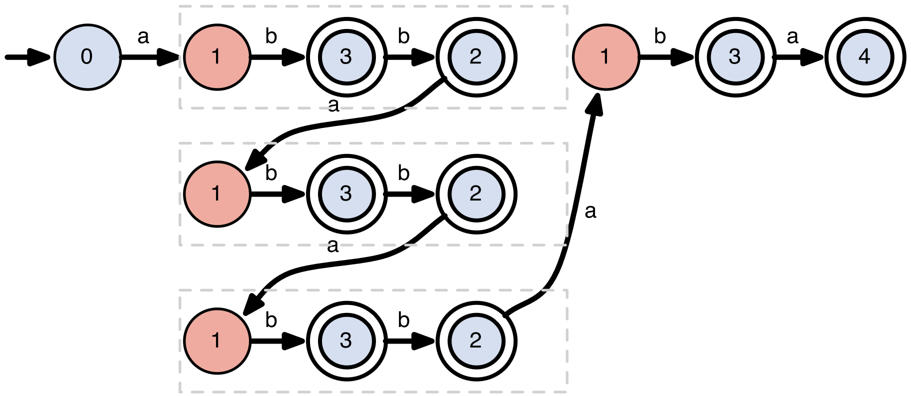
Berechenbarkeitstheorie

16. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster

Das Rekursionstheorem

Das Rekursionstheorem

- **Vorüberlegung:** Gibt es eine TM S, welche bei jeder Eingabe $\langle S \rangle$ auf ihr Ausgabeband schreibt?

Das Rekursionstheorem

- **Vorüberlegung:** Gibt es eine TM S, welche bei jeder Eingabe $\langle S \rangle$ auf ihr Ausgabeband schreibt?
- Programme die ihren Programmcode ausgeben heißen auch **quines**

Das Rekursionstheorem

- **Vorüberlegung:** Gibt es eine TM S, welche bei jeder Eingabe $\langle S\rangle$ auf ihr Ausgabeband schreibt?
- Programme die ihren Programmcode ausgeben heißen auch **quines**

Bsp. (Python)

```
a="a=%c%s%c;print(a%%(34,a,34))";print(a%(34,a,34))
```

Das Rekursionstheorem

- **Vorüberlegung:** Gibt es eine TM S, welche bei jeder Eingabe $\langle S \rangle$ auf ihr Ausgabeband schreibt?
- Programme die ihren Programmcode ausgeben heißen auch **quines**

Bsp. (Python)

```
a="a=%c%s%c;print(a%%(34,a,34))";print(a%(34,a,34))
```

Quine-Turingmaschine S

- S benutzt die folgenden 2 berechenbaren Funkt. als Unterprogramme

Das Rekursionstheorem

- **Vorüberlegung:** Gibt es eine TM S, welche bei jeder Eingabe $\langle S \rangle$ auf ihr Ausgabeband schreibt?
- Programme die ihren Programmcode ausgeben heißen auch **quines**

  Bsp. (Python)

```
a="a=%c%s%c;print(a%%(34,a,34))";print(a%(34,a,34))
```

Quine-Turingmaschine S

- S benutzt die folgenden 2 berechenbaren Funkt. als Unterprogramme

(1) print$(w) := \langle M \rangle$
mit $M(z)$ ersetzt Eingabe z durch w und bewegt Kopf auf Anfang von w

(2) seq$(\langle M_1, M_2 \rangle) := \langle M' \rangle$
mit $M'(z)$ führt zuerst $M_1(z)$ aus und danach M_2 mit dem, was gerade auf dem Band steht

Das Rekursionstheorem

- **Vorüberlegung:** Gibt es eine TM S, welche bei jeder Eingabe $\langle S \rangle$ auf ihr Ausgabeband schreibt?
- Programme die ihren Programmcode ausgeben heißen auch **quines**

  Bsp. (Python)

```
a="a=%c%s%c;print(a%%(34,a,34))";print(a%(34,a,34))
```

Quine-Turingmaschine S

- S benutzt die folgenden 2 berechenbaren Funkt. als Unterprogramme

(1) print$(w) := \langle M \rangle$
mit $M(z)$ ersetzt Eingabe z durch w und bewegt Kopf auf Anfang von w

(2) seq$(\langle M_1, M_2 \rangle) := \langle M' \rangle$
mit $M'(z)$ führt zuerst $M_1(z)$ aus und danach M_2 mit dem, was gerade auf dem Band steht

- sowohl **print** als auch **seq** können leicht durch eine TM umgesetzt werden

- S besteht aus zwei Teilen A,B (jeweils TM-Programme)

Teil A

- S besteht aus zwei Teilen A,B (jeweils TM-Programme)

