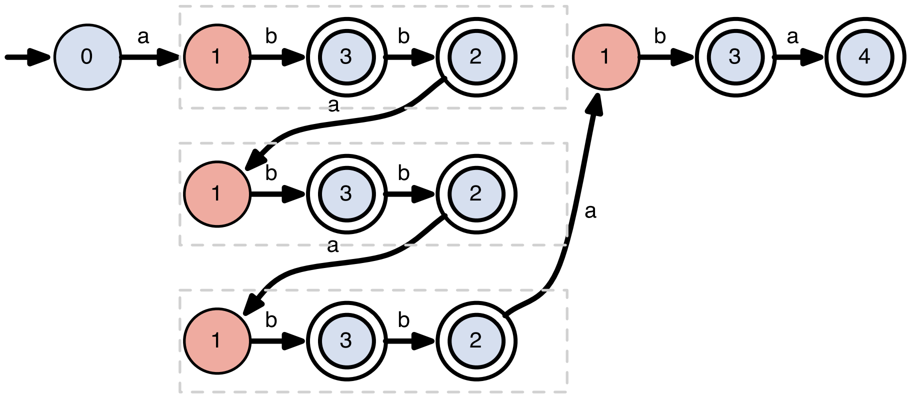
Berechenbarkeitstheorie

24. Vorlesung



Dr. Franziska Jahnke
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung
WWU Münster

DHC

Eingabe: Gerichteter Graph G
Frage: Enthält G einen gerichteten Hamiltonkreis?

Satz 44

DHC ist NP-vollständig.

Beweis

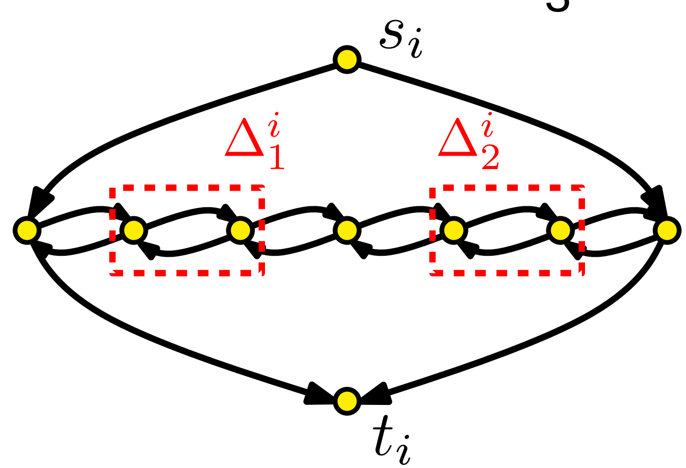
- DHC$\in$ NP (Zeuge ist Knotenliste des Hamiltonkreises)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch 3SAT$\leq_p$DHC
- die Reduktion wandelt eine Formel ϕ (3CNF) mit k Klauseln in einen Graphen G um

Struktur von G

- für jede Klausel C_i aus ϕ gibt es einen Knoten c_i
- für jede Variable x_i aus ϕ gibt es einen Teilgraphen in G, genannt Diamant D_i

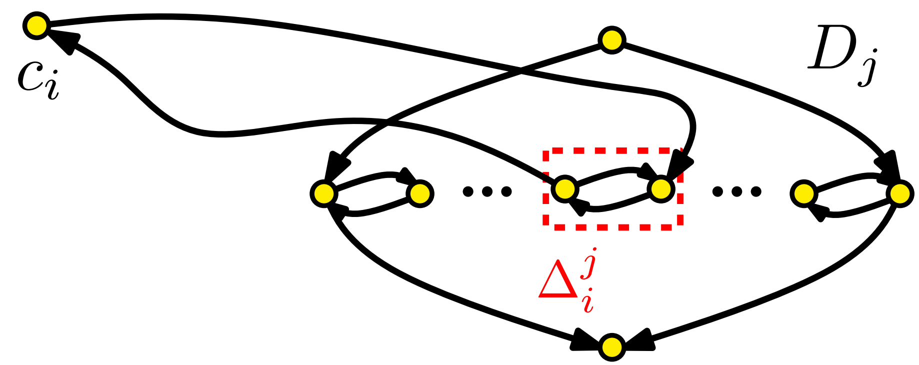
Diamant D_i

- zwei besondere Knoten s_i und t_i
- $3k + 1$ Knoten wie folgt dazwischen
- Gruppiere je zwei benachbarte Knoten in der Mitte zu einer Doublette, getrennt jeweils durch einen Knoten
- Nummeriere die Doubletten als Δ_*^i durch

