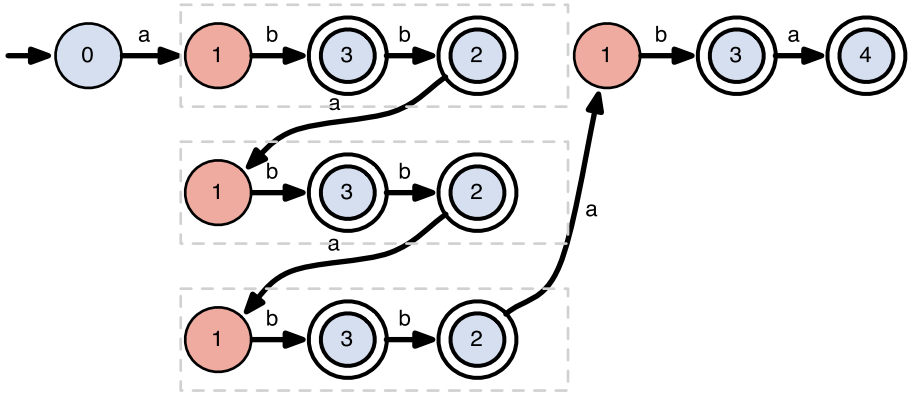
Berechenbarkeitstheorie

21. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster

Die Klassen P und NP

Die Klassen P und NP

Definition

Die Komplexitätsklasse P bezeichnet alle Probleme, die in Polynomialzeit von einer deterministischen TM entschieden werden können. Das heißt:

$$\mathsf{P} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathsf{TIME}(n^k)$$

Die Klassen P und NP

Definition

Die Komplexitätsklasse P bezeichnet alle Probleme, die in Polynomialzeit von einer deterministischen TM entschieden werden können. Das heißt:

$$\mathsf{P} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathsf{TIME}(n^k)$$

- **Def.:** Ein **Verifizierer für eine Sprache** L ist eine TM für die gilt: $L = \{w \mid \exists z \in \Sigma^* : \langle w, z \rangle \text{ wird von } V \text{ akzeptiert}\}$

Die Klassen P und NP

Definition

Die Komplexitätsklasse P bezeichnet alle Probleme, die in Polynomialzeit von einer deterministischen TM entschieden werden können. Das heißt:

$$\mathsf{P} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathsf{TIME}(n^k)$$

- **Def.:** Ein **Verifizierer für eine Sprache** L ist eine TM für die gilt:
  $L = \{w \mid \exists z \in \Sigma^* : \langle w, z \rangle \text{ wird von } V \text{ akzeptiert}\}$
  - z heißt Zeuge oder Zertifikat

Die Klassen P und NP

Definition

Die Komplexitätsklasse P bezeichnet alle Probleme, die in Polynomialzeit von einer deterministischen TM entschieden werden können. Das heißt:

$$\mathrm{P} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{TIME}(n^k)$$

- **Def.:** Ein **Verifizierer für eine Sprache** L ist eine TM für die gilt:
  $L = \{w \mid \exists z \in \Sigma^* : \langle w, z \rangle \text{ wird von } V \text{ akzeptiert}\}$

  z heißt Zeuge oder Zertifikat Laufzeit von V wird bzgl. $\langle w, z \rangle$ gemessen

Die Klassen P und NP

Definition

Die Komplexitätsklasse P bezeichnet alle Probleme, die in Polynomialzeit von einer deterministischen TM entschieden werden können. Das heißt:

$$\mathrm{P} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{TIME}(n^k)$$

- **Def.:** Ein **Verifizierer für eine Sprache** L ist eine TM für die gilt:
  $L = \{w \mid \exists z \in \Sigma^* : \langle w, z \rangle \text{ wird von } V \text{ akzeptiert}\}$
  z heißt Zeuge oder Zertifikat Laufzeit von V wird bzgl. $\langle w, z \rangle$ gemessen
- **Def.:** Ein Verifizierer V für L heißt **polynomiell**, gdw.
  (1) $\exists k$, sodass $L = \{w \mid \exists z \in \Sigma^* : |z| \leq |w|^k \text{ und } \langle w, z \rangle \in L(V)\}$
  (2) V hat polynomielle Laufzeit

Die Klassen P und NP

Definition

Die Komplexitätsklasse P bezeichnet alle Probleme, die in Polynomialzeit von einer deterministischen TM entschieden werden können. Das heißt:

$$\mathrm{P} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{TIME}(n^k)$$

- **Def.:** Ein **Verifizierer für eine Sprache** L ist eine TM für die gilt:
  $L = \{w \mid \exists z \in \Sigma^* : \langle w, z \rangle \text{ wird von } V \text{ akzeptiert}\}$
  z heißt Zeuge oder Zertifikat Laufzeit von V wird bzgl. $\langle w, z \rangle$ gemessen
- **Def.:** Ein Verifizierer V für L heißt **polynomiell**, gdw.
  (1) $\exists k$, sodass $L = \{w \mid \exists z \in \Sigma^* : |z| \leq |w|^k \text{ und } \langle w, z \rangle \in L(V)\}$
  (2) V hat polynomielle Laufzeit

Definition

Die Komplexitätsklasse NP umfasst alle Sprachen, für die es einen polynomiellen Verifizierer gibt.

Beispiele NP

Beispiele NP

SAT (Erfüllbarkeit)

Eingabe: Boolsche Formel ϕ in den Variablen x_i

Frage: Gibt es eine ϕ erfüllende Belegung der Variablen x_i?

Beispiele NP

SAT (Erfüllbarkeit)

Eingabe: Boolsche Formel ϕ in den Variablen x_i

Frage: Gibt es eine ϕ erfüllende Belegung der Variablen x_i?

Bsp. $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \vee \neg x_2) \vee \neg x_3$

Beispiele NP

SAT (Erfüllbarkeit)

Eingabe: Boolsche Formel ϕ in den Variablen x_i

Frage: Gibt es eine ϕ erfüllende Belegung der Variablen x_i?

Bsp. $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \vee \neg x_2) \vee \neg x_3$

$\rightarrow$ erfüllbar mit z.B. $x_1 = 1, x_2 = 1$ und $x_3 = 1$

Beispiele NP

SAT (Erfüllbarkeit)

Eingabe: Boolsche Formel ϕ in den Variablen x_i

Frage: Gibt es eine ϕ erfüllende Belegung der Variablen x_i?

Bsp. $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \vee \neg x_2) \vee \neg x_3$

$\rightarrow$ erfüllbar mit z.B. $x_1 = 1, x_2 = 1$ und $x_3 = 1$

$x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1)$

Beispiele NP

SAT (Erfüllbarkeit)

Eingabe: Boolsche Formel ϕ in den Variablen x_i

Frage: Gibt es eine ϕ erfüllende Belegung der Variablen x_i?