Teil A

- Teil A mach Folgendes: Ersetze Eingabe durch $\langle B\rangle$ und bewege Kopf auf Anfang

- S besteht aus zwei Teilen A,B (jeweils TM-Programme)

Teil A

- Teil A mach Folgendes: Ersetze Eingabe durch $\langle B \rangle$ und bewege Kopf auf Anfang
- konkret: $\langle A \rangle =$ print$(\langle B \rangle)$

- S besteht aus zwei Teilen A,B (jeweils TM-Programme)

Teil A

- Teil A mach Folgendes: Ersetze Eingabe durch $\langle B\rangle$ und bewege Kopf auf Anfang
- konkret: $\langle A\rangle = \text{print}(\langle B\rangle)$
- Um Teil A zu definieren, muss ich Teil B kennen (kein Problem, Teil B wird unabhängig von Teil A definiert werden)

- S besteht aus zwei Teilen A,B (jeweils TM-Programme)

Teil A

- Teil A mach Folgendes: Ersetze Eingabe durch $\langle B\rangle$ und bewege Kopf auf Anfang
- konkret: $\langle A\rangle = \text{print}(\langle B\rangle)$
- Um Teil A zu definieren, muss ich Teil B kennen (kein Problem, Teil B wird unabhängig von Teil A definiert werden)

Teil B

- Situation: B kennt $\langle B\rangle$ denn das steht auf dem Band

- S besteht aus zwei Teilen A,B (jeweils TM-Programme)

Teil A

- Teil A mach Folgendes: Ersetze Eingabe durch $\langle B\rangle$ und bewege Kopf auf Anfang
- konkret: $\langle A\rangle = \text{print}(\langle B\rangle)$
- Um Teil A zu definieren, muss ich Teil B kennen (kein Problem, Teil B wird unabhängig von Teil A definiert werden)

Teil B

- Situation: B kennt $\langle B\rangle$ denn das steht auf dem Band
- B kann aber auch $\langle A\rangle$, berechnen, denn $\langle A\rangle = \text{print}(\langle B\rangle)$

- S besteht aus zwei Teilen A,B (jeweils TM-Programme)

Teil A

- Teil A mach Folgendes: Ersetze Eingabe durch $\langle B \rangle$ und bewege Kopf auf Anfang
- konkret: $\langle A \rangle = \text{print}(\langle B \rangle)$
- Um Teil A zu definieren, muss ich Teil B kennen (kein Problem, Teil B wird unabhängig von Teil A definiert werden)

Teil B

- Situation: B kennt $\langle B \rangle$ denn das steht auf dem Band
- B kann aber auch $\langle A \rangle$, berechnen, denn $\langle A \rangle = \text{print}(\langle B \rangle)$

> B
>
> 1. Sichere Eingabe $\langle B \rangle$ und berechne $\langle A \rangle = \text{print}(\langle B \rangle)$
> 2. Berechne $\langle M \rangle = \text{seq}(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$
> 3. Drucke $\langle M \rangle$ und lösche Rest

- S besteht aus zwei Teilen A,B (jeweils TM-Programme)

Teil A

- Teil A mach Folgendes: Ersetze Eingabe durch $\langle B\rangle$ und bewege Kopf auf Anfang
- konkret: $\langle A\rangle = \text{print}(\langle B\rangle)$
- Um Teil A zu definieren, muss ich Teil B kennen (kein Problem, Teil B wird unabhängig von Teil A definiert werden)

Teil B

- Situation: B kennt $\langle B\rangle$ denn das steht auf dem Band
- B kann aber auch $\langle A\rangle$, berechnen, denn $\langle A\rangle = \text{print}(\langle B\rangle)$

B

1. Sichere Eingabe $\langle B\rangle$ und berechne $\langle A\rangle = \text{print}(\langle B\rangle)$
2. Berechne $\langle M\rangle = \text{seq}(\langle A\rangle, \langle B\rangle)$
3. Drucke $\langle M\rangle$ und lösche Rest

- S besteht aus zwei Teilen A,B (jeweils TM-Programme)

Teil A

- Teil A mach Folgendes: Ersetze Eingabe durch $\langle B\rangle$ und bewege Kopf auf Anfang
- konkret: $\langle A\rangle = \text{print}(\langle B\rangle)$
- Um Teil A zu definieren, muss ich Teil B kennen (kein Problem, Teil B wird unabhängig von Teil A definiert werden)

Teil B

- Situation: B kennt $\langle B\rangle$ denn das steht auf dem Band
- B kann aber auch $\langle A\rangle$, berechnen, denn $\langle A\rangle = \text{print}(\langle B\rangle)$