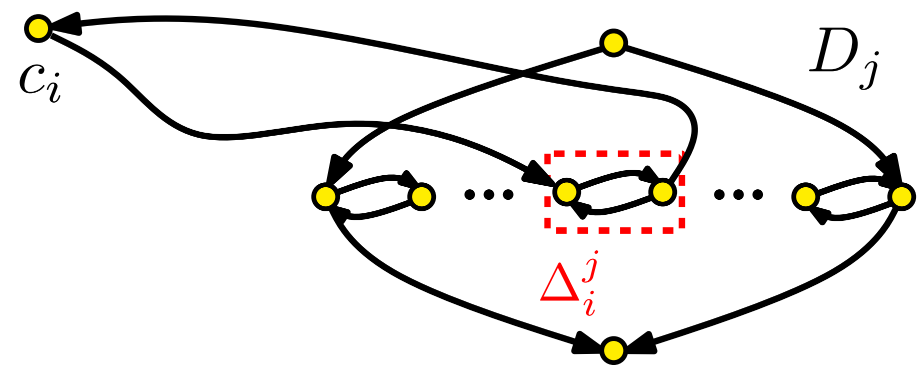


Verknüpfung D_j und c_i

① Wenn $x_j \in C_i$

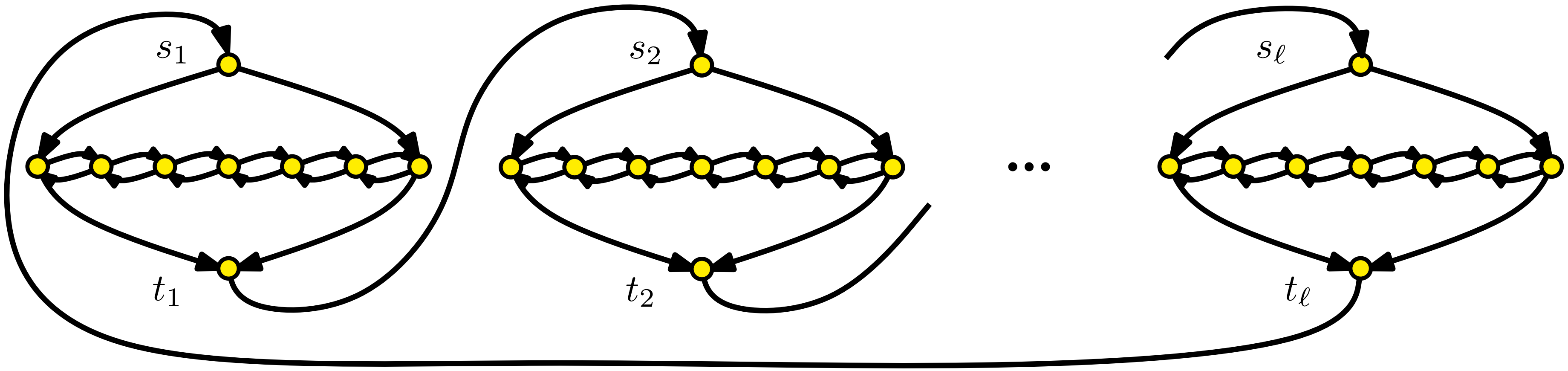


② Wenn $\neg x_j \in C_i$



③ Sonst keine Verbindung

Verknüpfung der Diamanten



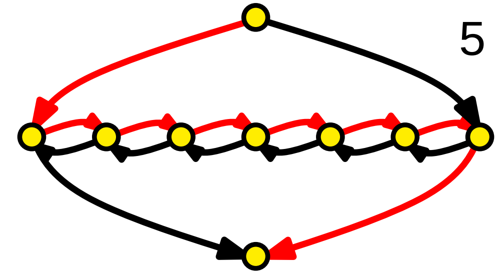
- verbinde zyklisch t_i mit s_{i+1} (in dieser Richtung)

Behauptung

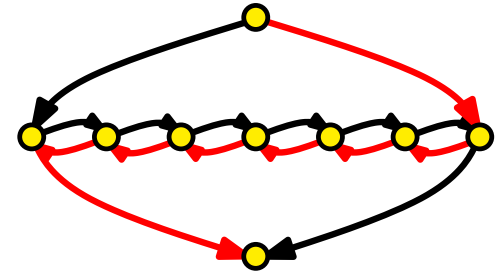
$$\boxed{\phi \text{ erfüllbar} \iff G \text{ hat gerichteten Hamiltonkreis}}$$

($\Rightarrow$)
- wir wählen eine erfüllende Variablenbelegung für ϕ
- Diamanten werden in der Reihenfolge $D_1, D_2, \ldots D_\ell$ durchlaufen
- es gibt zwei verschiedene Arten, wie ein Diamant D_i durchlaufen werden kann. Dies hängt davon ab, ob $x_i = 0$ oder $x_i = 1$ gesetzt wurde.

