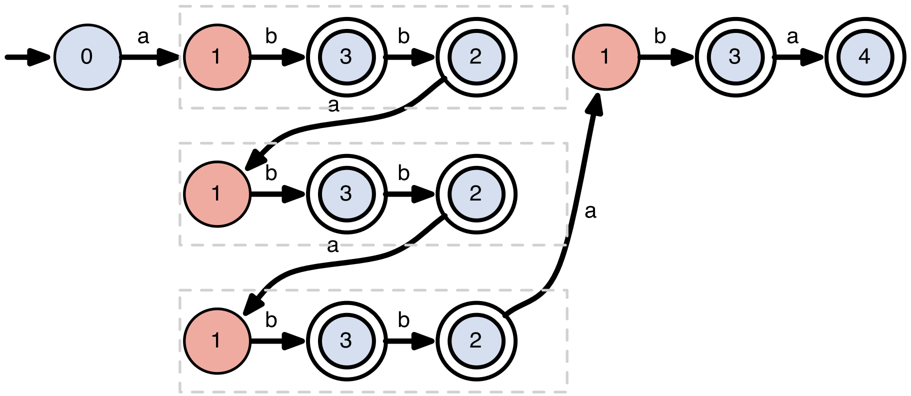
Berechenbarkeitstheorie

23. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Satz 42

CLIQUE ist NP-vollständig.

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Satz 42

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis

- CLIQUE$\in$ NP (Zeuge ist Knotenliste der Clique)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch 3SAT$\leq_p$CLIQUE

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Satz 42

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis

- CLIQUE$\in$ NP (Zeuge ist Knotenliste der Clique)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch 3SAT$\leq_p$CLIQUE
- Reduktion wandelt Formel ϕ in 3-CNF in Graph G und Zahl k um

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Satz 42

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis

- CLIQUE$\in$ NP (Zeuge ist Knotenliste der Clique)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch 3SAT$\leq_p$CLIQUE
- Reduktion wandelt Formel ϕ in 3-CNF in Graph G und Zahl k um
- G ist wie folgt definiert:

CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

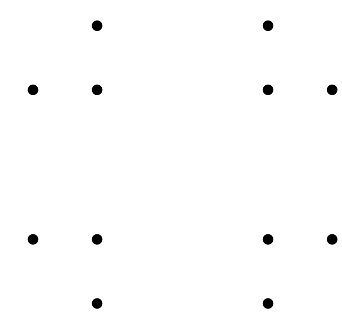
Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Satz 42

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis

- CLIQUE$\in$ NP (Zeuge ist Knotenliste der Clique)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch 3SAT$\leq_p$CLIQUE
- Reduktion wandelt Formel ϕ in 3-CNF in Graph G und Zahl k um
- G ist wie folgt definiert:
  - ein Knoten pro Auftreten eines Literals in ϕ



CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

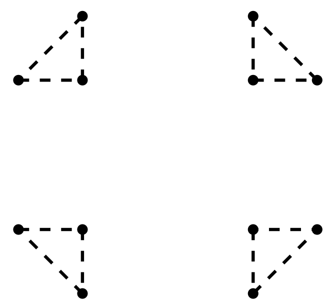
Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Satz 42

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis

- CLIQUE$\in$ NP (Zeuge ist Knotenliste der Clique)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch 3SAT$\leq_p$CLIQUE
- Reduktion wandelt Formel ϕ in 3-CNF in Graph G und Zahl k um
- G ist wie folgt definiert:
  - ein Knoten pro Auftreten eines Literals in ϕ
  - zwischen Knoten von Literalen einer Klausel gibt es keine Kanten



CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

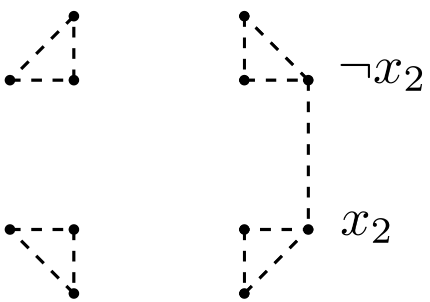
Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Satz 42

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis

- CLIQUE$\in$ NP (Zeuge ist Knotenliste der Clique)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch 3SAT$\leq_p$CLIQUE
- Reduktion wandelt Formel ϕ in 3-CNF in Graph G und Zahl k um
- G ist wie folgt definiert:
  - ein Knoten pro Auftreten eines Literals in ϕ
  - zwischen Knoten von Literalen einer Klausel gibt es keine Kanten
  - zwischen Knoten $x_i/\neg x_i$ gibt es keine Kanten



CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

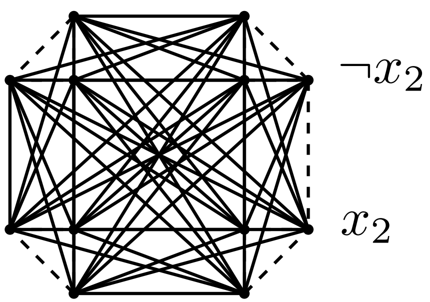
Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Satz 42

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis

- CLIQUE$\in$ NP (Zeuge ist Knotenliste der Clique)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch 3SAT$\leq_p$CLIQUE
- Reduktion wandelt Formel ϕ in 3-CNF in Graph G und Zahl k um
- G ist wie folgt definiert:
  - ein Knoten pro Auftreten eines Literals in ϕ
  - zwischen Knoten von Literalen einer Klausel gibt es keine Kanten
  - zwischen Knoten $x_i/\neg x_i$ gibt es keine Kanten
  - ansonsten sind alle Knotenpaare durch eine Kante verbunden



CLIQUE

Eingabe: Graph G und natürliche Zahl k

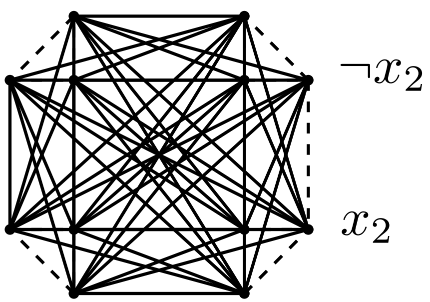
Frage: Hat G eine k-Clique (d.h., K_k als Teilgraph)?

Satz 42

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis

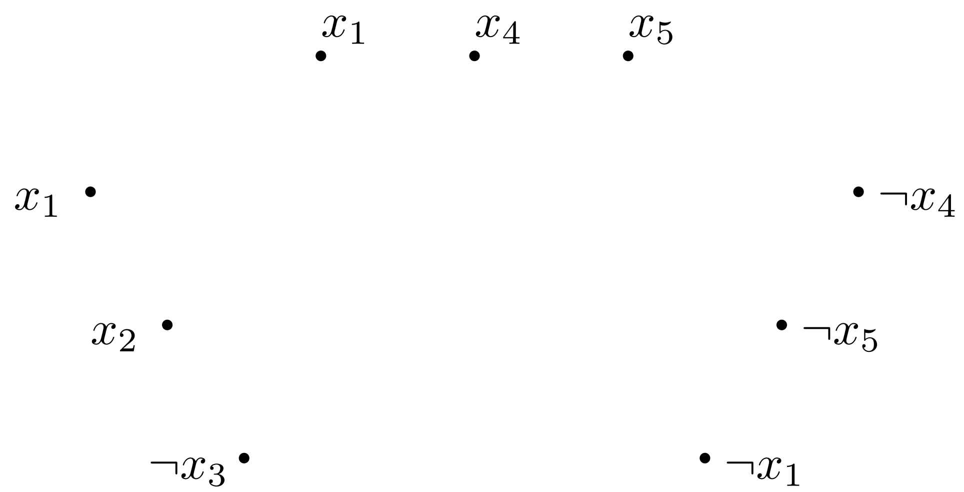
- CLIQUE$\in$ NP (Zeuge ist Knotenliste der Clique)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch 3SAT$\leq_p$CLIQUE
- Reduktion wandelt Formel ϕ in 3-CNF in Graph G und Zahl k um
- G ist wie folgt definiert:
  - ein Knoten pro Auftreten eines Literals in ϕ
  - zwischen Knoten von Literalen einer Klausel gibt es keine Kanten
  - zwischen Knoten $x_i/\neg x_i$ gibt es keine Kanten
  - ansonsten sind alle Knotenpaare durch eine Kante verbunden



