

# Seminar über Klassenkörpertheorie

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. Deninger und Dr. Quick

Die Klassenkörpertheorie ist einer der Höhepunkte der Mathematik des 20. Jahrhunderts. Ihre Errungenschaften ermöglichen ein tiefgreifendes Verständnis der Arithmetik von Zahlkörpern und stellen eine weitreichende Verallgemeinerung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes dar. Der Hauptsatz der Klassenkörpertheorie liefert insbesondere eine vollständige Klassifizierung der abelschen Erweiterungen eines Zahlkörpers. Im Falle eines lokalen Körpers  $K$  wird dies durch einen konkreten Isomorphismus  $\hat{K}^\times \rightarrow \text{Gal}(K)^{\text{ab}}$  zwischen der Vervollständigung der Einheitengruppe von  $K$  und des maximalen abelschen Quotienten der absoluten Galoisgruppe ausgedrückt. Bei einem globalen Körper wird die Rolle von  $K^\times$  von der Idelklassengruppe übernommen. Diese beeindruckende Theorie ist aber nicht nur ein Höhepunkt, sondern auch der Ausgangspunkt für viele tiefliegende aktuelle Fragestellungen in der Mathematik.

Die Grundlage für das Seminar bildet das Buch von Jürgen Neukirch [N1]. Es folgt dem kohomologischen Zugang zur Klassenkörpertheorie von Nakayama-Tate. Dies ist weder die einfachste noch die schnellste Methode, die Hauptresultate dieser Theorie zu beweisen. Dafür bietet [N1] eine sehr systematische Herangehensweise und die Gelegenheit, den in vielen Bereichen der Mathematik nützlichen kohomologischen Formalismus kennenzulernen und anzuwenden.

Da wir uns mit der Behandlung der lokalen und globalen Klassenkörpertheorie ein ehrgeiziges Ziel gesetzt haben, ist es, um von dem Seminar zu profitieren, für jede und jeden unbedingt erforderlich, den Text selbständig durchzulesen und sich auf jede Sitzung vorzubereiten. In den einzelnen Vorträgen soll der Inhalt von einem oder zwei Kapiteln von [N1] vorgestellt werden. Aufgrund der Fülle des Stoffes können im Seminar nur wenige Beweise im Detail ausgeführt werden. Der oder die Vortragende muss eine für den Gesamtzusammenhang und die Zuhörer sinnvolle Auswahl treffen. Dafür ist es unerlässlich, sowohl sich mit dem gesamten Stoff vertraut zu machen als auch andere Quellen zu Hilfe zu nehmen. Dafür bieten sich insbesondere die Artikel von Serre [S3] und Tate [T] an, für die ersten beiden Teile auch das Buch von Serre [S1]. Im Buch von Cassels und Fröhlich befinden sich zudem viele weitere interessante Artikel.

Zur Vorbereitung eines Vortrages sollte man ausreichend Zeit einplanen. Je mehr desto besser. Spätestens zwei Wochen vor dem Vortrag sollte man sich mit einem der Organisatoren treffen, um ungelöste Fragen zu klären und einen Plan für den Vortrag zu entwickeln.

## Teil I: Tate-Kohomologie endlicher Gruppen

### 1. $G$ -Moduln und Kohomologie endlicher Gruppen [N1] I §1, §2.

Vortragender: Martin Mohr.

$G$ -Moduln und ihr wichtigstes Beispiel  $L^\times$  als  $\text{Gal}(L/K)$ -Modul, Augmentation und Koaugmentation,  $\mathbb{Z}$ -freie und  $\mathbb{Z}[G]$ -freie Moduln, vollständige freie Auflösungen, Definition der Tate-Kohomologiegruppen mit Hilfe der Standardauflösung, konkrete Beschreibung von  $H^{-1}$ ,  $H^0$ ,  $H^1$  und  $H^2$ .

### 2. Exakte Kohomologiesequenz [N1] I §3.

Vortragende: Ramona Wohlleb.

Verbindungshomomorphismus und lange exakte Sequenz, induzierte Moduln, Dimensionsverschiebung, Kohomologiegruppen sind Torsionsgruppen,  $H^{-2}(G, \mathbb{Z}) = G^{\text{ab}}$ .

### 3. Inflation, Restriktion und Korestriktion und das Cupprodukt [N1] I §4, §5.

Vortragender: Daniel Boßert.

Beschreibung der Inflations-, Restriktions- und Korestriktionsabbildungen für (normale) Untergruppen, Konstruktion des Cupproduktes und seine Eigenschaften.

