Seminar über Abelsche Schemata

Sommersemester 2010

Abelsche Schemata bilden eine besonders interessante Klasse algebraisch geometrischer Objekte. Sie besitzen nicht nur eine eigene reichhaltige Theorie, sondern haben sich auch als ein entscheidendes Hilfsmittel bei der Lösung tiefliegender arithmetischer Probleme herausgestellt wie z.B. beim Beweis der Mordell-Weil Vermutung durch Gerd Faltings, siehe [CS].
Im Seminar werden wir die grundlegenden Eigenschaften Abelscher Schemata ausführlich studieren und dabei viele Begriffe und Theoreme der Algebraischen Geometrie konkret anwenden. Unser Ziel ist, das Theorem of the cube zu beweisen und erste Anwendungen dieses wichtigen Satzes kennenzulernen. Als Textgrundlage dient das hervorragende und ausführliche Vorlesungsskript von Prof. Tamme [T].

1. **Gruppenschemata und Abelsche Schemata** [T] §1+2.
   Vortragender: Sebastian Goetz. Gruppenobjekte in Kategorien, Yoneda-Einbettung, Beispiele von Gruppenschemata. Definition Abelscher Schemata, Wiederholung/Erklärung der Begriffe eigentlicher und glatter Morphismen, Regularität, Beispiel Picard-Funktor.

2. **Starrheitslemma** [T] §3.1.
   Vortragender: Jan Philipp Bensch. Beweis des Starrheitslemmas über die Eindeutigkeit von Morphismen zwischen Abelschen Schemata.

3. **Starrheitssätze für Abelsche Schemata** [T] §3.2.
   Vortragender: Oskar Braun. Beweis des Starrheitssatzes über Kriterien dafür, dass ein Morphismus von Schemata ein Morphismus von Gruppenschemata ist.

4. **Halbstetigkeitssätze und der Satz von Grauert** [T] §4.1+4.2.
   Vortragender: Sven Herrmann. Kohomologie kohärenter Garben und das Verhalten von Kohomologiegruppen in algebraischen Familien.

5. **Basiswechselsätze und kohomologische Flachheit** [T] §4.3+4.4.
   Vortragender: Harald Eckhold. Eigenschaften der Basiswechselmorphismen.

6. **Trivialitätskriterien für Geradenbündel** [T] §5.1+5.2.
   Vortragender: Thomas Kils. Der Picard-Funktor und Kriterien für die Trivialität von Geradenbündeln auf algebraischen Familien.

7. **Das spezielle und allgemeine Seesawprinzip** [T] §5.3+5.4.
   Vortragende: Ramona Wohlleb. Existenz eines universellen abgeschlossenen Unterschemas, auf dem Geradenbündeln trivial sind.

8. Ordnungen von Funktoren [T] §6.1.
Vortragender: Martin Brandenburg. Vorbereitungen für den Beweis des Theorem of the cube.

9. Theorem of the cube [T] §6.2.
Vortragender: Dimitri Wegner. Beweis des Theorem of the cube, welches das Verhalten von Geradenbündeln auf Produkten von Abelschen Schemata beschreibt.

10. Additionsformeln für Abelsche Schemata [T] §7.
Vortragende: Eva Höning. Ein Morphismus Abelscher Schemata induziert eine natürliche Abbildung auf den (relativen) Picardgruppen. Ihre Verträglichkeit mit der Addition von Morphismen, insbesondere der Translation wird durch die Additionsformeln beschrieben.

11. Ample Modulgarben auf Abelschen Schemata [T] §8.1+8.2.
Vortragende: Annika Bänsch. Wiederholung der Begriffe und Charakterisierung von amplen Modulgarben auf Abelschen Schemata, ihre Bedeutung für projektive Einbettungen.

12. Projektive Einbettungen Abelscher Varietäten [T] §8.3, [Mu] §6 und [Mi] §7.
Vortragender: Carl Heese. Beweis des Satzes, dass Abelsche Varietäten über einem Körper projekitv sind, also eine abgeschlossene Einbettung in einen projektiven Raum erlauben.

13. Isogenien und n-Teilungspunkte auf Abelschen Schemata [T] §9.
Vortragender: Julian Thimme. Isogenien sind eine besonders wichtige Klasse von Morphismen Abelscher Schemata. Die Multiplikation mit einer ganzen Zahl n auf einem Abelschen Schema ist ein Beispiel dafür. Die n-Teilungspunkte eines Abelschen Schemas, also der Kern der n-Multiplikation, ist von fundamentaler arithmetischer Bedeutung.

Literatur:

[CS] G. Cornell, J.H. Silverman: *Arithmetic Geometry*, Springer, 1986.

[Mi] J.S. Milne, Abelian Varieties, Kapitel V in [CS], 1986.

[Mu] D. Mumford: *Abelian Varieties*, Tata Institute, 1970.

[R] M. Rosen: *Abelian Varieties over* $\mathbb{C}$, Kapitel IV in [CS].

[T] G. Tamme: *Vorlesung über Abelsche Schemata I*, Preprintreihe SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik, Heft 433.