

Lokale Körper

Seminar Dr. D. Patel und Dr. G. Quick WS 2008/09

Dieses Seminar ist eine Einführung in die umfangreiche Theorie lokaler Körper, die eine wichtige Rolle in der algebraischen Zahlentheorie spielt. Das Ziel ist, bis in die Grundlagen der lokalen Klassenkörpertheorie vorzudringen.

Neben der gewöhnlichen Metrik gibt es für den Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen für jede Primzahl p auch eine p -adische Metrik. Zwei Zahlen liegen in dieser Metrik nahe beieinander, wenn ihre Differenz in einem geeigneten Sinn oft durch p teilbar ist. So wie die reellen Zahlen \mathbb{R} als Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich der gewöhnlichen Metrik entstehen, können wir \mathbb{Q} auch bezüglich jeder p -adischen Metrik vervollständigen und erhalten den Körper \mathbb{Q}_p der p -adischen Zahlen. Dieser hat viele spezielle topologische (z.B. total unzusammenhängend und lokal kompakt) und algebraische Eigenschaften und ermöglicht insbesondere, das Verzweigungsverhalten von p in Erweiterungen genau zu verstehen. \mathbb{Q}_p ist der Prototyp eines lokalen Körpers. Allgemein ist ein lokaler Körper ein Körper, der vollständig bezüglich einer diskreten Bewertung/Metrik (im Fall \mathbb{Q}_p die p -adische Metrik) ist und einen endlichen Restklassenkörper besitzt (im Fall \mathbb{Q}_p ist dies \mathbb{F}_p). So wie im Fall von \mathbb{Q} liefert ein algebraischer Zahlkörper, ein sogenannter globaler Körper, für jedes Primideal einen lokalen Körper. Viele Aussagen gelten genau dann für einen globalen Körper, wenn die entsprechende Aussage in jedem seiner lokalen Körper gilt. Ein berühmtes Beispiel dafür ist der Satz von Hasse-Minkowski, vgl. [Se2], [Sch]. In der Klassenkörpertheorie, einem der Höhepunkte der algebraischen Zahlentheorie, löst man die Fragestellung zunächst lokal und setzt die globale Lösung aus allen lokalen Lösungen zusammen. Lokale Körper sind also in jeder Hinsicht interessant.

Die Grundlage für das Seminar bildet das hervorragende Buch von Jean-Pierre Serre [Se1]. Obgleich wir damit die Ehre haben, von einem der Weltmeister zu lernen, ist es unerlässlich, weitere Literatur zu benutzen, insbesondere das 2. Kapitel des Buches von Jürgen Neukirch [N]. Serre ist schnell und elegant, aber er bedenkt nicht immer, dass wir versuchen, ihm zu folgen. Es muss also ein wenig Mühe investiert werden, aber der Aufwand wird sich am Ende gelohnt haben.

Zur Vorbereitung eines Vortrages sollte man ausreichend Zeit einplanen. Je mehr desto besser. Spätestens zwei Wochen vor dem Vortrag sollte man sich mit einem der Organisatoren treffen, um ungelöste Fragen zu klären und einen Plan für den Vortrag zu entwickeln. Ein Seminar sollte dazu genutzt werden, nicht nur die mathematischen, sondern auch die Fähigkeiten, einen strukturierten Vortrag zu erstellen und zu halten, zu erweitern.

Diejenigen, die noch keine Kenntnisse in algebraischer Zahlentheorie erworben haben, sollten sich vor Beginn des Semesters ein wenig mit den grundlegenden Ideen vertraut machen. Eine sehr schöne und elegante Quelle ist das Buch von Pierre Samuel [Sa]. Ein Vorlesungsskript und Übungsaufgaben zur algebraischen Zahlentheorie findet man auf der Homepage von Prof. Dr. Deninger zum Sommersemester 2008.

1. Vortrag: Diskrete Bewertungsringe

Vortragender: Marten Bornmann.

Referenz: [Se1] Kap. I §§1+2.

