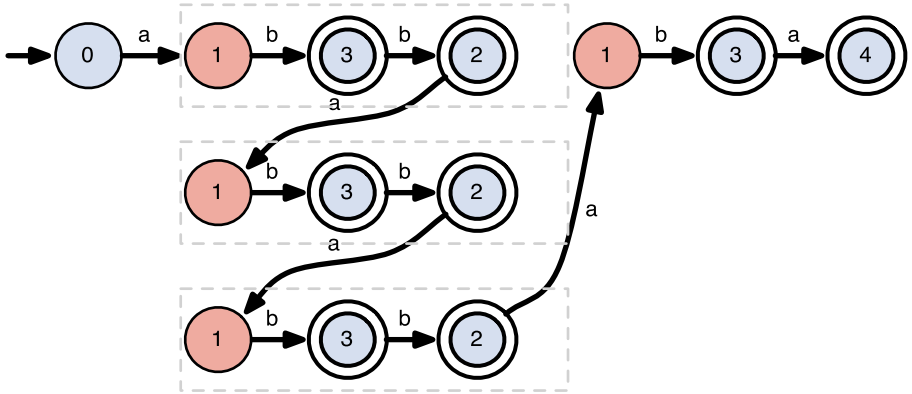
Berechenbarkeitstheorie

19. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster

Erinnerung: Logische Theorien

- Was ist eine mathematische Aussage?

Bsp. $\forall q \exists p \forall x, y \, [p > q \wedge (x, y > 1 \rightarrow xy \neq p)]$
(Es gibt unendlich viele Primzahlen)

Bsp. $\forall q \exists p \forall x, y \, [p > q \wedge (x, y > 1 \rightarrow (xy \neq p \wedge xy \neq p + 2))]$
(*twin prime conjecture*)

- Aussagen sind Wörter über folgendem Alphabet
  - $\wedge, \vee, \neg$ (boolsche Operatoren)
  - (,),[,] (Klammern)
  - x (für Variablen), $x_3 = \mathtt{xxx}$ etc.
  - $\exists, \forall$ (Quantoren)
  - $R_1, R_2, \ldots, R_k$ (Relationen)
  - , (Komma)
- atomare Formeln sind Wörter der Form $R_i(x_{\ell_1}, x_{\ell_2}, \ldots, x_{\ell_j})$, wobei j die Stelligkeit des Symbols R_i heißt
- zu jedem Symbol R_i ist eine Stelligkeit angegeben

- Formeln sind Wörter über über dem Alphabet $\{\mathrm{x}, (,), [,], \forall, \exists, R_1, \ldots, R_k, ,)$ für die gilt:

  1.) es sind atomare Formeln, oder

  2.) es sind Wörter der Form $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$, (ϕ_1) oder $\neg\phi_1$, wobei ϕ_1, ϕ_2 kürzere Formeln sind, oder

  3.) es sind Wörter der Form $\exists x_i[\phi]$, oder $\forall x_i[\phi]$, wobei ϕ eine kürzere Formel ist.

- wir nehmen an, dass alle Formeln in Pränex-Form gegeben sind, d.h. alle Quantoren stehen vorne
- eine Variable heißt freie Variable, wenn sie nicht quantifiziert ist
- eine Aussage auch Satz ist eine Formel ohne freie Variablen

Bsp.1: $\exists x_1[\forall x_2[(R_1(x_2) \wedge R_2(x_2, x_1, x_3))]]$
(Formel mit einer freien Variable x_3)

Bsp.2: $\exists x_1[\forall x_2[(\neg R_1(x_1) \wedge (\neg R_2(x_2) \vee R_3(x_1, x_2)))]]$
(Formel ohne freie Variable = Aussage)

- Was bedeutet eine Aussage? Dazu muss man spezifizieren:

  1.) Was sagen die Relationen aus?

  2.) Aus welchem Universum werden die Variablen gewählt?

  3.) Was bedeuten die boolschen Operationen und Quantoren?