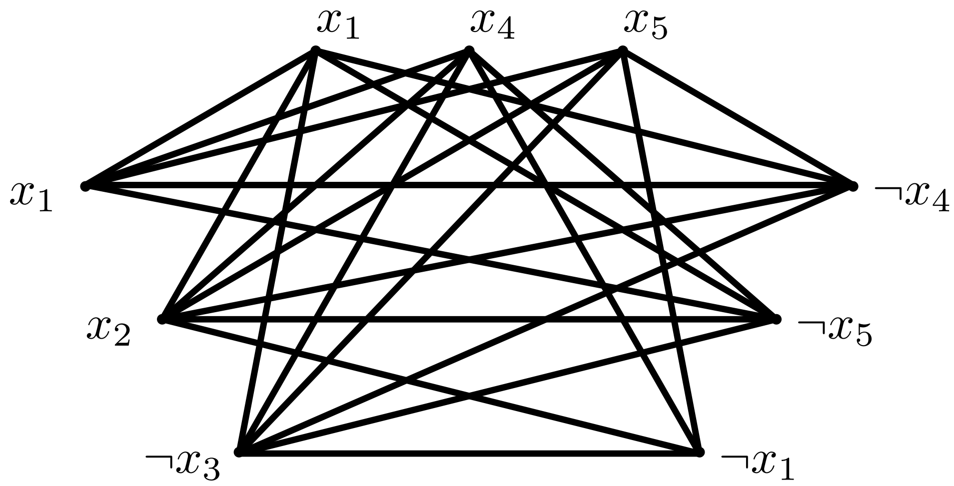
- k ist die Anzahl der Klauseln in ϕ

Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

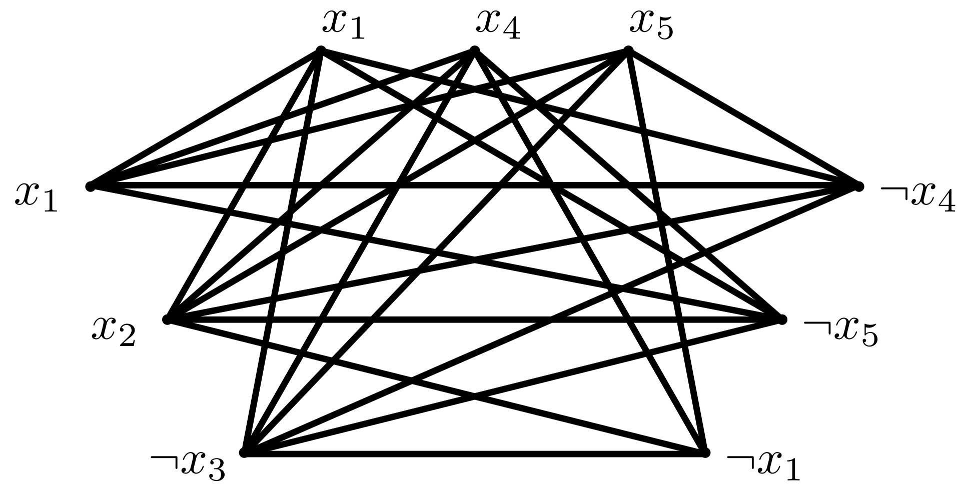
Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$



Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

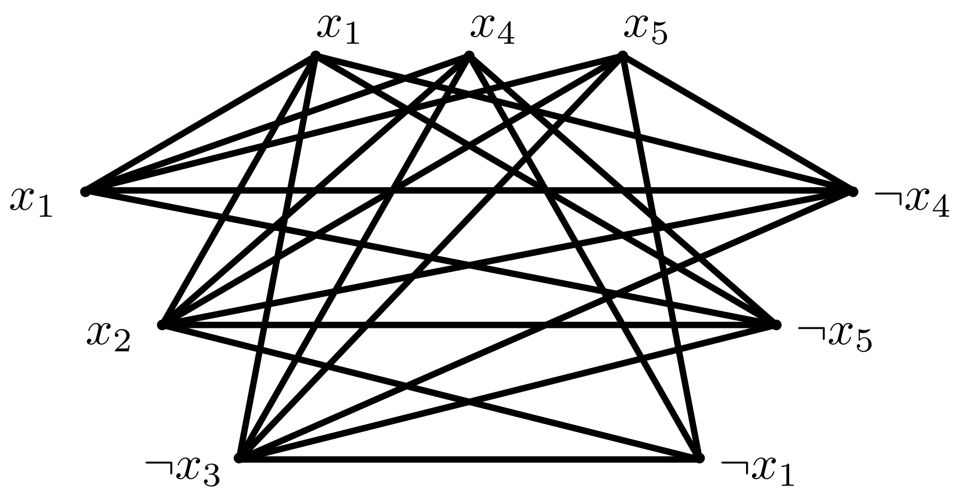


Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$



- **Behauptung** G hat k-Clique $\iff$ ϕ erfüllbar

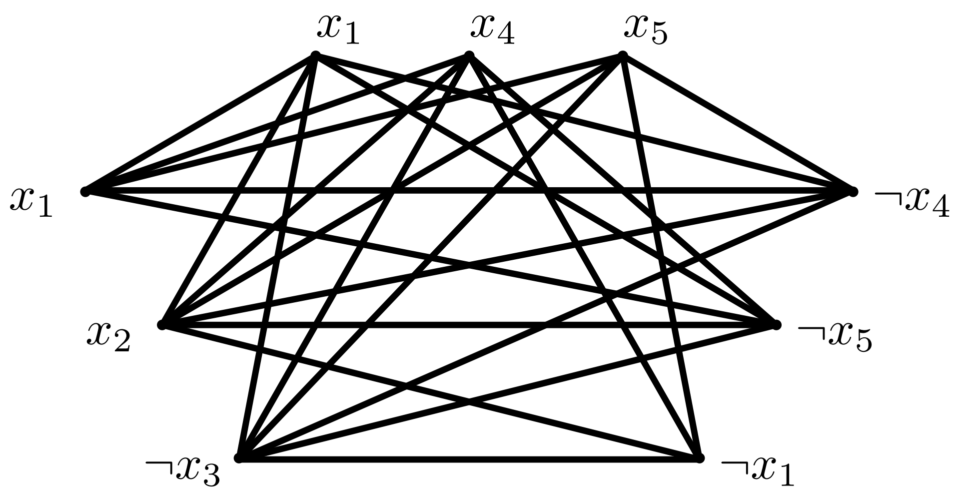
Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$