Bsp. $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \vee \neg x_2) \vee \neg x_3$

$\rightarrow$ erfüllbar mit z.B. $x_1 = 1, x_2 = 1$ und $x_3 = 1$

$x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1)$

$\rightarrow$ nicht erfüllbar (Wahrheitstabelle ausfüllen)

Beispiele NP

SAT (Erfüllbarkeit)

Eingabe: Boolsche Formel ϕ in den Variablen x_i

Frage: Gibt es eine ϕ erfüllende Belegung der Variablen x_i?

Bsp. $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \vee \neg x_2) \vee \neg x_3$

$\rightarrow$ erfüllbar mit z.B. $x_1 = 1, x_2 = 1$ und $x_3 = 1$

$x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1)$

$\rightarrow$ nicht erfüllbar (Wahrheitstabelle ausfüllen)

- Zeuge ist der Vektor der Variablenbelegung

Beispiele NP

SAT (Erfüllbarkeit)

Eingabe: Boolsche Formel ϕ in den Variablen x_i

Frage: Gibt es eine ϕ erfüllende Belegung der Variablen x_i?

Bsp. $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \vee \neg x_2) \vee \neg x_3$

$\rightarrow$ erfüllbar mit z.B. $x_1 = 1, x_2 = 1$ und $x_3 = 1$

$x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1)$

$\rightarrow$ nicht erfüllbar (Wahrheitstabelle ausfüllen)

- Zeuge ist der Vektor der Variablenbelegung

Verifizierer zu SAT

1. Ersetze alle Variablen durch ihre Belegung
2. Suche eine atomare Verbindung mit $\wedge, \vee, \neg$ und ersetze sie (zum Beispiel ersetze $1 \vee 0$ durch 1)
3. Wiederhole bis Ausdruck ausgewertet und akzeptiere, wenn Ergebnis 1

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

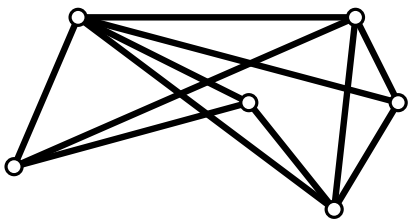
Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Bsp.



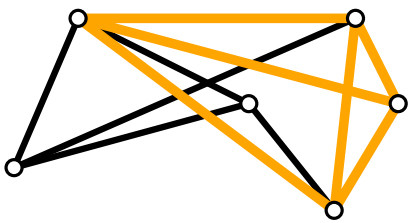
$k = 4$

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Bsp.



$k = 4$

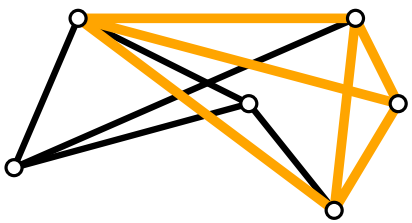
Graph besitzt 4-Clique

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

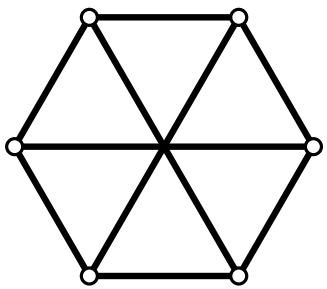
Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Bsp.



$k = 4$

Graph besitzt 4-Clique



$k = 3$

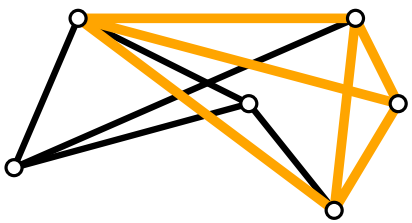
Graph besitzt keine 3-Clique

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

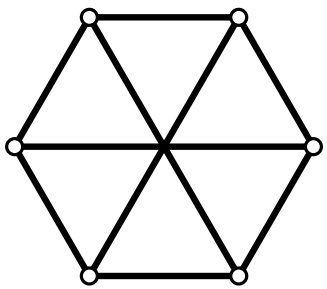
Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Bsp.



$k = 4$

Graph besitzt 4-Clique



$k = 3$

Graph besitzt keine 3-Clique

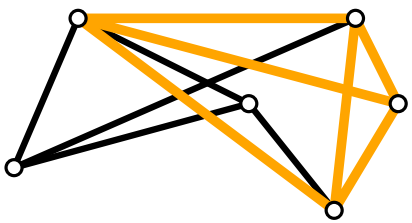
- Zeuge ist Auswahl der Knoten der Clique

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

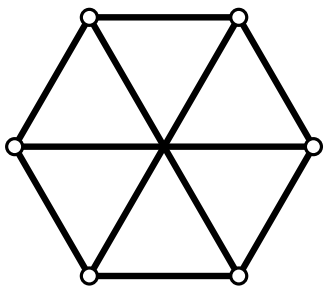
Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Bsp.



$k = 4$

Graph besitzt 4-Clique



$k = 3$

Graph besitzt keine 3-Clique

- Zeuge ist Auswahl der Knoten der Clique

Verifizierer zu CLIQUE

1. Prüfe für jedes Paar von ausgewählten Knoten (des Zeugen), ob zwischen diesen Knoten eine Kante existiert
2. Ist jedes solche Paar durch eine Kante verbunden, akzeptiere

SUBSET-SUM

Eingabe: Multimenge $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, X_i \in \mathbf{N}$ und $B \in \mathbf{N}$

Frage: Existiert $S' \subseteq S$ mit $\sum_{X \in S'} X = B$

SUBSET-SUM

Eingabe: Multimenge $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, X_i \in \mathbf{N}$ und $B \in \mathbf{N}$

Frage: Existiert $S' \subseteq S$ mit $\sum_{X \in S'} X = B$

Bsp.

$S = \{2, 3, 4, 8, 19\}$ $\quad B = 25$

SUBSET-SUM

Eingabe: Multimenge $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, X_i \in \mathbf{N}$ und $B \in \mathbf{N}$

Frage: Existiert $S' \subseteq S$ mit $\sum_{X \in S'} X = B$

Bsp.

$S = \{2, 3, 4, 8, 19\}$ $B = 25$ $2 + 4 + 19 = 25$, also ja

SUBSET-SUM

Eingabe: Multimenge $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, X_i \in \mathbf{N}$ und $B \in \mathbf{N}$

Frage: Existiert $S' \subseteq S$ mit $\sum_{X \in S'} X = B$

Bsp.

$S = \{2, 3, 4, 8, 19\}$ $B = 25$ $2 + 4 + 19 = 25$, also ja

$S = \{1, 1, 4, 8, 19\}$ $B = 30$

SUBSET-SUM

Eingabe: Multimenge $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, X_i \in \mathbf{N}$ und $B \in \mathbf{N}$

Frage: Existiert $S' \subseteq S$ mit $\sum_{X \in S'} X = B$

Bsp.

