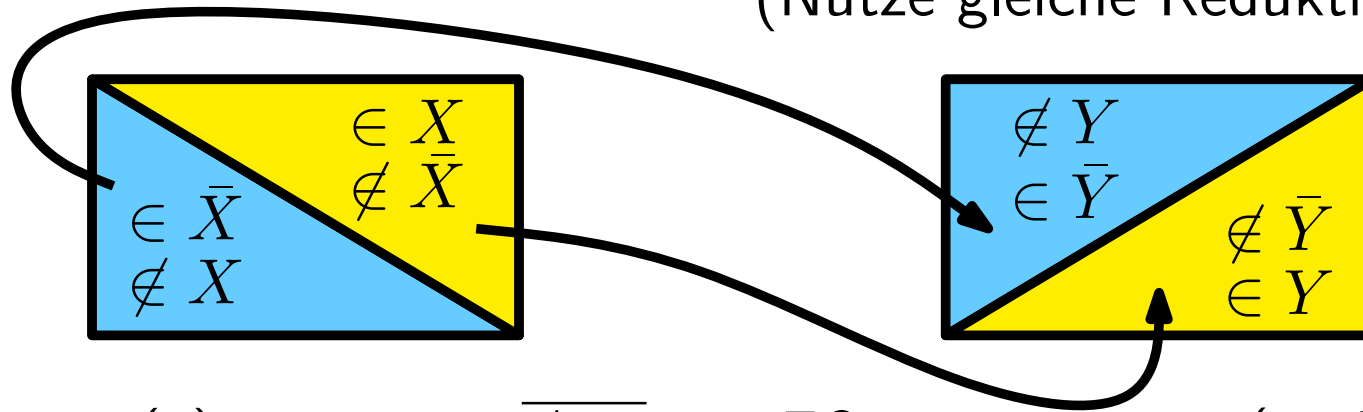
Satz 25

$$\text{EQ}_{\text{TM}} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{A}^{\text{co}}$$

Beweis

Vorüberlegung: $X \leq_m Y \iff \bar{X} \leq_m \bar{Y}$

(Nutze gleiche Reduktionsfunktion)



Wir zeigen: (a)

$$\overline{A_{\text{TM}}} \leq_m \text{EQ}_{\text{TM}}$$

($\rightarrow \text{EQ}_{\text{TM}} \notin \mathbb{A}$)

(b)

$$\overline{A_{\text{TM}}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$$

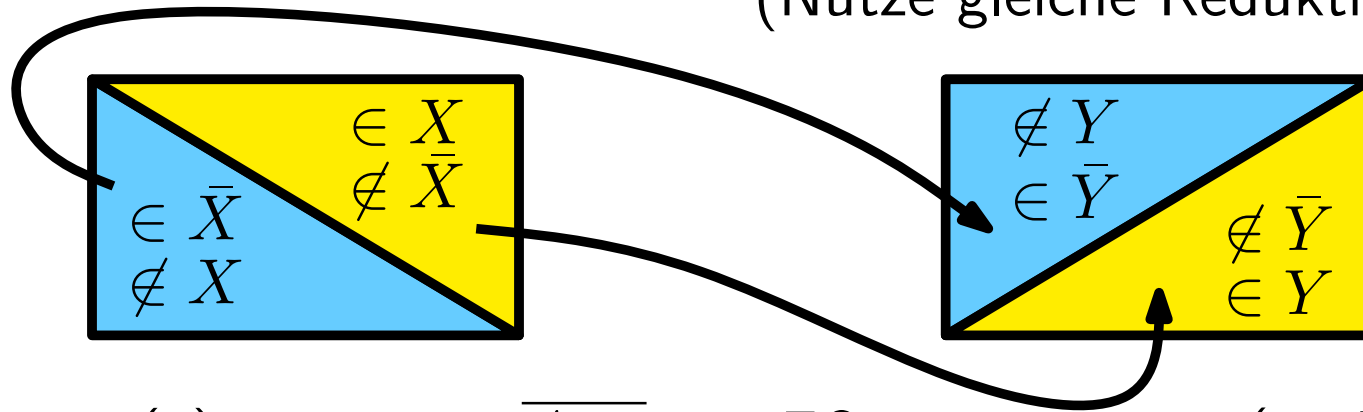
Satz 25

$$\text{EQ}_{\text{TM}} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{A}^{\text{co}}$$

Beweis

Vorüberlegung: $X \leq_m Y \iff \bar{X} \leq_m \bar{Y}$

(Nutze gleiche Reduktionsfunktion)