Diskrete Bewertungsringe spielen eine zentrale Rolle in der Theorie der lokalen Körper und der algebraischen Zahlentheorie. Für uns besonders wichtig ist, dass die Lokalisierung eines Dedekindringes an einem Primideal stets ein diskreter Bewertungsring ist. Deshalb sollen ihre besonderen Eigenschaften sorgfältig erklärt werden.

2. Vortrag: Die p -adische Metrik und der Körper der p -adischen Zahlen

Vortragender: Dimitri Wegner.

Referenz: [Sch] Kap. 9 §§1+2, [Se2] Kap. II, [N] Kap. II §1+2.

In diesem und dem nächsten Vortrag wollen wir das wichtigste Beispiel eines lokalen Körpers und seines diskreten Bewertungsringes studieren: den Körper \mathbb{Q}_p und den Ring der ganzen p -adischen Zahlen \mathbb{Z}_p . Wir betrachten den p -adischen Absolutbetrag und die besonderen topologischen Eigenschaften der induzierten Metrik. Wir definieren \mathbb{Q}_p zunächst als die Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich dieser Topologie.

3. Vortrag: Ganze p -adische Zahlen

Vortragender: Julian Thimme.

Referenz: [Sch] Kap. 9 §3, [Se2] Kap. II, [N] Kap. II §1+2.

Wir betrachten nun die ganzen p -adischen Zahlen als den zu \mathbb{Q}_p gehörigen diskreten Bewertungsring. Diskutieren Sie die verschiedenen äquivalenten Beschreibungen von \mathbb{Z}_p , insbesondere die p -adische Entwicklung in eine Potenzreihe. Erklären Sie insbesondere, was der projektive Limes bedeutet. Beschreiben Sie die Einbettung von \mathbb{Z} in \mathbb{Z}_p und die Einheiten in \mathbb{Z}_p .

4. Vortrag: Bewertungen und die induzierte Topologie, Erweiterungen lokaler Körper

Vortragende: Antje Brackemeyer.

Referenz: [Se1] Kap. II §§1+2, [N] Kap. II §4.

Definition eines bewerteten Körpers und der von der Bewertung induzierten Metrik/Topologie. Topologische Eigenschaften vollständiger Körper im nicht-archimedischen Fall. Erklären Sie nochmal, was der projektive Limes bedeutet. Diskutieren Sie das Beispiel $k = \mathbb{F}((T))$. Stellen Sie den Satz von Ostrowski, [N] Kap. II Satz 4.2, über die Klassifikation archimedischer Körper vor.

5. Vortrag: Fortsetzung von Bewertungen und Klassifikation von diskreten Bewertungsringen: Fall gleicher Charakteristik

Vortragende: Anna Cathrin Götttsch.

Referenz: [Se1] Kap. II §§3+4, [N] Kap. II, §5.

Zeigen Sie, dass endliche Erweiterungen vollständiger Körper wieder vollständig sind und dass der ganze Abschluss des Bewertungsringes in der Erweiterung wieder ein diskreter Bewertungsring ist. Erläutern Sie, wie sich Bewertungen in Erweiterungen fortsetzen. Zeigen Sie: Haben der diskrete Bewertungsring A und sein Restklas-

senkörper \overline{K} die gleiche Charakteristik $p > 0$, so ist A isomorph zu $\overline{K}[[T]]$ und K isomorph zu $\overline{K}((T))$.

6. Vortrag: Klassifikation von diskreten Bewertungsringen: Fall ungleicher Charakteristik

Vortragender: Aleksej Peters.

Referenz: [Se1] Kap. II §§5+6, [N] Kap. II, §5.

Zeigen Sie: Haben K und \overline{K} verschiedene Charakteristiken, so ist K eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q}_p . Die lokalen Körper können also vollständig als die endlichen Erweiterungen von $\mathbb{F}_p((T))$ oder \mathbb{Q}_p beschrieben werden. Formulieren Sie den Fall ungleicher Charakteristik in der allgemeinen Form von [Se1] Kap. II Théorèmes 3 und 4. Skizzieren Sie die Konstruktion des Ringes der Witt-Vektoren.