$S = \{2, 3, 4, 8, 19\}$	$B = 25$	$2 + 4 + 19 = 25$, also ja
$S = \{1, 1, 4, 8, 19\}$	$B = 30$	nicht möglich

SUBSET-SUM

Eingabe: Multimenge $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, X_i \in \mathbf{N}$ und $B \in \mathbf{N}$
Frage: Existiert $S' \subseteq S$ mit $\sum_{X \in S'} X = B$

Bsp.

$S = \{2, 3, 4, 8, 19\}$ $B = 25$ $2 + 4 + 19 = 25$, also ja

$S = \{1, 1, 4, 8, 19\}$ $B = 30$ nicht möglich

- Zeuge ist Auswahl S'

SUBSET-SUM

Eingabe: Multimenge $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, X_i \in \mathbf{N}$ und $B \in \mathbf{N}$
Frage: Existiert $S' \subseteq S$ mit $\sum_{X \in S'} X = B$

Bsp.

$S = \{2, 3, 4, 8, 19\}$ $B = 25$ $2 + 4 + 19 = 25$, also ja

$S = \{1, 1, 4, 8, 19\}$ $B = 30$ nicht möglich

- Zeuge ist Auswahl S'

Verifizierer zu SUBSET-SUM

1. Prüfe ob $S' \subseteq S$
2. Prüfe, ob $\sum_{X \in S'} X = B$
3. Wenn beides erfolgreich, akzeptiere

Satz 38

$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{TIME}\left(2^{(n^k)}\right)$$

Satz 38

$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{TIME}\left(2^{(n^k)}\right)$$

Beweis

- wir müssen zeigen, dass jede Sprache aus NP in TIME$(2^{(n^k)})$, für ein $k \in \mathbf{N}$

Satz 38

$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{TIME}\left(2^{(n^k)}\right)$$

Beweis

- wir müssen zeigen, dass jede Sprache aus NP in TIME$(2^{(n^k)})$, für ein $k \in \mathbf{N}$
- sei $L \in$ NP mit polynomiellen Verifizierer V

Satz 38

$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{TIME}\left(2^{(n^k)}\right)$$

Beweis

- wir müssen zeigen, dass jede Sprache aus NP in TIME$(2^{(n^k)})$, für ein $k \in \mathbf{N}$
- sei $L \in$ NP mit polynomiellen Verifizierer V
- wir konstruieren Entscheider M für L wie folgt

Satz 38

$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{TIME}\left(2^{(n^k)}\right)$$

Beweis

- wir müssen zeigen, dass jede Sprache aus NP in TIME$(2^{(n^k)})$, für ein $k \in \mathbf{N}$
- sei $L \in$ NP mit polynomiellen Verifizierer V
- wir konstruieren Entscheider M für L wie folgt

$M(w)$

1. Zähle alle möglichen Zeugen auf (d.h. alle Worte aus Σ^*)
   $\rightarrow$ für jeden Zeugen z simuliere $V(\langle w, z \rangle)$
2. akzeptiere, sobald V akzeptiert, ansonsten prüfe nächstes z

Satz 38

$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{TIME}\left(2^{(n^k)}\right)$$

Beweis

- wir müssen zeigen, dass jede Sprache aus NP in TIME$(2^{(n^k)})$, für ein $k \in \mathbf{N}$
- sei $L \in$ NP mit polynomiellen Verifizierer V
- wir konstruieren Entscheider M für L wie folgt

$M(w)$
1. Zähle alle möglichen Zeugen auf (d.h. alle Worte aus Σ^*)
   $\rightarrow$ für jeden Zeugen z simuliere $V(\langle w, z \rangle)$
2. akzeptiere, sobald V akzeptiert, ansonsten prüfe nächstes z

- es gibt $2^{O(p(n))}$ Zeugen, wobei p ein Polynom

Satz 38

$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{TIME}\left(2^{(n^k)}\right)$$

Beweis

- wir müssen zeigen, dass jede Sprache aus NP in TIME$(2^{(n^k)})$, für ein $k \in \mathbf{N}$
- sei $L \in$ NP mit polynomiellen Verifizierer V
- wir konstruieren Entscheider M für L wie folgt

$M(w)$
1. Zähle alle möglichen Zeugen auf (d.h. alle Worte aus Σ^*)
   $\rightarrow$ für jeden Zeugen z simuliere $V(\langle w, z \rangle)$
2. akzeptiere, sobald V akzeptiert, ansonsten prüfe nächstes z

- es gibt $2^{O(p(n))}$ Zeugen, wobei p ein Polynom
- pro Zeugen z benötigt Simulation $p'(|\langle w, z \rangle|)$ Zeit, wobei p' Polynom

Satz 38

$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{TIME}\left(2^{(n^k)}\right)$$

Beweis

- wir müssen zeigen, dass jede Sprache aus NP in TIME$(2^{(n^k)})$, für ein $k \in \mathbf{N}$
- sei $L \in$ NP mit polynomiellen Verifizierer V
- wir konstruieren Entscheider M für L wie folgt

$M(w)$
1. Zähle alle möglichen Zeugen auf (d.h. alle Worte aus Σ^*)
   $\rightarrow$ für jeden Zeugen z simuliere $V(\langle w, z\rangle)$
2. akzeptiere, sobald V akzeptiert, ansonsten prüfe nächstes z

- es gibt $2^{O(p(n))}$ Zeugen, wobei p ein Polynom
- pro Zeugen z benötigt Simulation $p'(|\langle w, z\rangle|)$ Zeit, wobei p' Polynom
- L ist aus TIME$(2^{O(p(n))}p'(n + p(n))) \subset$ EXPTIME

□

NP-Schwerheit

Definition

Seien $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma'^*$ Sprachen. Die Funktion f heißt **polyzeit Reduktion von L_1 auf L_2**, gdw.

1. f ist berechenbar und total,
2. $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$,
3. f wird durch eine TM berechnet deren Laufzeit ein Polynom in der Eingabelänge ist

NP-Schwerheit

Definition

Seien $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma'^*$ Sprachen. Die Funktion f heißt **polyzeit Reduktion von L_1 auf L_2**, gdw.

1. f ist berechenbar und total,
2. $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$,
3. f wird durch eine TM berechnet deren Laufzeit ein Polynom in der Eingabelänge ist

Definition

Eine Sprache L_1 ist **polyzeit reduzierbar** auf L_2, gdw. es eine polyzeit Reduktion von L_1 auf L_2 gibt.
Schreibweise: $L_1 \leq_p L_2$

NP-Schwerheit

Definition

Seien $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma'^*$ Sprachen. Die Funktion f heißt **polyzeit Reduktion von L_1 auf L_2**, gdw.