- **Behauptung** G hat k-Clique $\iff$ ϕ erfüllbar

($\Rightarrow$)
- eine k-Clique enthält genau ein Literalknoten pro Klausel

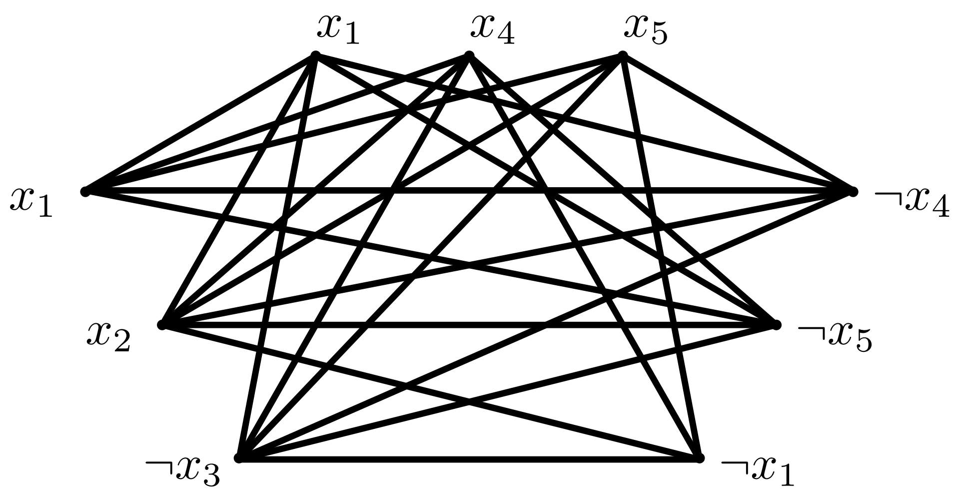
Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$



- **Behauptung** G hat k-Clique $\iff$ ϕ erfüllbar

($\Rightarrow$)
- eine k-Clique enthält genau ein Literalknoten pro Klausel
- die ausgewählten Literale widersprechen sich nicht

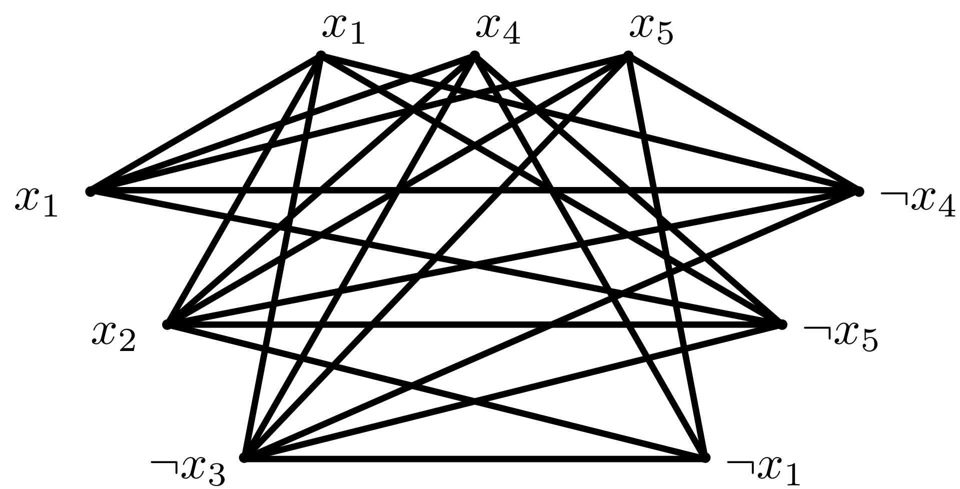
Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$



- **Behauptung** G hat k-Clique $\iff$ ϕ erfüllbar

($\Rightarrow$)
- eine k-Clique enthält genau ein Literalknoten pro Klausel
- die ausgewählten Literale widersprechen sich nicht
- Variablenbelegung die diese Literale erfüllt, erfüllt auch ϕ

Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

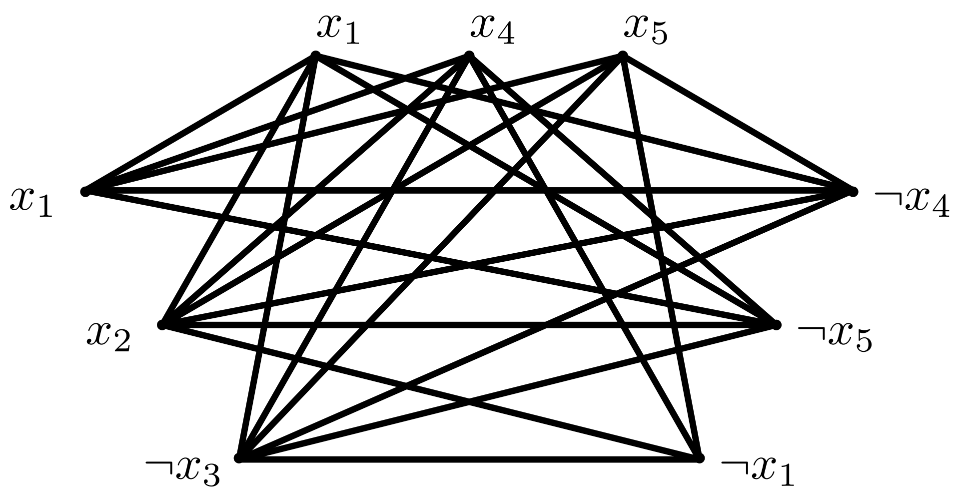


- **Behauptung** G hat k-Clique $\iff$ ϕ erfüllbar

($\Rightarrow$)
- eine k-Clique enthält genau ein Literalknoten pro Klausel
- die ausgewählten Literale widersprechen sich nicht
- Variablenbelegung die diese Literale erfüllt, erfüllt auch ϕ

($\Leftarrow$)
- wähle ein erfülltes Literal pro Klausel aus einer erfüllenden Belegung von ϕ

Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

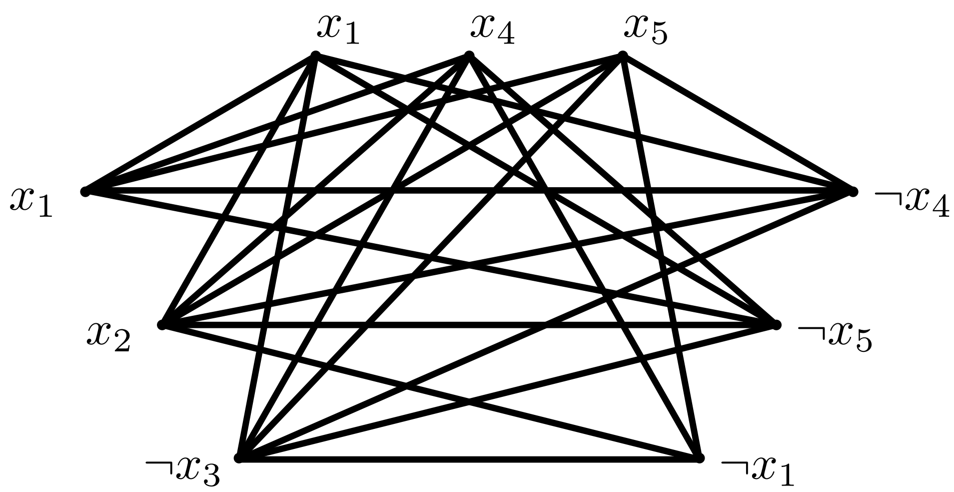


- **Behauptung** G hat k-Clique $\iff$ ϕ erfüllbar

($\Rightarrow$)
- eine k-Clique enthält genau ein Literalknoten pro Klausel
- die ausgewählten Literale widersprechen sich nicht
- Variablenbelegung die diese Literale erfüllt, erfüllt auch ϕ

($\Leftarrow$)
- wähle ein erfülltes Literal pro Klausel aus einer erfüllenden Belegung von ϕ
- ausgewählte Knoten sind paarweise durch Kanten verbunden

Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

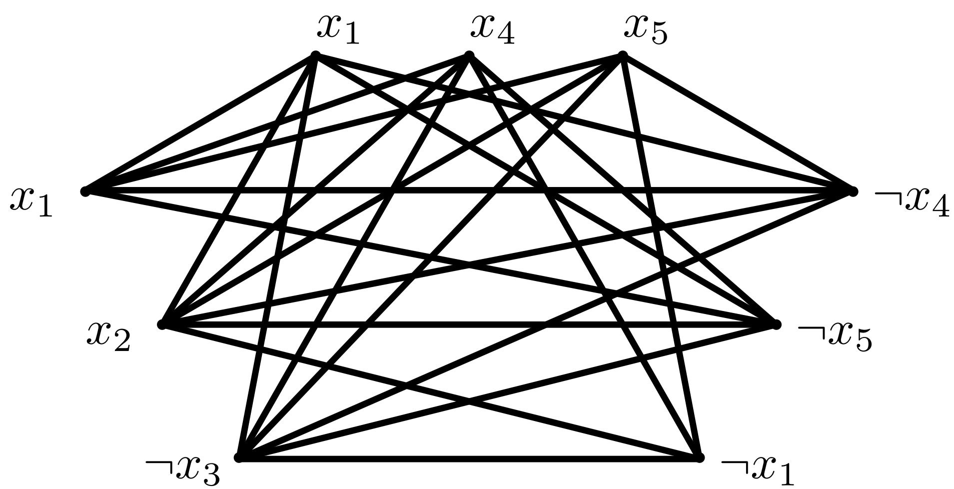


- **Behauptung** G hat k-Clique $\iff$ ϕ erfüllbar

($\Rightarrow$)
- eine k-Clique enthält genau ein Literalknoten pro Klausel
- die ausgewählten Literale widersprechen sich nicht
- Variablenbelegung die diese Literale erfüllt, erfüllt auch ϕ

($\Leftarrow$)
- wähle ein erfülltes Literal pro Klausel aus einer erfüllenden Belegung von ϕ
- ausgewählte Knoten sind paarweise durch Kanten verbunden
- Knoten induzieren k-Clique

Bsp. $\phi = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$



- **Behauptung** G hat k-Clique $\iff$ ϕ erfüllbar

($\Rightarrow$)
- eine k-Clique enthält genau ein Literalknoten pro Klausel
- die ausgewählten Literale widersprechen sich nicht
- Variablenbelegung die diese Literale erfüllt, erfüllt auch ϕ

($\Leftarrow$)
- wähle ein erfülltes Literal pro Klausel aus einer erfüllenden Belegung von ϕ
- ausgewählte Knoten sind paarweise durch Kanten verbunden
- Knoten induzieren k-Clique

- Reduktion ist polyzeit $\square$

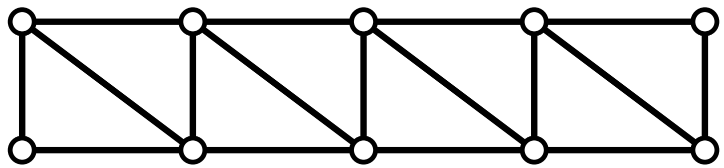
Vertex Cover

Vertex Cover

- **Def.** Ein k-Vertex Cover eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine k-elementige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass jede Kante aus E mindestens einen Knoten aus V' enthält.

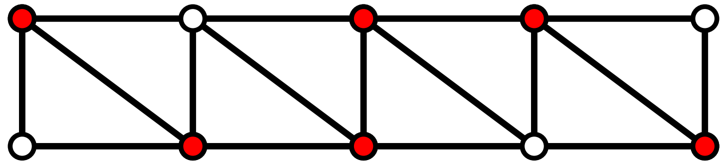
Vertex Cover

- **Def.** Ein k-Vertex Cover eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine k-elementige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass jede Kante aus E mindestens einen Knoten aus V' enthält.



Vertex Cover

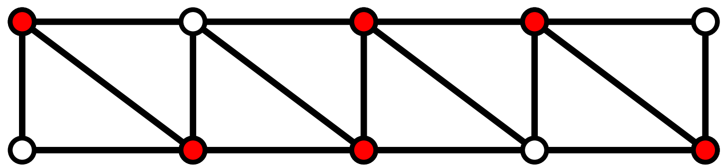
- **Def.** Ein k-Vertex Cover eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine k-elementige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass jede Kante aus E mindestens einen Knoten aus V' enthält.



Hat 6-Vertex Cover

Vertex Cover

- **Def.** Ein k-Vertex Cover eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine k-elementige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass jede Kante aus E mindestens einen Knoten aus V' enthält.

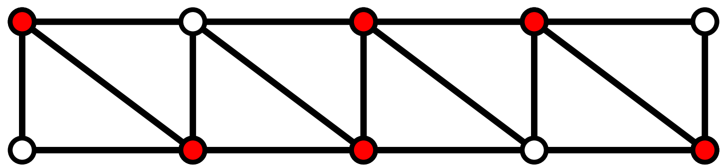


Hat 6-Vertex Cover

Hat kein 5-Vertex Cover

Vertex Cover

- **Def.** Ein k-Vertex Cover eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine k-elementige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass jede Kante aus E mindestens einen Knoten aus V' enthält.



Hat 6-Vertex Cover

Hat kein 5-Vertex Cover

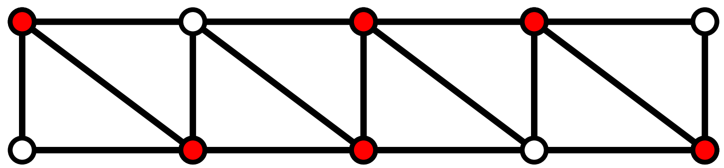
VC (Vertex-Cover)

Eingabe: Graph G, $k \in \mathbf{N}$

Frage: Besitzt G ein k-Vertex-Cover?