Wir zeigen: (a)

$$\overline{A_{\text{TM}}} \leq_m \text{EQ}_{\text{TM}}$$

$$(\rightarrow \text{EQ}_{\text{TM}} \notin \mathbb{A})$$

(b)

$$\overline{A_{\text{TM}}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$$

$$(\rightarrow \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}} \notin \mathbb{A})$$

$$\rightarrow \text{EQ}_{\text{TM}} \notin \mathbb{A}^{\text{co}}$$

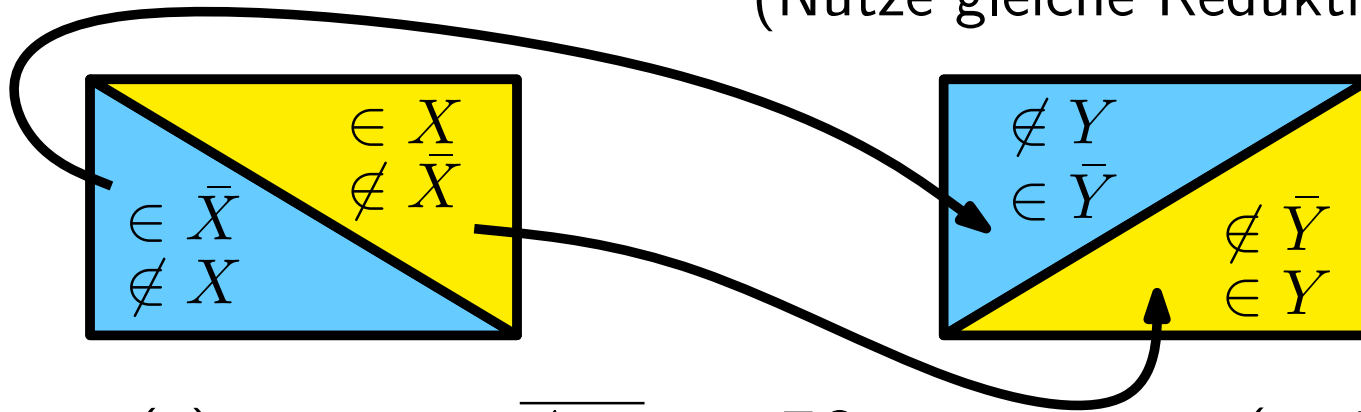
Satz 25

$$\text{EQ}_{\text{TM}} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{A}^{\text{co}}$$

Beweis

Vorüberlegung: $X \leq_m Y \iff \bar{X} \leq_m \bar{Y}$

(Nutze gleiche Reduktionsfunktion)



Wir zeigen:(a)

$$\overline{A_{\text{TM}}} \leq_m \text{EQ}_{\text{TM}}$$

($\rightarrow \text{EQ}_{\text{TM}} \notin \mathbb{A}$)

(b)

$$\overline{A_{\text{TM}}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$$

($\rightarrow \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}} \notin \mathbb{A}$)

$\rightarrow \text{EQ}_{\text{TM}} \notin \mathbb{A}^{\text{co}}$)

Um die Reduktionen anzugeben nutzen wir die Reduktionen der Komplemente nach Vorüberlegung

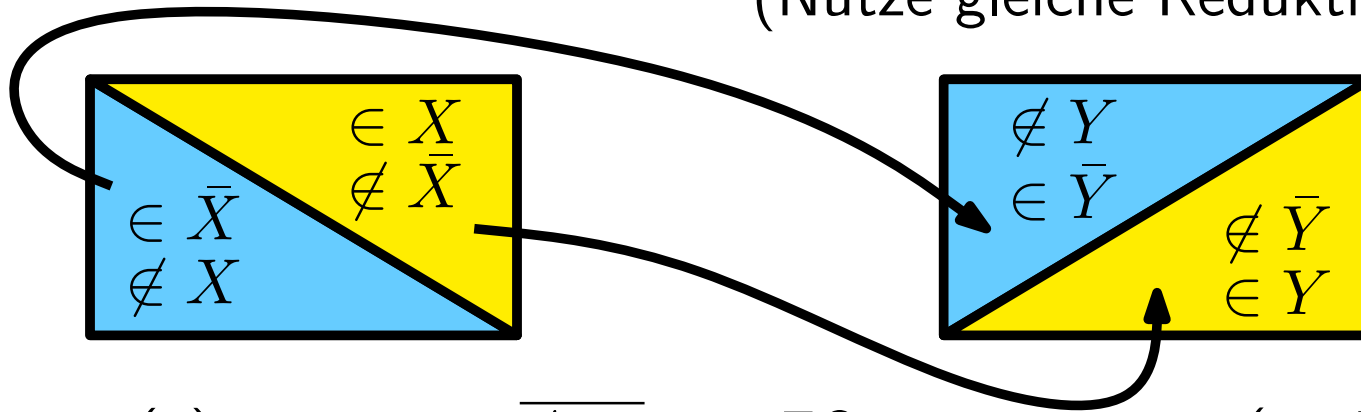
Satz 25

$$\text{EQ}_{\text{TM}} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \} \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{A}^{\text{co}}$$

Beweis

Vorüberlegung: $X \leq_m Y \iff \bar{X} \leq_m \bar{Y}$

(Nutze gleiche Reduktionsfunktion)