1. f ist berechenbar und total,
2. $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$,
3. f wird durch eine TM berechnet deren Laufzeit ein Polynom in der Eingabelänge ist

Definition

Eine Sprache L_1 ist **polyzeit reduzierbar** auf L_2, gdw. es eine polyzeit Reduktion von L_1 auf L_2 gibt.
Schreibweise: $L_1 \leq_p L_2$

- modifizierter Reduktionsbegriff erlaubt es uns Probleme zu "übersetzen" unter Beibehaltung von polynomiellen Laufzeiten ihrer Entscheider

Satz 39

Wenn $B \in \mathsf{P}$ und $A \leq_p B$, dann auch $A \in \mathsf{P}$.

Satz 39

Wenn $B \in \mathsf{P}$ und $A \leq_p B$, dann auch $A \in \mathsf{P}$.

Beweis

- Sei M der polynomieller Entscheider für B und f eine polyzeit Reduktion von A auf B.

Satz 39

Wenn $B \in \mathsf{P}$ und $A \leq_p B$, dann auch $A \in \mathsf{P}$.

Beweis

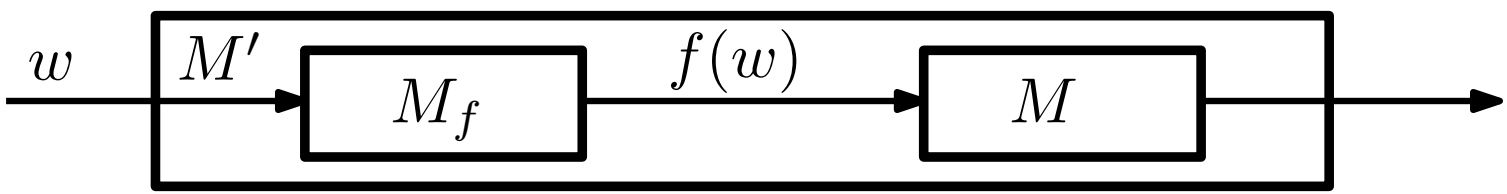
- Sei M der polynomieller Entscheider für B und f eine polyzeit Reduktion von A auf B.
- Sei M_f TM, die f in polyzeit berechnet.

Satz 39

Wenn $B \in \mathsf{P}$ und $A \leq_p B$, dann auch $A \in \mathsf{P}$.

Beweis

- Sei M der polynomieller Entscheider für B und f eine polyzeit Reduktion von A auf B.
- Sei M_f TM, die f in polyzeit berechnet.
- Konstuiere TM M', als Hintereinanderschaltung von M und M_f

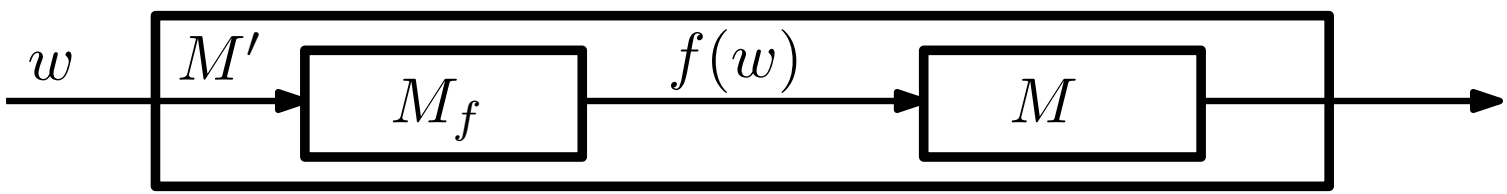


Satz 39

Wenn $B \in \mathsf{P}$ und $A \leq_p B$, dann auch $A \in \mathsf{P}$.

Beweis

- Sei M der polynomieller Entscheider für B und f eine polyzeit Reduktion von A auf B.
- Sei M_f TM, die f in polyzeit berechnet.
- Konstuiere TM M', als Hintereinanderschaltung von M und M_f



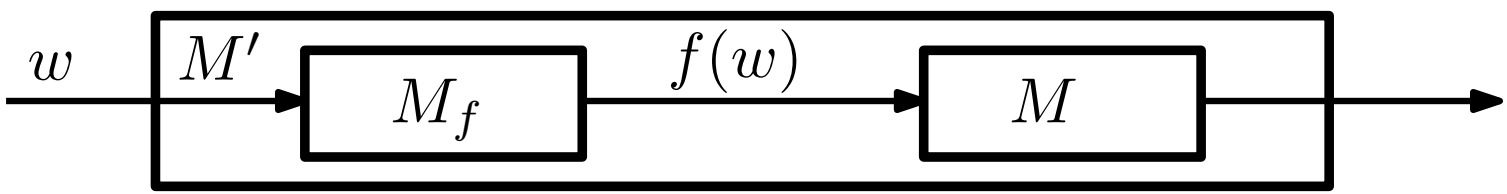
$M'(w)$ akz. $\iff$ $M(f(w))$ akz. $\iff$ $f(w) \in B$ $\iff$ $w \in A$

Satz 39

Wenn $B \in \mathsf{P}$ und $A \leq_p B$, dann auch $A \in \mathsf{P}$.

Beweis

- Sei M der polynomieller Entscheider für B und f eine polyzeit Reduktion von A auf B.
- Sei M_f TM, die f in polyzeit berechnet.
- Konstuiere TM M', als Hintereinanderschaltung von M und M_f



$M'(w)$ akz. $\iff$ $M(f(w))$ akz. $\iff$ $f(w) \in B$ $\iff$ $w \in A$

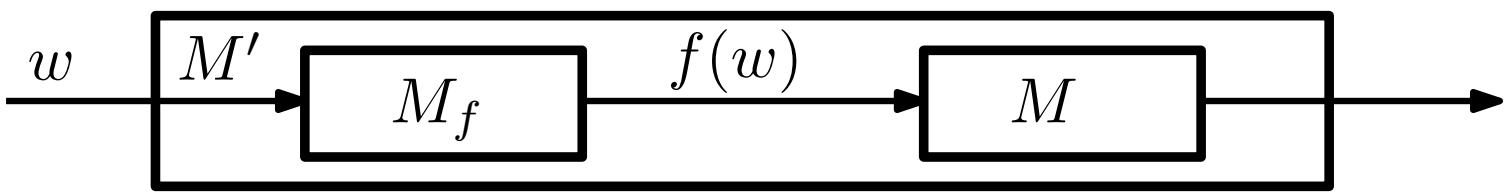
- Laufzeit von $M'(w)$ enspricht $t_f(|w|) + t_M(|f(w)|)$

Satz 39

Wenn $B \in \mathsf{P}$ und $A \leq_p B$, dann auch $A \in \mathsf{P}$.