- Das Universum und die Bedeutung der Relationen werden durch das Modell beschrieben.

  formal: $\mathcal{M} = (U, \underbrace{P_1, P_2, \ldots, P_k}) $ heißt Modell

  Menge (Universum) — Bedeutung Relationen (P_i beschreibt R_i)

- Eine Aussage ϕ ist entweder wahr oder falsch in einem Modell
- Wenn ϕ wahr im Modell $\mathcal{M}$, sagen wir $\mathcal{M}$ ist ein Modell für ϕ

Bsp.: $\phi = \forall y[\exists x[R_1(x, x, y)]]$

- $\mathcal{M}_1 = (\mathbf{R}, \text{PLUS})$ ist Modell für ϕ

  $\text{PLUS} = \{(a, b, c) \mid a + b = c\}$
- $\mathcal{M}_2 = (\mathbf{N}, \text{PLUS})$ ist kein Modell für ϕ

- Sprache aller wahren Aussagen für ein Modell $\mathcal{M}$ heißt Theorie von $\mathcal{M}$ - Schreibweise $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$.
- Erste Theorie: Betrachte die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit Addition, d.h. dreistellige Relation $\mathrm{PLUS} = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \mid a+b=c\}$

Satz 29

Sei $(\mathbf{N}, \mathrm{PLUS})$ das Modell der natürlichen Zahlen mit der Addition. Dann ist $\mathrm{Th}((\mathbf{N}, \mathrm{PLUS}))$ entscheidbar.

- Zweite Theorie: Betrachte die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit Addition und Multiplikation, d.h. zwei dreistellige Relationen $\mathrm{PLUS} = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \mid a+b=c\}$ (schreibe kurz:$+$) und $\mathrm{MAL} = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \mid a \cdot b = c\}$ (schreibe kurz:$\cdot$)

Satz 33

Sei $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ das Modell der natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation. Dann ist $\mathrm{Th}((\mathbf{N}, +, \cdot))$ **nicht entscheidbar.**

Beweisbare Aussagen

- Sei $\pi = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ eine Folge von Aussagen für die gilt:
  - S_1 ist aximomatisch definierte wahre Aussage
  - S_{i+1} folgt aus S_i durch axiomatisch beschriebene Ableitungsregeln
- Sei π heißt **Beweis von** S_n.
- Anforderungen an ein *Beweissystem*:

  ① $\{\langle \phi, \pi \rangle \mid \ \pi$ ist Beweis von $\phi\}$ ist entscheidbar

  ② $\forall \phi\, [\exists$ Beweis π für $\phi] \longrightarrow \phi \in \mathrm{Th}(\cdot)$
  (wenn es einen Beweis gibt, ist ϕ in der betrachteten Theorie wahr)
- Ein Beweissystem, welches ② erfüllt heißt korrekt.
- Notation: **Pr(Th(X))** bezeichnet die Menge aller beweisbaren Aussagen von $\mathrm{Th}(X)$ im betrachteten Beweissystem

Sätze über Beweisbare Aussagen

Satz 34

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot)) \in \mathbb{A}$$

Satz 35

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot)) \subsetneq \mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot)$$

Beweisidee

- Beweis durch Widerspruch!
- wir nehmen an, dass $\mathrm{Pr}(\mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot)) = \mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot)$
- Konstruiere mittels Aufzählers B für $\mathrm{Pr}(\mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot))$ einen Entscheider D für $\mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot)$
- Nach Satz 33 ist $\mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot)$ aber nicht entscheidbar.

Ein nicht beweisbarer wahrer Satz

- Sei die Turingmaschine S wie folgt konstruiert

$S(z)$
1. Konstruiere $\langle S \rangle$
2. $\psi = \neg\exists y[\phi_{\langle S,\varepsilon\rangle}]$
3. Simuliere $B(\psi)$ und akzeptiere, gdw, Simulation akzeptiert

- $\phi_{\langle S,\varepsilon\rangle}$ wie im Beweis von Satz 33 definiert (Formel, die prüft, ob y Berechnungspfad für $S(\varepsilon)$)
- B ist die TM, die alle beweisbaren Aussagen erkennt
- Das heißt ψ ist wahr $\iff$ $S(\varepsilon)$ akzeptiert nicht

Satz 36

Die Aussage $\psi = \neg\exists y[\phi_{\langle S,\varepsilon\rangle}]$ ist wahr aber nicht beweisbar in der Erweiterung von $\mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot)$.

