

# Seminarprogramm Algebraische Kurven

Sommersemester 2002 Mittwoch 13-15 Uhr

Prof. C. Deninger, G. Quick

Algebraische Geometrie ist eine weit entwickelte Theorie, die Ideen aus verschiedenen Gebieten der Mathematik benutzt. Die Kombination von Algebra und Geometrie ist unter anderem deshalb so fruchtbar, weil die Geometrie die richtige Intuition liefert, um die Methoden der Algebra erfolgreich anzuwenden. Es ist jedoch oft nicht leicht, die Geometrie hinter der Algebra zu entdecken und die erforderliche Algebra an der Geometrie abzulesen. Um diese Fertigkeit geht es in diesem Seminar, in dem wir uns die einfachsten Objekte, algebraische Kurven, genauer ansehen.

In der modernen Algebraischen Geometrie betrachtet man Schemata. Viele Konstruktionen mit Schemata bleiben allerdings für den Anfänger mysteriös. In unserer Textgrundlage [Fu] betrachten wir deshalb einfachere Objekte, algebraische Varietäten definiert als Nullstellenmengen von Polynomen. Viele Konstruktionen können bereits an ihnen vorgenommen werden. Das Verständnis der zugrunde liegenden Ideen wird dadurch stark erleichtert.

Allerdings sollte man unbedingt die Vorlesung von Frau PD Dr. Werner besuchen, um die moderne Theorie kennenzulernen. Im Seminar werden wir viele konkrete Beispiele dazu liefern und zudem den Zusammenhang zwischen Varietäten im Sinne von [Fu] und Schemata erklären und auf Verallgemeinerungen der Methoden eingehen.

Ein wichtiges Problem der Algebraischen Geometrie ist die Klassifikation ihrer Objekte. Eine erste Invariante ist die Dimension. Kurven sind Varietäten der Dimension 1. Kurven in der affinen oder projektiven Ebene kann man aber auch als Äquivalenzklassen von Polynomen in  $k[X, Y]$  bzw.  $k[X, Y, Z]$  definieren. Sind Kurven auf diese Weise gegeben, hat man sofort viel mehr Informationen über sie gegeben. Wir betrachten daher zunächst diesen Spezialfall und stellen später den Zusammenhang zur Dimension her, um unsere Diskussion auf beliebige Kurven auszuweiten.

Um ihre Eigenschaften untersuchen zu können, legen wir zunächst die algebraischen Grundlagen. Wir betrachten affine und projektive Kurven mit Hilfe von Begriffen wie z.B. singulären und nicht-singulären Punkten, lokalen Ringen, dem Körper der Funktionen auf einer Kurve und Schnittzahlen. Insbesondere beweisen wir den berühmten Satz von Bezout, der die Anzahl der Schnittpunkte zweier projektiver Kurven mit dem Produkt der Grade ihrer definierenden Polynome vergleicht.

Um Singularitäten loszuwerden, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die einfachste besteht darin, eine Normalisierung der Kurve zu finden. Wir zeigen die Existenz nicht-singulärer Modelle. Wir werden allerdings auch Punkte aufblasen. Solche Modelle mit guten Eigenschaften für Objekte mit schlechten zu finden, ist eine viel benutzte Methode auch in fortgeschritteneren Theorien, so dass es sehr hilfreich sein wird, diese Idee in dem relativ einfachen Fall von Kurven zu verstehen.

Eine andere wichtige Untersuchungsmethode der Geometrie ist die Einführung von Divisoren und Differentialen auf einer Kurve. Divisoren sind formale Summen von Punkten der Kurve mit ganzzahligen Koeffizienten. Die Koeffizienten kann man mit der Pol- oder Nullstellenordnung einer Funktion auf der Kurve vergleichen. Hat man so einen Divisor gegeben, kann man sich fragen, ob es Funktionen auf der Kurve gibt, deren Pol- bzw. Nullstellenordnung an einem Punkt mindestens so groß wie das negative des Koeffizienten des Punktes in der formalen Summe des Divisors ist. Wenn es solche Funktionen gibt, wie viele kann man davon finden? Darauf gibt der berühmte Satz von Riemann-Roch eine Antwort.