Beweis

- Sei M der polynomieller Entscheider für B und f eine polyzeit Reduktion von A auf B.
- Sei M_f TM, die f in polyzeit berechnet.
- Konstuiere TM M', als Hintereinanderschaltung von M und M_f



$M'(w)$ akz. $\iff$ $M(f(w))$ akz. $\iff$ $f(w) \in B$ $\iff$ $w \in A$

- Laufzeit von $M'(w)$ enspricht $t_f(|w|) + t_M(|f(w)|)$

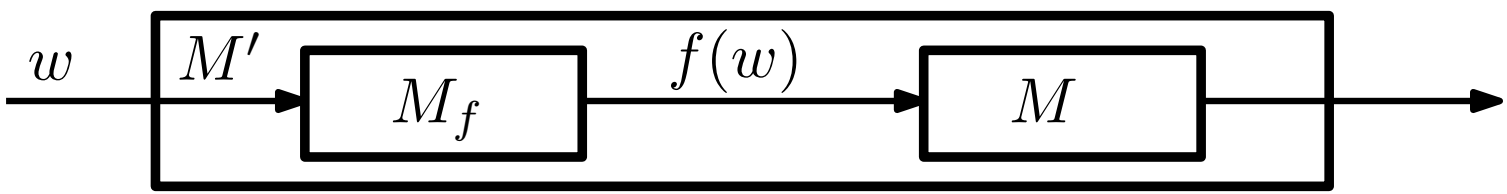
Laufzeit M_f Laufzeit M

Satz 39

Wenn $B \in \mathrm{P}$ und $A \leq_p B$, dann auch $A \in \mathrm{P}$.

Beweis

- Sei M der polynomieller Entscheider für B und f eine polyzeit Reduktion von A auf B.
- Sei M_f TM, die f in polyzeit berechnet.
- Konstuiere TM M', als Hintereinanderschaltung von M und M_f



$M'(w)$ akz. $\iff$ $M(f(w))$ akz. $\iff$ $f(w) \in B$ $\iff$ $w \in A$

- Laufzeit von $M'(w)$ enspricht $t_f(|w|) + t_M(|f(w)|)$

Laufzeit M_f Laufzeit M

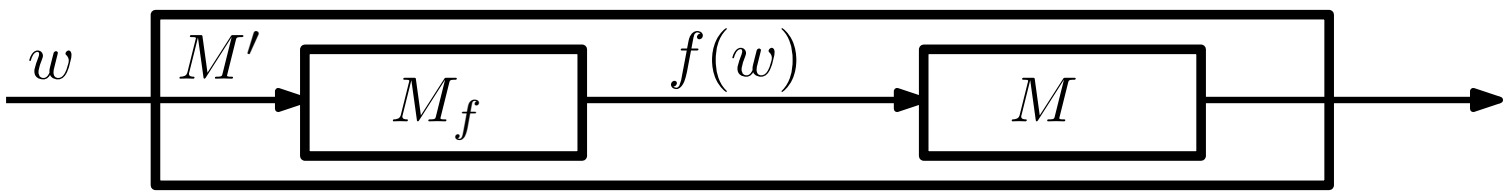
- $|f(w)|$ ist beschränkt durch ein Polynom p und t_M durch ein Polynom p' $\rightarrow t_M(|f(w)|) \leq p'(p(n))$

Satz 39

Wenn $B \in \mathrm{P}$ und $A \leq_p B$, dann auch $A \in \mathrm{P}$.

Beweis

- Sei M der polynomieller Entscheider für B und f eine polyzeit Reduktion von A auf B.
- Sei M_f TM, die f in polyzeit berechnet.
- Konstuiere TM M', als Hintereinanderschaltung von M und M_f



$M'(w)$ akz. $\iff$ $M(f(w))$ akz. $\iff$ $f(w) \in B$ $\iff$ $w \in A$

- Laufzeit von $M'(w)$ enspricht $t_f(|w|) + t_M(|f(w)|)$

Laufzeit M_f Laufzeit M

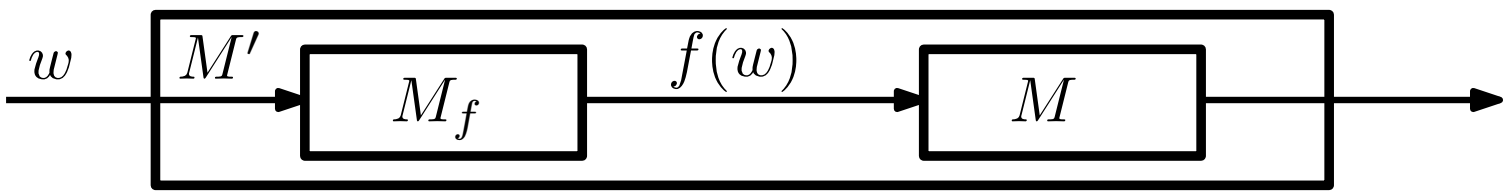
- $|f(w)|$ ist beschränkt durch ein Polynom p und t_M durch ein Polynom p' $\rightarrow t_M(|f(w)|) \leq p'(p(n))$ ← Polynom

Satz 39

Wenn $B \in \mathrm{P}$ und $A \leq_p B$, dann auch $A \in \mathrm{P}$.

Beweis

- Sei M der polynomieller Entscheider für B und f eine polyzeit Reduktion von A auf B.
- Sei M_f TM, die f in polyzeit berechnet.
- Konstuiere TM M', als Hintereinanderschaltung von M und M_f



$$M'(w) \text{ akz.} \iff M(f(w)) \text{ akz.} \iff f(w) \in B \iff w \in A$$

- Laufzeit von $M'(w)$ enspricht $t_f(|w|) + t_M(|f(w)|)$

  $t_f(|w|)$: Laufzeit M_f; $t_M(|f(w)|)$: Laufzeit M

- $|f(w)|$ ist beschränkt durch ein Polynom p und t_M durch ein Polynom p' $\rightarrow t_M(|f(w)|) \leq p'(p(n))$ ← Polynom
- Laufzeit von M ist beschränkt durch Polynom $\rightarrow A \in \mathrm{P}$

□

Definition

Eine Sprache L heißt NP- **vollständig**, gdw.

1. $L \in$ NP,
2. $\forall L' \in$ NP gilt $L' \leq_p L$.

Definition

Eine Sprache L heißt NP- **vollständig**, gdw.

1. $L \in$ NP,
2. $\forall L' \in$ NP gilt $L' \leq_p L$.

- NP-vollständige Sprachen kann man als die schwersten Sprachen in der Klasse NP verstehen

Definition

Eine Sprache L heißt NP- **vollständig**, gdw.

1. $L \in$ NP,
2. $\forall L' \in$ NP gilt $L' \leq_p L$.

- NP-vollständige Sprachen kann man als die schwersten Sprachen in der Klasse NP verstehen

$$\text{NPC} := \{L \mid \ L \text{ ist NP-vollständig}\}$$

Definition

Eine Sprache L heißt NP- **vollständig**, gdw.