Beweis Satz 36

- Zur Erinnerung:
  $\psi = \neg\exists y[\phi_{\langle S,\varepsilon\rangle}]$ ist wahr $\iff$ $S(\varepsilon)$ akzeptiert nicht

> $S(z)$
> 1. Konstruiere $\langle S\rangle$
> 2. $\psi = \neg\exists y[\phi_{\langle S,\varepsilon\rangle}]$
> 3. Simuliere $B(\psi)$ und akzeptiere, gdw, Simulation akzeptiert

- Angenommen B findet Beweis für ψ:
  $\Rightarrow$ S akzeptiert alles, also auch ε
  $\Rightarrow$ ψ ist nicht wahr
  $\Rightarrow$ es gibt keinen Beweis für $\psi \rightarrow$ Widerspruch
- Demnach findet B keinen Beweis:
  $\Rightarrow$ S stoppt nie, daraus folgt $S(\varepsilon)\uparrow$
  $\Rightarrow$ $S(\varepsilon)$ akzeptiert nicht, und demnach ist ψ eine wahre Aussage

□

Nachbetrachtung zum Satz 36

- Ist es nicht widersprüchlich, das wir beweisen konnten, dass eine Aussage "wahr aber nicht beweisbar" ist?

$\rightarrow$ Beweis der Nichtbeweisbarkeit innerhalb der Erweiterung von $\mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot)$ wurde innerhalb eines anderen Systems erbracht

Formulierung als Unvollständigkeitssatz

- System X heißt **konsistent**, gdw. $\neg\exists\phi[\phi \in X \wedge \neg\phi \in X]$
- System X heißt **vollständig**, gdw. $\forall\phi[\phi \in X \vee \neg\phi \in X]$
- **vollständig und konsistent**:
  $\forall\phi[(\phi \in X \vee \neg\phi \in X) \wedge (\phi \notin X \vee \neg\phi \notin X)]$

widerspricht

Gödels 1. Unvollständigkeitssatz

Jedes axiomatische Beweissystem X, in welchem sich der Begriff des Beweis für Aussagen aus $\mathrm{Th}(\mathbf{N}, +, \cdot)$ formalisieren lässt, ist entweder konsistent oder vollständig.

- Satz 35: Es gibt wahre Aussagen in X, die nicht beweisbar sind. Unter Annahme $\forall\phi[\phi \in X \vee \phi \notin X]$ gilt $\exists\phi[\phi \notin X \wedge \neg\phi \notin X]$

4. Kapitel

Komplexitätstheorie

- **Bislang:** Was kann ich im Modell X berechnen?
- **Neue Frage:** Was kann ich im Modell X mit eingeschränkten Ressourcen berechnen?
- **Ressourcen:** Zeit, Speicher, Energie, ...
- **Motivation:** Eventuell sind Probleme entscheidbar, aber die Berechnung ist nicht effizient durchführbar

Laufzeit einer Turingmaschine

- Laufzeit von M hängt von der Eingabe w ab

$$T(w \in \Sigma^*) := \#\text{ Schritte für Lauf von } M(w)$$

(det. 1-Band TM)

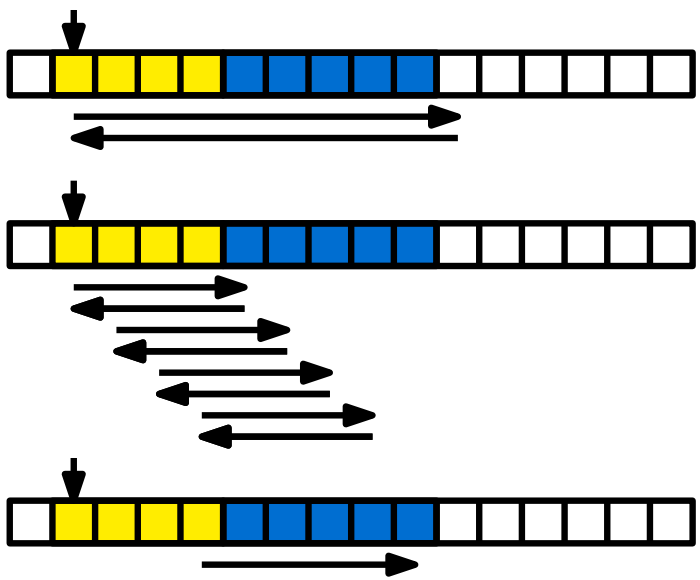
- Laufzeit wird meist in Bezug zur Eingabelänge gemessen

$$t(n \in \mathbf{N}) := \max_{w \in \Sigma^n} T(w)$$

Beispiel Entscheider M für $\{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$