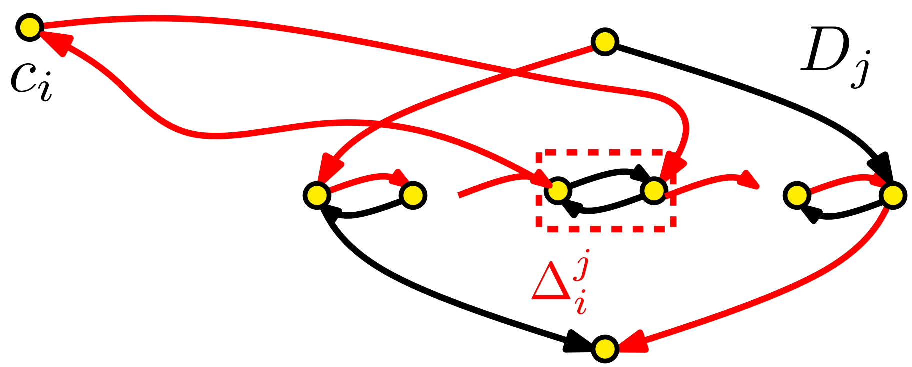
Ⓐ Wenn $x_i = 1$ durchlaufe D_i wie folgt

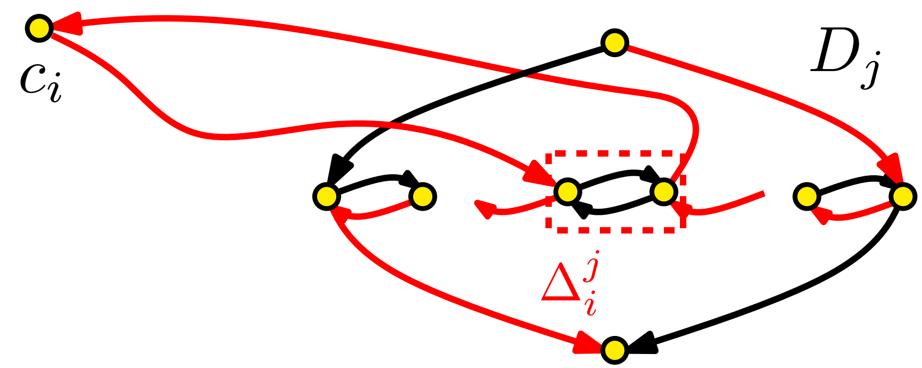


Ⓑ Wenn $x_i = 0$ durchlaufe D_i wie folgt



- für jede Klauel C_i wähle ein Literal $x_j/\neg x_j$, welches C_i erfüllt
- verbinde D_j mit c_i wie folgt





C_i wird durch x_j erfüllt

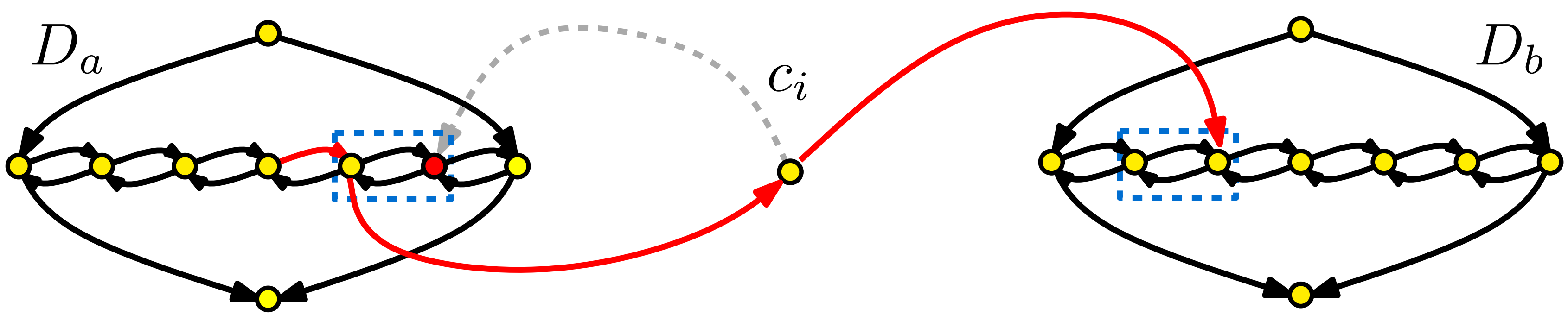
C_i wird durch $\neg x_j$ erfüllt

- der so erzeugte Kantenzug ist ein (gerichteter) Hamiltonkreis

(⇒)