1. $L \in$ NP,
2. $\forall L' \in$ NP gilt $L' \leq_p L$.

- NP-vollständige Sprachen kann man als die schwersten Sprachen in der Klasse NP verstehen

$$\text{NPC} := \{L \mid \ L \text{ ist NP-vollständig}\}$$

- Gilt in der obigen Definition nur der Punkt 2., heißt L NP-**schwer**.

Definition

Eine Sprache L heißt NP- **vollständig**, gdw.

1. $L \in$ NP,
2. $\forall L' \in$ NP gilt $L' \leq_p L$.

- NP-vollständige Sprachen kann man als die schwersten Sprachen in der Klasse NP verstehen

$$\text{NPC} := \{L \mid \ L \text{ ist NP-vollständig}\}$$

- Gilt in der obigen Definition nur der Punkt 2., heißt L NP-**schwer**.

Satz 40

Wenn $B \in$ P und $B \in$ NPC, dann gilt P $=$ NP.

Definition

Eine Sprache L heißt NP- **vollständig**, gdw.

1. $L \in$ NP,
2. $\forall L' \in$ NP gilt $L' \leq_p L$.

- NP-vollständige Sprachen kann man als die schwersten Sprachen in der Klasse NP verstehen

$$\text{NPC} := \{L \mid \ L \text{ ist NP-vollständig}\}$$

- Gilt in der obigen Definition nur der Punkt 2., heißt L NP-**schwer**.

Satz 40

Wenn $B \in$ P und $B \in$ NPC, dann gilt P $=$ NP.

Beweis

- Für jedes $A \in$ NP gilt nach Definition $A \leq_p B$

Definition

Eine Sprache L heißt NP- **vollständig**, gdw.

1. $L \in$ NP,
2. $\forall L' \in$ NP gilt $L' \leq_p L$.

- NP-vollständige Sprachen kann man als die schwersten Sprachen in der Klasse NP verstehen

$$\text{NPC} := \{L \mid \ L \text{ ist NP-vollständig}\}$$

- Gilt in der obigen Definition nur der Punkt 2., heißt L NP-**schwer**.

Satz 40

Wenn $B \in$ P und $B \in$ NPC, dann gilt P $=$ NP.

Beweis

- Für jedes $A \in$ NP gilt nach Definition $A \leq_p B$
- Aus Satz 39 folgt dann aber, dass $A \in$ P

Definition

Eine Sprache L heißt NP- **vollständig**, gdw.

1. $L \in$ NP,
2. $\forall L' \in$ NP gilt $L' \leq_p L$.

- NP-vollständige Sprachen kann man als die schwersten Sprachen in der Klasse NP verstehen

$$\text{NPC} := \{L \mid \ L \text{ ist NP-vollständig}\}$$

- Gilt in der obigen Definition nur der Punkt 2., heißt L NP-**schwer**.

Satz 40

Wenn $B \in$ P und $B \in$ NPC, dann gilt P = NP.

Beweis

- Für jedes $A \in$ NP gilt nach Definition $A \leq_p B$
- Aus Satz 39 folgt dann aber, dass $A \in$ P
- Also gilt NP $\subseteq$ P, und P $\subseteq$ NP wurde bereits gezeigt

Definition

Eine Sprache L heißt NP- **vollständig**, gdw.

1. $L \in$ NP,
2. $\forall L' \in$ NP gilt $L' \leq_p L$.

- NP-vollständige Sprachen kann man als die schwersten Sprachen in der Klasse NP verstehen

$$\text{NPC} := \{L \mid \ L \text{ ist NP-vollständig}\}$$

- Gilt in der obigen Definition nur der Punkt 2., heißt L NP-**schwer**.

Satz 40

Wenn $B \in$ P und $B \in$ NPC, dann gilt P $=$ NP.

Beweis

- Für jedes $A \in$ NP gilt nach Definition $A \leq_p B$
- Aus Satz 39 folgt dann aber, dass $A \in$ P
- Also gilt NP $\subseteq$ P, und P $\subseteq$ NP wurde bereits gezeigt $\longrightarrow$ P $=$ NP

□

SAT ist NP-vollständig.

Beweisidee

Satz von Cook-Levin

SAT ist NP-vollständig.

Beweisidee

- Wir haben bereits SAT $\in$ NP gezeigt, wir müssen noch zeigen:
  $\forall L \in$ NP: $L \leq_p$ SAT

Satz von Cook-Levin

SAT ist NP-vollständig.

Beweisidee

- Wir haben bereits SAT $\in$ NP gezeigt, wir müssen noch zeigen: $\forall L \in$ NP: $L \leq_p$ SAT
- Wir betrachten ein $L \in$ NP (fest für den Rest des Beweises)

Satz von Cook-Levin

SAT ist NP-vollständig.

Beweisidee

- Wir haben bereits SAT $\in$ NP gezeigt, wir müssen noch zeigen: $\forall L \in$ NP: $L \leq_p$ SAT
- Wir betrachten ein $L \in$ NP (fest für den Rest des Beweises)
- Sei N eine nicht-deterministische (polynomialzeit) TM die L erkennt

Satz von Cook-Levin

SAT ist NP-vollständig.

Beweisidee

- Wir haben bereits SAT $\in$ NP gezeigt, wir müssen noch zeigen: $\forall L \in$ NP: $L \leq_p$ SAT
- Wir betrachten ein $L \in$ NP (fest für den Rest des Beweises)
- Sei N eine nicht-deterministische (polynomialzeit) TM die L erkennt
- gesucht ist polyzeit Reduktion f_N von L auf SAT

Satz von Cook-Levin

SAT ist NP-vollständig.

Beweisidee

- Wir haben bereits SAT $\in$ NP gezeigt, wir müssen noch zeigen: $\forall L \in$ NP: $L \leq_p$ SAT
- Wir betrachten ein $L \in$ NP (fest für den Rest des Beweises)
- Sei N eine nicht-deterministische (polynomialzeit) TM die L erkennt
- gesucht ist polyzeit Reduktion f_N von L auf SAT

$$w \in \Sigma^* \xrightarrow[f_N]{} \langle \phi \rangle$$

Satz von Cook-Levin

SAT ist NP-vollständig.

Beweisidee

- Wir haben bereits SAT $\in$ NP gezeigt, wir müssen noch zeigen: $\forall L \in \text{NP}: L \leq_p \text{SAT}$
- Wir betrachten ein $L \in$ NP (fest für den Rest des Beweises)
- Sei N eine nicht-deterministische (polynomialzeit) TM die L erkennt
- gesucht ist polyzeit Reduktion f_N von L auf SAT

$$w \in \Sigma^* \xrightarrow[f_N]{} \langle \phi \rangle$$

- Die Formel ϕ ist definiert in Abhängigkeit von N und w.