Wir zeigen: (a) $\overline{A_{\text{TM}}} \leq_m \text{EQ}_{\text{TM}}$ ($\rightarrow \text{EQ}_{\text{TM}} \notin \mathbb{A}$)
 (b) $\overline{A_{\text{TM}}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$ ($\rightarrow \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}} \notin \mathbb{A}$
 $\rightarrow \text{EQ}_{\text{TM}} \notin \mathbb{A}^{\text{co}}$)

Um die Reduktionen anzugeben nutzen wir die Reduktionen der Komplemente nach Vorüberlegung

Wir zeigen: (a') $A_{\text{TM}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$
 (b') $A_{\text{TM}} \leq_m \text{EQ}_{\text{TM}}$

(a')

$$A_{\text{TM}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$$

(a') $A_{\text{TM}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

- $\langle M, w \rangle$ Eingabe – Reduktion bildet ab auf $\langle M_1, M_2 \rangle$

(a') $A_{\text{TM}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

- $\langle M, w \rangle$ Eingabe – Reduktion bildet ab auf $\langle M_1, M_2 \rangle$

$M_1(z)$: verwirft immer

$M_2(z)$: 1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, gdw. $M(w)$ akz.

$$(a') \quad A_{\text{TM}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$$

■ $\langle M, w \rangle$ Eingabe – Reduktion bildet ab auf $\langle M_1, M_2 \rangle$

$M_1(z)$: verwirft immer

$M_2(z)$: 1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, gdw. $M(w)$ akz.

$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. immer $\Rightarrow L(M_1) \neq L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \in \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

$\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. nie $\Rightarrow L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \notin \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

$$(a') \quad A_{\text{TM}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$$

■ $\langle M, w \rangle$ Eingabe – Reduktion bildet ab auf $\langle M_1, M_2 \rangle$

$M_1(z)$: verwirft immer

$M_2(z)$: 1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, gdw. $M(w)$ akz.

$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. immer $\Rightarrow L(M_1) \neq L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \in \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

$\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. nie $\Rightarrow L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \notin \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

$$(b') \quad A_{\text{TM}} \leq_m \text{EQ}_{\text{TM}}$$

$$(a') \quad A_{\text{TM}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$$

- $\langle M, w \rangle$ Eingabe – Reduktion bildet ab auf $\langle M_1, M_2 \rangle$

$M_1(z)$: verwirft immer

$M_2(z)$: 1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, gdw. $M(w)$ akz.

$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. immer $\Rightarrow L(M_1) \neq L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \in \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

$\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. nie $\Rightarrow L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \notin \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

$$(b') \quad A_{\text{TM}} \leq_m \text{EQ}_{\text{TM}}$$

- $\langle M, w \rangle$ Eingabe – Reduktion bildet ab auf $\langle M_1, M_2 \rangle$

$M_1(z)$: akzeptiert immer

$M_2(z)$: 1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, gdw. $M(w)$ akz.

(a') $A_{\text{TM}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

- $\langle M, w \rangle$ Eingabe – Reduktion bildet ab auf $\langle M_1, M_2 \rangle$

$M_1(z)$: verwirft immer

$M_2(z)$: 1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, gdw. $M(w)$ akz.

$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. immer $\Rightarrow L(M_1) \neq L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \in \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

$\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. nie $\Rightarrow L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \notin \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

(b') $A_{\text{TM}} \leq_m \text{EQ}_{\text{TM}}$

- $\langle M, w \rangle$ Eingabe – Reduktion bildet ab auf $\langle M_1, M_2 \rangle$

$M_1(z)$: akzeptiert immer

$M_2(z)$: 1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, gdw. $M(w)$ akz.

$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. immer $\Rightarrow L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \in \text{EQ}_{\text{TM}}$

$\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. nie $\Rightarrow L(M_1) \neq L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \notin \text{EQ}_{\text{TM}}$

(a') $A_{\text{TM}} \leq_m \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

- $\langle M, w \rangle$ Eingabe – Reduktion bildet ab auf $\langle M_1, M_2 \rangle$

$M_1(z)$: verwirft immer

$M_2(z)$: 1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, gdw. $M(w)$ akz.

$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. immer $\Rightarrow L(M_1) \neq L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \in \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

$\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. nie $\Rightarrow L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \notin \overline{\text{EQ}_{\text{TM}}}$

(b') $A_{\text{TM}} \leq_m \text{EQ}_{\text{TM}}$

- $\langle M, w \rangle$ Eingabe – Reduktion bildet ab auf $\langle M_1, M_2 \rangle$

$M_1(z)$: akzeptiert immer

$M_2(z)$: 1. Simuliere $M(w)$
2. akzeptiere, gdw. $M(w)$ akz.

$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. immer $\Rightarrow L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \in \text{EQ}_{\text{TM}}$

$\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}} \Rightarrow M_2$ akz. nie $\Rightarrow L(M_1) \neq L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \notin \text{EQ}_{\text{TM}}$