Vertex Cover

- **Def.** Ein k-Vertex Cover eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine k-elementige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass jede Kante aus E mindestens einen Knoten aus V' enthält.



Hat 6-Vertex Cover

Hat kein 5-Vertex Cover

VC (Vertex-Cover)

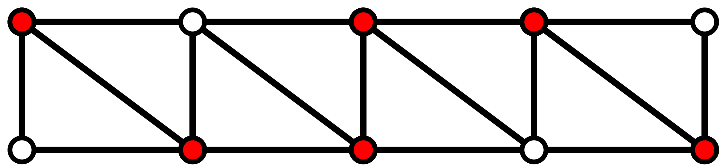
Eingabe: Graph G, $k \in \mathbf{N}$

Frage: Besitzt G ein k-Vertex-Cover?

- **Def.** Der komplementäre Graph zu $G = (V, E)$ hat die Knotenmenge V und genau dann eine Kante (v_i, v_j), wenn $(v_i, v_j) \notin E$.

Vertex Cover

- **Def.** Ein k-Vertex Cover eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine k-elementige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass jede Kante aus E mindestens einen Knoten aus V' enthält.



Hat 6-Vertex Cover

Hat kein 5-Vertex Cover

VC (Vertex-Cover)

Eingabe: Graph G, $k \in \mathbf{N}$

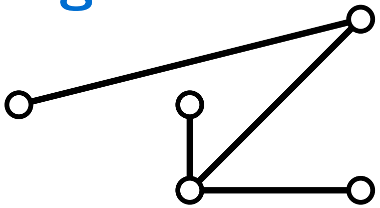
Frage: Besitzt G ein k-Vertex-Cover?

- **Def.** Der komplementäre Graph zu $G = (V, E)$ hat die Knotenmenge V und genau dann eine Kante (v_i, v_j), wenn $(v_i, v_j) \notin E$.

Lemma

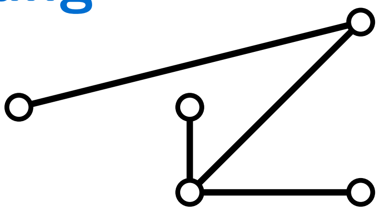
Ein n-Knoten Graph $G = (V, E)$ hat genau dann ein k-Vertex-Cover, wenn sein komplementärer Graph eine $(n - k)$-Clique besitzt.

Anschauung

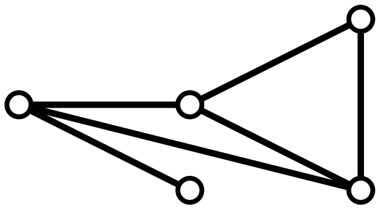


Graph G

Anschauung

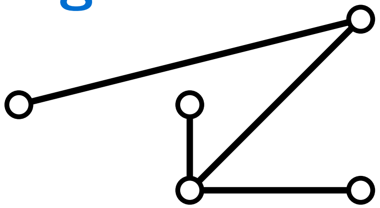


Graph G

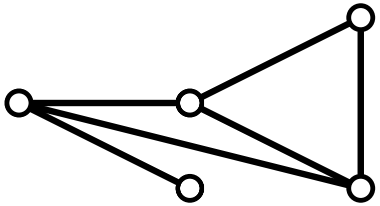


Komplementärgraph zu G

Anschauung



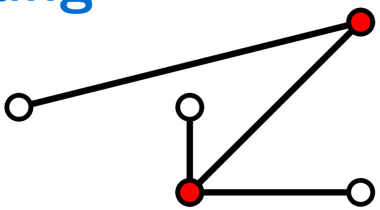
Graph G



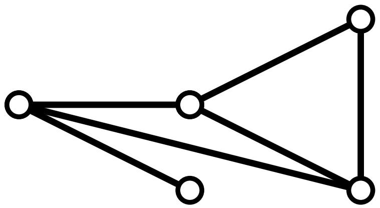
Komplementärgraph zu G

Beweis

Anschauung



Graph G

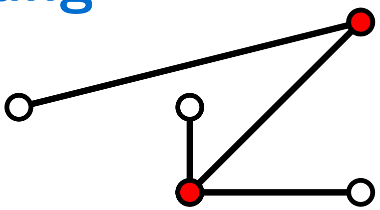


Komplementärgraph zu G

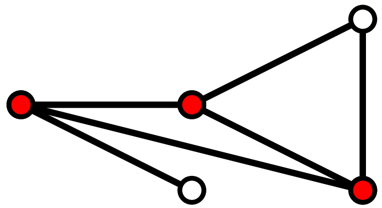
Beweis

- sei V' ein k-Vertex-Cover für G und $\bar{G}$ der Komplementgraph zu G mit Kantenmenge $\bar{E}$