### 4. Kohomologie zyklischer Gruppen und der Satz von Tate [N1] I §6, §7.

Vortragender: Manuel Inselmann.

Periodizität der Kohomologie zyklischer Gruppen, Herbrandquotient, Satz von der kohomologischen Trivialität, der Satz von Tate.

## Teil II: Lokale Klassenkörpertheorie

### 5. Abstrakte Klassenkörpertheorie [N1] II §1.

Vortragender: Julian Thimme.

Formationen, Klassenformationen, Fundamentalklasse, allgemeines Reziprozitätsgesetz, Normrestsymbol, Normengruppen, Klassenkörper.

### 6. Galoiskohomologie und multiplikative Gruppe lokaler Körper [N1] II §2, §3.

Vortragender: Thomas Kils.

Kohomologie  $H^*(\text{Gal}(L/K), L^+)$  und  $H^*(\text{Gal}(L/K), L^\times)$  der additiven und multiplikativen Gruppe einer Galoiserweiterung  $L/K$ , Brauergruppe eines Körpers, Eigenschaften lokaler Körper und Struktur ihrer multiplikativen Gruppe.

### 7. Klassenformation der unverzweigten Erweiterungen [N1] II §4.

Vortragender: Torsten Schoeneberg.

Frobeniushomomorphismus, Kohomologie der Einheitengruppe einer unverzweigten Erweiterung, Invariantenabbildung, Normrestsymbol als Potenz des Frobenius, Normengruppe.

**8. Das lokale Reziprozitätsgesetz** [N1] II §5.

Vortragender: Marten Bornmann.

Ausweitung der Resultate auf verzweigte Erweiterungen, Brauergruppe eines lokalen Körpers ist isomorph zu  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , Hauptsatz der lokalen Klassenkörpertheorie, lokales Normrestsymbol.

**9. Der lokale Existenzsatz und die explizite Bestimmung des Normrestsymbols** [N1] II §6, §7.

Vortragender: Rajneesh Singh.

Topologische Charakterisierung der Normengruppen, Klassenkörper, Potenzreihen, formale Gruppengesetze, Lubin-Tate-Gruppen, die Körper  $L_{\pi,n}$ , Beispiel  $\mathbb{Q}_p$ .

Teil III: Globale Klassenkörpertheorie

**10. Ideale und Idealklassen** [N1] III §1, §2.

Vortragender: Rene Schipperus.

Zahlentheoretische Vorbereitungen, Kummersche Körper, Ideale, Idealklassengruppe, Idealgruppe als Galoismodul, Fixgruppen der Galoisaktion.

**11. Kohomologie der Idealgruppe und der Idealklassengruppe** [N1] III §3, §4.

Vortragender: Heiner Schmidt.

Berechnung der Kohomologie der Idealgruppe durch Lokalisierung, Normensatz für Ideale, zwei fundamentale Ungleichungen.

**12. Idelinvarianten** [N1] III §5.

Vortragender: Dimitri Wegner.

Invariantenisomorphismus für die Idealklassengruppe:  $H^2(\text{Gal}(L/K), C_L) \rightarrow \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ .

**13. Das globale Reziprozitätsgesetz** [N1] III §6.

Vortragender: Dimitri Wegner.

Letzter Nachweis der Axiome einer Klassenformation, das Artinsche Reziprozitätsgesetz, universelles Normrestsymbol.

**14. Der globale Existenzsatz** [N1] III §7.

Vortragende:

Topologische Eigenschaften der Ideal- und Idealklassengruppe, Charakterisierung der Normengruppen, Strahlklassenkörper, Hilbertscher Klassenkörper.

**Literatur:**

[AT] E. Artin, J. Tate: *Class Field Theory*, Benjamin, 1968.

[CF] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich (eds.): *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

- [N1] J. Neukirch: *Klassenkörpertheorie*, Bibliographisches Institut, 1969.
- [N2] J. Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, 1992.
- [N3] J. Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie*, in: Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990, Festschrift zum Jubiläum der DMV, 1990.
- [NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg: *Cohomology of Number Fields*, Springer, 2000.
- [S1] J-P. Serre: *Corps locaux*, Hermann, 1962, oder *Local Fields*, Springer 1979.
- [S2] J-P. Serre: *Cohomologie Galoisienne*, Lect. Notes Math. Vol. 5, Springer, 1964, oder *Galois Cohomology*, Springer, 1997.
- [S3] J-P. Serre: *Local Class Field Theory*, in [CF].
- [T] J. Tate: *Global Class Field Theory*, in [CF].