- Sei H ein gerichteter Hamiltonkreis in G
- H muss jeden Knoten c_i besuchen, vorher und nachher muss dabei ein Knoten eines Diamanten besucht werden
- die Knoten in H vor und nach c_i müssen vom gleichen Diamanten stammen

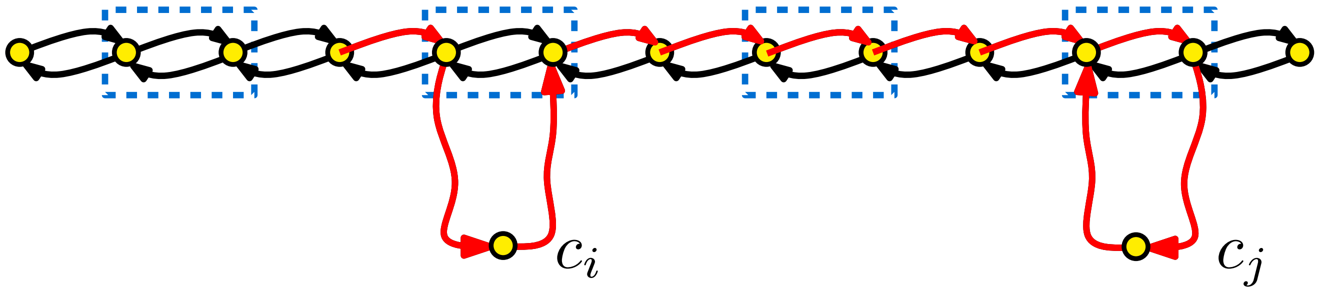
sonst ● Kann nicht mehr besucht werden



- H zerfällt in Teile $H = \tilde{D}_1\tilde{D}_2\tilde{D}_3\ldots\tilde{D}_\ell$, wobei $\tilde{D}_i$ der Weg durch D_i mit Unterbrechungen durch Knoten c_* entspricht

- Angenommen c_i, c_j sind aus $\tilde{D}_k$ und $x_k \in C_i$ und $\neg x_k \in C_j$
- OBdA: zwischen c_i und c_j in H liegt kein anderer Knoten c_*

Situation in D_k



- Lauf durch D_k ist kein Hamiltonpfad
- H hat genau die Form, wie im Beweis der $\Rightarrow$-Richtung
- die Art, wie die Diamanten durchlaufen werden, legen eine Variablenbelegung fest
- diese Definition ist widerspruchsfrei, und die Belegung erfüllt mindestens ein Literal pro Klausel
- ϕ ist erfüllbar
- Reduktion ist polyzeit (Graph hat Größe $O(n^2)$)

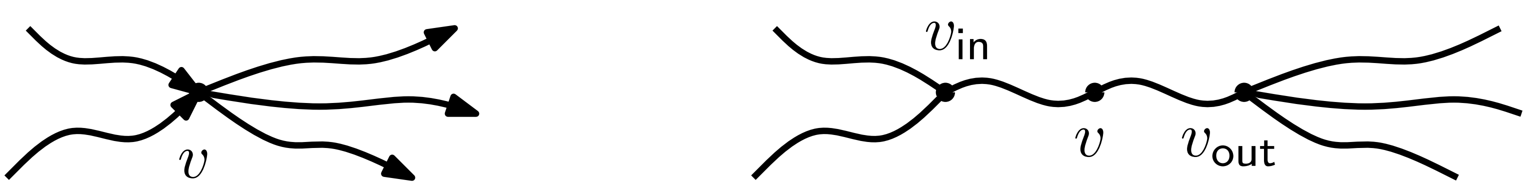
$\square$

Satz 45

HC ist NP-vollständig.