Die Beweise werden in [Fu] in relativ elementarer Formulierung geführt. Trotzdem findet man darin allgemeinere Ideen wie z.B. der Kohomologie projektiver Räume, ohne dass sie so benannt werden.

Eine wichtige Klasse von Kurven sind die vom Geschlecht 1, sogenannte elliptische Kurven. Auf ihnen kann man eine kommutative Gruppenstruktur definieren. Die Theorie dieser Kurven ist besonders interessant und entwickelt. Falls wir so weit kommen, werden wir einige Sätze über elliptische Kurven besprechen.

### **Vortrag 1:** [Fu] Kapitel 1

- Definition und Eigenschaften von algebraischen Mengen und dem affinen Raum, der Operationen  $I(\cdot)$  und  $V(\cdot)$ , Irreduzibilität von alg. Mengen
- Stelle Theoreme 1, 2 und Hilberts Basissatz vor
- Zusammenhang von  $I(\cdot)$  und  $V(\cdot)$
- Stelle Hilberts Nullstellensatz vor und die Beweisidee
- Interessante Übungsaufgaben: 1-8, 1-9, 1-10, 1-25, ...
- Zusätzliche Literatur: [Ha] I, §1; [Ke] §§1,2

### **Vorträge 2, 3:** [Fu] Kapitel 2

- Definition und Eigenschaften von Koordinatenringen, affinen Varietäten, polynomialen Abbildungen, rationalen Funktionen, lokalen Ringen, Formen, diskreten Bewertungsringen
- Propositionen 2, 3 und 6 sollten bewiesen werden
- Interessante Übungsaufgaben: 2-18, 2-19, 2-24, 2-25, 2-28, ...
- Zusätzliche Literatur: [Ha] I, §1; [Ke] §§1,2

### **Vortrag 4:** [Fu] Kapitel 3

- Definition und Eigenschaften von ebenen affinen Kurven, einfachen und singulären Punkten, Tangenten, Vielfachheiten
- Rechne Beispiele A-E von S. 64/65 vor
- Theoreme 1 und 2 sollten besprochen werden, die die oben definierten Begriffe durch die Eigenschaften lokaler Ringe ausdrücken
- In diesem Vortrag kommt es vor allem darauf an, Begriffe anschaulich zu machen und die Definitionen zu rechtfertigen
- Interessante Übungsaufgaben: 3-4, 3-10, 3-13, ...
- Zusätzliche Literatur: [Ha] I, §6; [Ke] §6

### **Vortrag 5:** [Fu] Kapitel 4

- Definition und Eigenschaften von homogenen Koordinaten, projektiven Räumen, projektiven algebraischen Mengen, proj. Varietäten, rationale Funktionen, homogener Funktionenkörper, proj. Abschluss
- Projektiver Nullstellensatz und die Operationen  $I(\cdot)$  und  $V(\cdot)$  für homogene Ideale
- Proposition 3 sollte bewiesen werden
- Interessante Übungsaufgaben: 4-4, 4-5, 4-6, 4-9, 4-28, ...
- Zusätzliche Literatur: [Ha] I, §2; [Ke] §§1,2,3

**Vortrag 6:** [Fu] Kapitel 3 §3

- Definiere eigentliche und transversale Schnitte und Schnittzahlen
- Erkläre die Eigenschaften (1)-(7) und warum man sie gerne haben möchte
- Beweise Theorem 3
- Erkläre Eigenschaften (8) und (9)
- Interessante Übungsaufgaben: 3-17, 3-18, 3-22, ...
- Zusätzliche Literatur: [Ha] I, §7