Satz von Cook-Levin

SAT ist NP-vollständig.

Beweisidee

- Wir haben bereits SAT $\in$ NP gezeigt, wir müssen noch zeigen: $\forall L \in \text{NP}: L \leq_p \text{SAT}$
- Wir betrachten ein $L \in$ NP (fest für den Rest des Beweises)
- Sei N eine nicht-deterministische (polynomialzeit) TM die L erkennt
- gesucht ist polyzeit Reduktion f_N von L auf SAT

$$w \in \Sigma^* \xrightarrow[f_N]{} \langle \phi \rangle$$

- Die Formel ϕ ist definiert in Abhängigkeit von N und w.
- **Hauptidee:** Die Variablenbelegung (von ϕ) kodiert einen Lauf der NTM N, hierbei stellt die Erfüllbarkeit von ϕ sicher, dass ein korrekter akzeptierender Lauf von $N(w)$ kodiert wurde.

Satz von Cook-Levin

SAT ist NP-vollständig.

Beweisidee

- Wir haben bereits SAT $\in$ NP gezeigt, wir müssen noch zeigen: $\forall L \in \text{NP}: L \leq_p \text{SAT}$
- Wir betrachten ein $L \in$ NP (fest für den Rest des Beweises)
- Sei N eine nicht-deterministische (polynomialzeit) TM die L erkennt
- gesucht ist polyzeit Reduktion f_N von L auf SAT

$$w \in \Sigma^* \xrightarrow[f_N]{} \langle \phi \rangle$$

- Die Formel ϕ ist definiert in Abhängigkeit von N und w.
- **Hauptidee:** Die Variablenbelegung (von ϕ) kodiert einen Lauf der NTM N, hierbei stellt die Erfüllbarkeit von ϕ sicher, dass ein korrekter akzeptierender Lauf von $N(w)$ kodiert wurde.

Es existiert erfüllende Variablenbelegung für ϕ	$\longleftrightarrow$	Es existiert ein akzeptierender Lauf für $N(w)$

Beweis

- N ist polyzeit Halbband NTM für L mit Laufzeit $t_N(n) \leq n^k - 3$

Beweis

- N ist polyzeit Halbband NTM für L mit Laufzeit $t_N(n) \leq n^k - 3$
- Wir notieren den Lauf (Pfad im Berechnungsbaum) von $N(w)$ als **Tableau**

Beweis

- N ist polyzeit Halbband NTM für L mit Laufzeit $t_N(n) \leq n^k - 3$
- Wir notieren den Lauf (Pfad im Berechnungsbaum) von $N(w)$ als **Tableau**

Tableau:

- $n^k \times n^k$ Tabelle
- Zellen der 1. und letzte Spalte enthalten $\#$
- 1. Zeile enthält $\#$ Startkonfiguration + Blanks + $\#$
- Zeile $=$ Konfiguration des kodierten Laufes
- $i$te Zeile ist eine Folgekonfiguration der $(i-1)$en Zeile
- tritt eine akzeptierende Konfiguration auf, enthalten alle folgendes Zeilen eine Kopie dieser Zeile

Beweis

- N ist polyzeit Halbband NTM für L mit Laufzeit $t_N(n) \leq n^k - 3$
- Wir notieren den Lauf (Pfad im Berechnungsbaum) von $N(w)$ als **Tableau**

Tableau:

- $n^k \times n^k$ Tabelle
- Zellen der 1. und letzte Spalte enthalten #
- 1. Zeile enthält # Startkonfiguration + Blanks + #
- Zeile = Konfiguration des kodierten Laufes
- $i$te Zeile ist eine Folgekonfiguration der $(i-1)$en Zeile
- tritt eine akzeptierende Konfiguration auf, enthalten alle folgendes Zeilen eine Kopie dieser Zeile

Bsp.

#	q_0	a	b	b	b	□	□	□	□	□	#
#	b	q_3	b	b	b	□	□	□	□	□	#
#	a	a	b	b	b	q_A	a	□	□	□	#
#	a	a	b	b	b	q_A	a	□	□	□	#

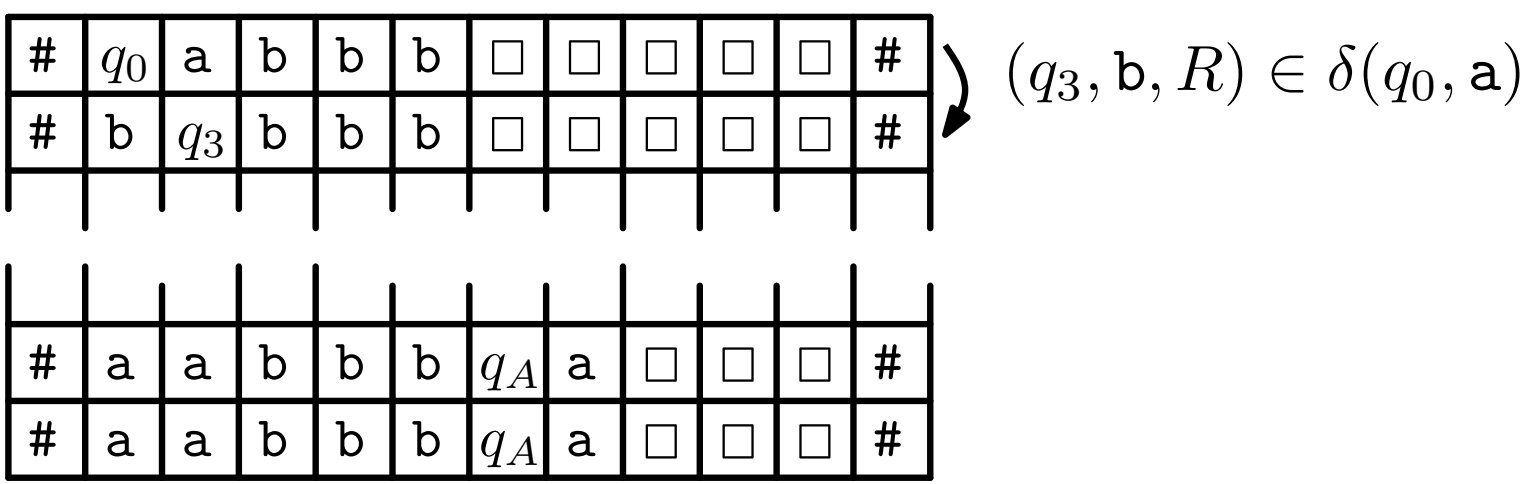
Beweis

- N ist polyzeit Halbband NTM für L mit Laufzeit $t_N(n) \leq n^k - 3$
- Wir notieren den Lauf (Pfad im Berechnungsbaum) von $N(w)$ als **Tableau**

Tableau:

- $n^k \times n^k$ Tabelle
- Zellen der 1. und letzte Spalte enthalten $\#$
- 1. Zeile enthält $\#$ Startkonfiguration + Blanks + $\#$
- Zeile = Konfiguration des kodierten Laufes
- $i$te Zeile ist eine Folgekonfiguration der $(i-1)$en Zeile
- tritt eine akzeptierende Konfiguration auf, enthalten alle folgendes Zeilen eine Kopie dieser Zeile

Bsp.