7. Vortrag: Diskriminante und Differenten

Vortragende: Tanja Artiga González.

Referenz: [Se1] Kap. III §§1-4.

Erläutern Sie die Definition und Eigenschaften des Diskriminanten- und Differentenideals. Lesen Sie auch den Rest des Kapitels und motivieren die Betrachtung dieser Ideale.

8. Vortrag: Verzweigung von Primidealen in Erweiterungen

Vortragender: Tobias Brix.

Referenz: [Se1] Kap. III §§5+6.

Erklären Sie die Bedeutung der Diskriminante und der Differenten für das Verständnis der Verzweigung von Primidealen in Erweiterungen und wie man diese Ideale bestimmen kann.

9. Vortrag: Verzweigungsgruppen und ihre Filtrierung

Vortragender: Daniel Wortmann.

Referenz: [Se1] Kap. IV §1.

Erklären Sie die Verzweigungsgruppen G_i , welche Untergruppen der Galoisgruppe einer endlichen Galoiserweiterung eines lokalen Körpers sind.

10. Vortrag: Die Quotienten G_i/G_{i+1} und die Filtrierung der Einheitengruppe eines lokalen Körpers

Vortragender: Christian Heine.

Referenz: [Se1] Kap. IV §2.

Definieren Sie die i te Einseinheitengruppe eines lokalen Körpers. Erklären Sie ihren Zusammenhang mit den Verzweigungsgruppen G_i und die Struktur der Quotienten G_i/G_{i+1} .

11. Vortrag: Satz von Herbrand und zyklotomische Erweiterungen von \mathbb{Q}_p

Vortragender: Marten Bornmann. *Referenz:* [Se1] Kap. IV §§3+4.

Definieren Sie die Funktionen ϕ und ψ und zeigen Sie den Satz von Herbrand (Prop.

14). Erklären Sie den Satz von Hasse-Arf und das Beispiel der zyklotomischen Erweiterungen von \mathbb{Q}_p .

12. Vortrag: Die Normabbildung und unverzweigte Erweiterungen

Vortragender: Torsten Schoeneberg.

Referenz: [Se1] Kap. V §§1-3.

Die Normabbildung und ihr Bild in der Einheitengruppe ist von zentraler Bedeutung für die Klassenkörpertheorie. Erklären Sie die Verträglichkeit der Norm mit der Filtrierung der Einheitengruppe und skizzieren Sie die Fälle einer unverzweigten und einer total verzweigten zyklischen Erweiterung.

13. Vortrag: Total verzweigte Galoiserweiterungen und das Theorem von Hasse-Arf

Vortragende:

Referenz: [Se1] Kap. V §§4-7 . Diskutieren Sie den Fall einer total verzweigten Galoiserweiterung und skizzieren Sie den Beweis des Theorems von Hasse-Arf.

14. Vortrag: Lokale Klassenkörpertheorie

Vortragende:

Referenz: [Se3], [Y].

Literatur:

- [F] **A. Fröhlich**: *Local Fields*, in J.W.S. Cassels, A. Fröhlich: *Algebraic Number Theory*, Academic Press 1967.
- [N] **J. Neukirch**: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer 1992, oder *Algebraic Number Theory*, Springer 1999.
- [Sa] **P. Samuel**: *Théorie algébrique des nombres*, Hermann 1967, oder *Algebraic Theory of Numbers*, Kershaw 1972.
- [Sch] **A. Schmidt**: *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*, Springer 2007.
- [Se1] **J-P. Serre**: *Corps locaux*, Hermann 1962, oder *Local Fields*, Springer 1979.
- [Se2] **J-P. Serre**: *Cours d'arithmétique*, Presse universitaire de France 1967, oder *A Course in Arithmetic*, Springer 1993.
- [Se3] **J-P. Serre**: *Local Class Field Theory*, in J.W.S. Cassels, A. Fröhlich: *Algebraic Number Theory*, Academic Press 1967.
- [Y] **T. Yoshida**: *Local class field theory via Lubin-Tate theory*, preprint, 2008, zu finden unter arXiv:math/0606108v2.