> B
>
> 1. Sichere Eingabe $\langle B\rangle$ und berechne $\langle A\rangle = \text{print}(\langle B\rangle)$
> 2. Berechne $\langle M\rangle = \text{seq}(\langle A\rangle, \langle B\rangle)$
> 3. Drucke $\langle M\rangle$ und lösche Rest

- $\langle S\rangle := \text{seq}(\langle A\rangle, \langle B\rangle)$

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- S arbeitet wie folgt
  - Drucke $\langle B \rangle$
  - Berechne $\langle A \rangle$
  - Kombiniere $\langle A \rangle$ und $\langle B \rangle$ zu seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$
  - Drucke seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$

Teil A

Teil B

Zusammenfassung

- S arbeitet wie folgt
  - Drucke $\langle B \rangle$
  - Berechne $\langle A \rangle$
  - Kombiniere $\langle A \rangle$ und $\langle B \rangle$ zu seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$
  - Drucke seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle) = \langle S \rangle$

Teil A

Teil B

S

Zusammenfassung

- S arbeitet wie folgt
  - Drucke $\langle B \rangle$
  - Berechne $\langle A \rangle$
  - Kombiniere $\langle A \rangle$ und $\langle B \rangle$ zu seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$
  - Drucke seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle) = \langle S \rangle$

Teil A

Teil B

S

Rekursionstheorem

Sei T eine TM , welche $t\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechnet. Dann existiert eine durch die TM R beschriebene berechenbare Funktion $r\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, so dass für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ gilt

$$r(w) = t(\langle R \rangle, w).$$

Zusammenfassung

- S arbeitet wie folgt
  - Drucke $\langle B \rangle$
  - Berechne $\langle A \rangle$
  - Kombiniere $\langle A \rangle$ und $\langle B \rangle$ zu seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$
  - Drucke seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle) = \langle S \rangle$

Teil A

Teil B

S

Rekursionstheorem

Sei T eine TM , welche $t\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechnet. Dann existiert eine durch die TM R beschriebene berechenbare Funktion $r\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, so dass für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ gilt

$$r(w) = t(\langle R \rangle, w).$$

Interpretation und Anwendung

Zusammenfassung

- S arbeitet wie folgt
  - Drucke $\langle B \rangle$
  - Berechne $\langle A \rangle$
  - Kombiniere $\langle A \rangle$ und $\langle B \rangle$ zu seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$
  - Drucke seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle) = \langle S \rangle$

Teil A

Teil B

S

Rekursionstheorem

Sei T eine TM , welche $t\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechnet. Dann existiert eine durch die TM R beschriebene berechenbare Funktion $r\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, so dass für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ gilt

$$r(w) = t(\langle R \rangle, w).$$

Interpretation und Anwendung

- wir können für eine TM T annehmen, dass $\langle T \rangle$ Teil der Eingabe war und für uns verfügbar ist

Zusammenfassung

- S arbeitet wie folgt
  - Drucke $\langle B \rangle$
  - Berechne $\langle A \rangle$
  - Kombiniere $\langle A \rangle$ und $\langle B \rangle$ zu seq($\langle A \rangle, \langle B \rangle$)
  - Drucke seq($\langle A \rangle, \langle B \rangle$)$= \langle S \rangle$

Teil A

Teil B

S

Rekursionstheorem

Sei T eine TM , welche $t\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechnet. Dann existiert eine durch die TM R beschriebene berechenbare Funktion $r\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, so dass für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ gilt

$$r(w) = t(\langle R \rangle, w).$$

Interpretation und Anwendung

- wir können für eine TM T annehmen, dass $\langle T \rangle$ Teil der Eingabe war und für uns verfügbar ist
- dann gibt es eine TM R, die genauso arbeitet, ohne dass $\langle R \rangle$ als Eingabe übergeben wurde

Zusammenfassung

- S arbeitet wie folgt
  - Drucke $\langle B \rangle$
  - Berechne $\langle A \rangle$
  - Kombiniere $\langle A \rangle$ und $\langle B \rangle$ zu seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$
  - Drucke seq$(\langle A \rangle, \langle B \rangle) = \langle S \rangle$

Teil A

Teil B

S

Rekursionstheorem

Sei T eine TM , welche $t\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechnet. Dann existiert eine durch die TM R beschriebene berechenbare Funktion $r\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, so dass für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ gilt

$$r(w) = t(\langle R \rangle, w).$$

Interpretation und Anwendung

- wir können für eine TM T annehmen, dass $\langle T \rangle$ Teil der Eingabe war und für uns verfügbar ist
- dann gibt es eine TM R, die genauso arbeitet, ohne dass $\langle R \rangle$ als Eingabe übergeben wurde
- wir können immer annehmen, dass eine TM über ein Unterprogramm `getYourOwnCode` verfügt