$M(z)$
1. Prüfe ob z von der Form 0^*1^* ist
2. Streiche für jede 0 eine 1
3. Kontrolliere ob keine 1 übrig bleibt

- Laufzeit für $w = 0^k 1^\ell$, $|w| = k + \ell = n$
  1. 2n Schritte wenn ich 1. Zeichen markiere
  2. $2k \min\{k, \ell\}$ Schritte
  3. $k + 1$ Schritte bei $\ell \geq k$



- $T(w) \leq 2n + 2k \min\{k, l\} + k + 1 \leq 2n + n^2 + n/2 + 1$
- $t(n) = 5/2n + n^2/2 + 1$

- genaue Angabe der Laufzeit oft schwierig (und unnötig)
- wir greifen auf assymptotische Schranken zurück ($\rightarrow O$,Ω,Θ-Notation)
- im Beispiel: $t(n) = \Theta(n^2)$

Definition

Sei $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, dann bezeichnet

$$\text{TIME}(f(n)) = \{L \mid \exists \text{TM } M \text{ mit } t_M(n) = O(f(n))\}$$

die **Zeitkomplexitätsklasse** von $f(n)$.

- Achtung: TIME ist Menge von Sprachen (Problemen), nicht von Turingmaschinen
- Bsp.: $\{0^k 1^k \mid k \geq 0\} \in \text{TIME}(n^2)$
- Es gilt sogar $\{0^k 1^k \mid k \geq 0\} \in \text{TIME}(n \log n)$
  - Teste ob $\#0 = k$ und $\#1 = \ell$ identisch
  - $k = \ell \iff \forall t \leq \log(n) : k \equiv \ell \mod 2^t$
  - bitweises Vergleichen von k und ℓ

  } $\log n$ Bit-Tests, $O(n)$ Zeit pro Bit

Die Klasse P

Definition

Die Komplexitätsklasse P bezeichnet alle Probleme, die in Polynomialzeit von einer deterministischen TM entschieden werden können. Das heißt:

$$\mathsf{P} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathsf{TIME}(n^k)$$

- Bsp.: $\{0^k 1^k \mid k \geq 0\} \in \mathsf{P}$
- **Anmerkung** Simulation eines TM-äquivalenten Berechnungsmodells durch ein anderes kostet i.A. einen polynomiellen Faktor
  $\rightarrow$ Beschreibung von P relativ unabhängig vom Berechnungsmodell
- **Konvention:** Probleme aus P sind effizient lösbar
- Probleme müssen sinnvoll kodiert sein
  - $\langle k \rangle = \mathsf{bin}(k) \leftrightarrow \langle k \rangle = 1^k$
  - exponentieller Unterschied der Länge
  - Laufzeit wird relativ zur Eingabelänge gemessen!

Die Klasse NP

- NP beinhaltet die Probleme, deren Lösung sich leicht verifizieren lässt
- **Def.:** Ein **Verifizierer für eine Sprache** L ist eine TM für die gilt: $L = \{w \mid \exists z \in \Sigma^* : \langle w, z \rangle$ wird von V akzeptiert$\}$

z heißt Zeuge oder Zertifikat

Laufzeit von V wird bzgl. $\langle w, z \rangle$ gemessen

- **Def.:** Ein Verifizierer V für L heißt **polynomiell**, gdw.
  (1) $\exists k$, sodass $L = \{w \mid \exists z \in \Sigma^* : |z| \leq |w|^k$ und $\langle w, z \rangle \in L(V)\}$
  (2) V hat polynomielle Laufzeit

Definition

Die Komplexitätsklasse NP umfasst alle Sprachen, für die es einen polynomiellen Verifizierer gibt.

- Wenn L aus P dann ist der polynomielle Entscheider für L auch ein polynomieller Verifizierer für L (er ignoriert den Zeugen)
- Es folgt: P $\subseteq$ NP