Anschauung



Graph G



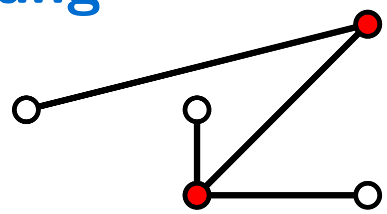
Komplementärgraph zu G

Beweis

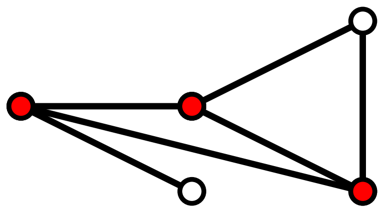
- sei V' ein k-Vertex-Cover für G und $\bar{G}$ der Komplementgraph zu G mit Kantenmenge $\bar{E}$
- Behauptung: Dann ist $V'' = V \setminus V'$ eine $(n-k)$-Clique in $\bar{G}$

V' ist Vertex-Cover in G

Anschauung



Graph G



Komplementärgraph zu G

Beweis

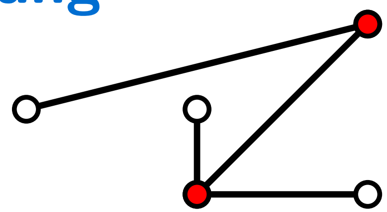
- sei V' ein k-Vertex-Cover für G und $\bar{G}$ der Komplementgraph zu G mit Kantenmenge $\bar{E}$
- Behauptung: Dann ist $V'' = V \setminus V'$ eine $(n-k)$-Clique in $\bar{G}$

$$V' \text{ ist Vertex-Cover in } G$$

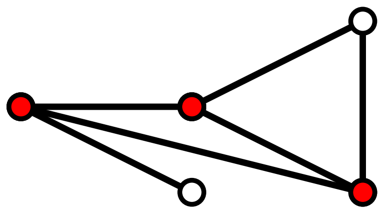
$$\Updownarrow$$

$$\forall u, v \colon (u,v) \in E \Rightarrow u \in V' \text{ oder } v \in V'$$

Anschauung



Graph G



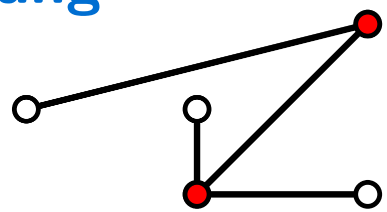
Komplementärgraph zu G

Beweis

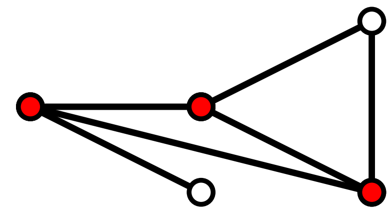
- sei V' ein k-Vertex-Cover für G und $\bar{G}$ der Komplementgraph zu G mit Kantenmenge $\bar{E}$
- Behauptung: Dann ist $V'' = V \setminus V'$ eine $(n-k)$-Clique in $\bar{G}$

$$V' \text{ ist Vertex-Cover in } G$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall u, v\colon (u,v) \in E \Rightarrow u \in V' \text{ oder } v \in V'$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall u, v\colon u \notin V' \text{ und } v \notin V' \Rightarrow (u,v) \notin E$$

Anschauung



Graph G



Komplementärgraph zu G

Beweis

- sei V' ein k-Vertex-Cover für G und $\bar{G}$ der Komplementgraph zu G mit Kantenmenge $\bar{E}$
- Behauptung: Dann ist $V'' = V \setminus V'$ eine $(n-k)$-Clique in $\bar{G}$

$$V' \text{ ist Vertex-Cover in } G$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall u, v\colon (u,v) \in E \Rightarrow u \in V' \text{ oder } v \in V'$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall u, v\colon u \notin V' \text{ und } v \notin V' \Rightarrow (u,v) \notin E$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall u, v\colon u \in V'' \text{ und } v \in V'' \Rightarrow (u,v) \in \bar{E}$$

Anschauung

Graph G Komplementärgraph zu G

Beweis

- sei V' ein k-Vertex-Cover für G und $\bar{G}$ der Komplementgraph zu G mit Kantenmenge $\bar{E}$
- Behauptung: Dann ist $V'' = V \setminus V'$ eine $(n-k)$-Clique in $\bar{G}$

$$V' \text{ ist Vertex-Cover in } G$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall u, v\colon (u,v) \in E \Rightarrow u \in V' \text{ oder } v \in V'$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall u, v\colon u \notin V' \text{ und } v \notin V' \Rightarrow (u,v) \notin E$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall u, v\colon u \in V'' \text{ und } v \in V'' \Rightarrow (u,v) \in \bar{E}$$
$$\Updownarrow$$
$$V'' \text{ ist Clique in } \bar{G}$$

$\square$