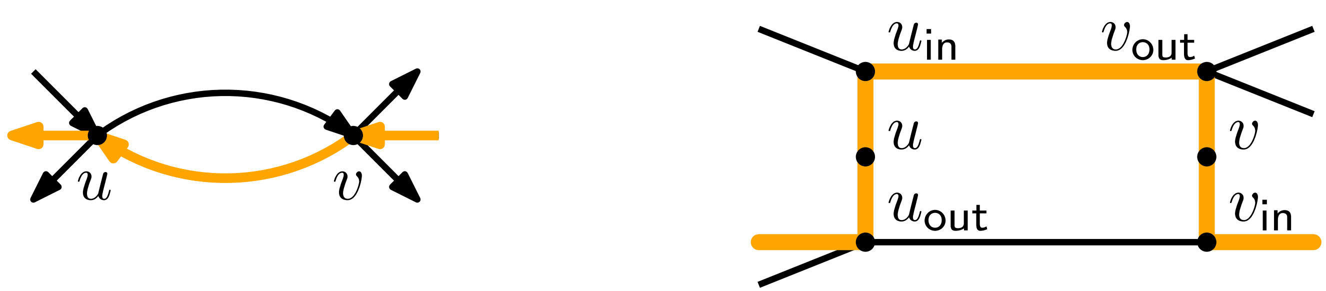
Beweis

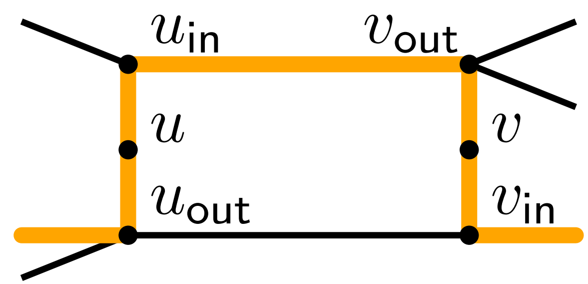
- HC$\in$ NP (Zeuge ist Knotenliste des Hamiltonkreises)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch DHC$\leq_p$HC
- Reduktion bildet gerichteten Graphen $G = (V, E)$ auf ungerichteten Graphen $f(G) = G' = (V', E')$ ab
- Ersetze jeden Knoten v durch einen Teilgraphen mit Knoten v_{in}, v und v_{out} wie folgt



- **Formal:** $E' = \{(u_{\text{out}}, v_{\text{in}}) \mid (u, v) \in E\} \cup \{(v_{\text{in}}, v)(v, v_{\text{out}}) \mid v \in V\}$

Bsp.





- Wenn $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ Hamiltonkreis in G, dann nach Konstruktion auch $(u_{1_{\text{in}}}, u_1, u_{1_{\text{out}}}, u_{2_{\text{in}}}, u_2, u_{2_{\text{out}}}, \ldots)$ Hamiltonkreis in G'
- Wenn H' Hamiltonkreis in G', dann gilt:
  - In H' liegt v zwischen v_{in} und v_{out}
  - In H' liegt v_{in} vor oder nach v (sonst ist v nicht traversierbar) - das gleiche gilt für v_{out} und v
  - In H' besteht aus Teilsequenzen $(v_{\text{in}}, v, v_{\text{out}})$ bzw. $(v_{\text{out}}, v, v_{\text{in}})$

    Ersetze Teilsequenzen durch v $\downarrow$ v $\downarrow$ v
    ergibt H''
- H'' (oder H'' gespiegelt) besteht nur aus Kanten der Form (u, v), wobei (u, v) in $E \to H''$ beschreibt HC in G
- f ist also Redultion für DHC$\leq_p$ HC und kann in Polynomialzeit berechnet werden $\square$

- **Def.** Eine **Tour** in einem gewichteten Graphen ist ein Kantenzug, der jeden Knoten besucht und beim Startpunkt endet.
- Die **Kosten einer Tour** entsprechen der Summe ihrer Kantengewichte.

TSP

Eingabe: Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten w, $B \in \mathbf{N}$

Frage: Existiert eine Tour mit Kosten $\leq B$?

Satz 46

TSP ist NP-vollständig.

Beweis

- TSP$\in$ NP (Zeuge ist Tour mit Kosten $\leq B$)
- wir zeigen NP-Schwerheit durch HC$\leq_p$TSP
- **Reduktion:** Gib Graph G Kantengewichte 1 überall und setze $B = |V|$
- Hat G HC, dann hat der gewichtete Graph eine Tour mit Kosten $= B$
- Hat G mit w eine Tour mit Kosten $\leq B$, dann ist es eine Tour mit Kosten $= B$, diese ist ein Hamiltonkreis □