**Vortrag 7:** [Fu] Kapitel 5

- Definition und Eigenschaften von proj. ebenen Kurven, Vielfachheit, Tangenten, linearen Systemen, Komponenten
- Erkläre Theorem 1
- Beweise Bezouts Theorem und erkläre seine Folgen
- Interessante Übungsaufgaben: 5-1, 5-2, 5-4, 5-21, ...
- Zusätzliche Literatur: [Ha] I, §7; [Ke]

**Vortrag 8:** [Fu] Kapitel 6

- Definiere die Zariski Topologie, affine und proj. Varietäten, Morphismen, rationale Abbildungen, Birationalität, Produktvarietäten, Dimension einer Varietät
- Erneure die Definitionen von affinen, proj. Varietäten und alg. Kurven und stelle den Zusammenhang zur alten Definition her
- Propositionen 2, 5, 7 sollten erklärt werden
- Interessante Übungsaufgaben: 6-7, 6-8, 6-11, ...
- Zusätzliche Literatur: [Ha] I, §§1-6; [Ke]

**Vortrag 9:** Zusammenhang von Varietäten und Schemata

- In diesem Vortrag geht es darum, in welcher Weise Schemata eine Verallgemeinerung der bisherigen Definition von Varietäten liefern und welche Vorteile dabei gewonnen werden. Die bisherigen Begriffe sollen in der Sprache der Schemata erklärt werden
- Literatur: [Ha] II, §§2,4; [Eis-Ha]

**Vortrag 10:** [Fu] Kapitel 7

- Ausweitung bisheriger Definitionen auf beliebige Kurven
- Rationale Abbildungen von Kurven
- Erkläre die Technik des Aufblasens von Punkten in der affinen und proj. Ebene und quadratische Transformation

- Proposition 1, Theoreme 1 und 2 sollten erklärt werden
- Interessante Übungsaufgaben: 7-2, ...
- Zusätzliche Literatur: [Ha] I, §4; [Ke] §§6.5, 3.10

**Vortrag 11:** [Fu] Kapitel 7, §5, Kapitel 8

- Erläutere Theorem 3 und die Idee eines nicht-singulären oder regulären Modells einer Kurve (vgl. die allgemeinere Formulierung der Normalisierung einer Kurve [Ke] §6.5)
- Beweise Theorem 3
- Erkläre das Korollar zu Theorem 3 ausführlich
- Definiere Divisoren und den Vektorraum  $L(D)$
- Stelle Propositionen 1, 2 und 3 vor
- Interessante Übungsaufgaben: 7-17, 7-18, 8-1, 8-2, 8-6, ...
- Zusätzliche Literatur: [Ke] §§5,8

**Vortrag 12:** [Fu] Kapitel 8

- Definiere Derivationen, Differentiale, kanonische Divisoren, das Geschlecht einer Kurve
- Verdeutliche die Situation des Theorems von Riemann-Roch
- Erkläre die Beweisidee des Theorems von Riemann-Roch
- Folgerungen aus dem Theorem
- Interessante Übungsaufgaben: 8-8, 8-11, 8-13 werden im Beweis benutzt, sollten also bedacht werden
- Zusätzliche Literatur: [Ke] §8

**Referenzen:**

[Fu ] W. Fulton: Algebraic Curves, Benjamin New York, 1969

[Ha ] R. Hartshorne: Algebraic Geometry, Springer Verlag Heidelberg, 1977

[Ke ] G. Kempf: Algebraic Varieties, Cambridge Univ. Press, 1993

[Eis-Ha ] Eisenbud-Harris: The Geometry of Schemes, Springer Verlag New York, 1995

**Allgemeiner Hinweis:**

In den Vorträgen kommt es vor allem darauf an, die Ideen zu verstehen und zu erklären. Komplizierte Rechnungen können sowieso an der Tafel nicht nachvollzogen werden. Wer also nicht genug Zeit hat, um alles in der Zeit zu schaffen, sollte sich auf die wesentlichen Ideen beschränken und diese verdeutlichen, um den anderen ihr eigenes Lesen leichter zu machen. Natürlich sollten die Vortragenden alle Einzelheiten verstanden haben.