- Tableau existiert mit $q_A \Leftrightarrow$ es gibt für $N(w)$ akz. Lauf $\Leftrightarrow w \in L$

- Tableau existiert mit $q_A \Leftrightarrow$ es gibt für $N(w)$ akz. Lauf $\Leftrightarrow w \in L$
- Variablen von ϕ kodieren die Zellenbelegung des Tableaus

- Tableau existiert mit $q_A \Leftrightarrow$ es gibt für $N(w)$ akz. Lauf $\Leftrightarrow w \in L$
- Variablen von ϕ kodieren die Zellenbelegung des Tableaus

$x_{i,j,s} = 1 \iff$ Tabellenzelle (i, j) enthält Symbol s

- Tableau existiert mit $q_A \Leftrightarrow$ es gibt für $N(w)$ akz. Lauf $\Leftrightarrow w \in L$
- Variablen von ϕ kodieren die Zellenbelegung des Tableaus

$$x_{i,j,s} = 1 \iff \text{Tabellenzelle } (i,j) \text{ enthält Symbol } s$$

- $s \in C := Q \cup \Gamma \cup \{\#, \square\}$, C hängt von N ab, aber nicht von w

- Tableau existiert mit $q_A \Leftrightarrow$ es gibt für $N(w)$ akz. Lauf $\Leftrightarrow w \in L$
- Variablen von ϕ kodieren die Zellenbelegung des Tableaus

$$x_{i,j,s} = 1 \iff \text{Tabellenzelle } (i,j) \text{ enthält Symbol } s$$

- $s \in C := Q \cup \Gamma \cup \{\#, \square\}$, C hängt von N ab, aber nicht von w
- Formel ϕ besteht aus 4 Teilen:

$$\phi = \phi_{\text{zelle}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{akz}} \wedge \phi_{\text{trans}}$$

- Tableau existiert mit $q_A \Leftrightarrow$ es gibt für $N(w)$ akz. Lauf $\Leftrightarrow w \in L$
- Variablen von ϕ kodieren die Zellenbelegung des Tableaus

$$x_{i,j,s} = 1 \iff \text{Tabellenzelle } (i,j) \text{ enthält Symbol } s$$

- $s \in C := Q \cup \Gamma \cup \{\#, \square\}$, C hängt von N ab, aber nicht von w
- Formel ϕ besteht aus 4 Teilen:

$$\phi = \phi_{\text{zelle}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{akz}} \wedge \phi_{\text{trans}}$$

- ϕ_{zelle} sichert die korrekte Verwendung der Variablen x für das Tableau

- Tableau existiert mit $q_A \Leftrightarrow$ es gibt für $N(w)$ akz. Lauf $\Leftrightarrow w \in L$
- Variablen von ϕ kodieren die Zellenbelegung des Tableaus

$$x_{i,j,s} = 1 \iff \text{Tabellenzelle } (i,j) \text{ enthält Symbol } s$$

- $s \in C := Q \cup \Gamma \cup \{\#, \square\}$, C hängt von N ab, aber nicht von w
- Formel ϕ besteht aus 4 Teilen:

$$\phi = \phi_{\text{zelle}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{akz}} \wedge \phi_{\text{trans}}$$

- ϕ_{zelle} sichert die korrekte Verwendung der Variablen x für das Tableau
- ϕ_{start} sichert dass erste Zeile Startkonfiguration enthält

- Tableau existiert mit $q_A \Leftrightarrow$ es gibt für $N(w)$ akz. Lauf $\Leftrightarrow w \in L$
- Variablen von ϕ kodieren die Zellenbelegung des Tableaus

$$x_{i,j,s} = 1 \iff \text{Tabellenzelle } (i,j) \text{ enthält Symbol } s$$

- $s \in C := Q \cup \Gamma \cup \{\#, \square\}$, C hängt von N ab, aber nicht von w
- Formel ϕ besteht aus 4 Teilen:

$$\phi = \phi_{\text{zelle}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{akz}} \wedge \phi_{\text{trans}}$$

- ϕ_{zelle} sichert die korrekte Verwendung der Variablen x für das Tableau
- ϕ_{start} sichert dass erste Zeile Startkonfiguration enthält
- ϕ_{akz} sichert dass q_A im Tableau auftritt

- Tableau existiert mit $q_A \Leftrightarrow$ es gibt für $N(w)$ akz. Lauf $\Leftrightarrow w \in L$
- Variablen von ϕ kodieren die Zellenbelegung des Tableaus

$$x_{i,j,s} = 1 \iff \text{Tabellenzelle } (i,j) \text{ enthält Symbol } s$$

- $s \in C := Q \cup \Gamma \cup \{\#, \square\}$, C hängt von N ab, aber nicht von w
- Formel ϕ besteht aus 4 Teilen:

$$\phi = \phi_{\text{zelle}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{akz}} \wedge \phi_{\text{trans}}$$

- ϕ_{zelle} sichert die korrekte Verwendung der Variablen x für das Tableau
- ϕ_{start} sichert dass erste Zeile Startkonfiguration enthält
- ϕ_{akz} sichert dass q_A im Tableau auftritt
- ϕ_{trans} sichert Zeile i eine Nachfolgerkonfiguration der Zeile $(i-1)$ ist

- Tableau existiert mit $q_A \Leftrightarrow$ es gibt für $N(w)$ akz. Lauf $\Leftrightarrow w \in L$
- Variablen von ϕ kodieren die Zellenbelegung des Tableaus

$$x_{i,j,s} = 1 \iff \text{Tabellenzelle } (i,j) \text{ enthält Symbol } s$$

- $s \in C := Q \cup \Gamma \cup \{\#, \square\}$, C hängt von N ab, aber nicht von w
- Formel ϕ besteht aus 4 Teilen:

$$\phi = \phi_{\text{zelle}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{akz}} \wedge \phi_{\text{trans}}$$

- ϕ_{zelle} sichert die korrekte Verwendung der Variablen x für das Tableau
- ϕ_{start} sichert dass erste Zeile Startkonfiguration enthält
- ϕ_{akz} sichert dass q_A im Tableau auftritt
- ϕ_{trans} sichert Zeile i eine Nachfolgerkonfiguration der Zeile $(i-1)$ ist

Alles zusammen erzwingt, dass die Variablen ein (korrektes) Tableau mit q_A beschreiben