

Seminarprogramm Zeta- und L-Funktionen WS02/03

Prof. C. Deninger Gereon Quick

Vortrag 1: [Ap] XII; [Neu] VII, §§1,2; [Se2] VI

Definiere die Riemannsche Zeta-Funktion und zeige ihre Konvergenzeigenschaften; definiere Charaktere einer Gruppe, insbesondere für die zyklischen Gruppen $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$; definiere Dirichlet-L-Reihen, diskutiere ihre Konvergenz; leite Darstellungen als Euler-Produkt her, d.h.

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad L(\chi, s) = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}.$$

Vortrag 2: [Ap] XII; [Neu] VII, §§1,2

Erläutere die wichtigsten Eigenschaften der Γ -Funktion; leite die Integraldarstellung des Produkts $\Gamma(s)\zeta(s)$ her; beweise, dass man Zeta- und L-Funktionen meromorph fortsetzen kann; führe dazu die Hurwitz-Zeta-Funktion $\zeta(s, a)$ ein wie Apostol. Zeige, dass die Zeta-Funktion eine Funktionalgleichung erfüllt, d.h. die Funktion

$$\hat{\zeta}(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$$

ist invariant unter der Transformation $s \rightarrow 1-s$; leite eine Funktionalgleichung für L-Funktionen her; verwende für beide Beweise Schleifenintegrale; diskutiere Null- und Polstellen der Zeta-Funktion.

Vortrag 3: [Neu] VII, §§1,2

Leite die Funktionalgleichungen für $\zeta(s)$ mit Hilfe von Theta-Reihen her; definiere dabei insbesondere Theta-Reihen und diskutiere die Poissonsche Summenformel; stelle das Mellin-Prinzip vor; drücke die Zeta-Funktion an den Stellen $s = 1-k, s = 2k$ für alle ganzen Zahlen $k > 0$ mit Hilfe von Bernoulli-Zahlen aus.

Vortrag 4: [Neu] VII, §2

Leite die Funktionalgleichungen für $L(\chi, s)$ mit Hilfe von Theta-Reihen her; definiere dabei Gauß-Summen; drücke die L-Reihen $L(\chi, s)$ an den Stellen $s = 1-k, s = k$ kongruent $p \bmod 2, k \geq 1$, mit Hilfe von verallgemeinerten Bernoulli-Zahlen aus.

Als Anweendung unseres Wissens über Zeta- und L-Funktionen wollen wir Beweise für den Primzahlsatz und den Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Progressionen studieren. Der Primzahlsatz beschreibt das asymptotische Verhalten der Funktion $\pi(x)$, die die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ angibt.

Vortrag 5: [Za]

Stelle den Primzahlsatz und den Beweisplan vor; führe den von Zagier dargestellten Beweis vor; lasse dabei weg, was wir schon wissen und gehe mit Sorgfalt auf alles ein, was wir noch nicht gezeigt haben.

Vortrag 6: [Se2] VI, §4

Beweise mittels L-Reihen den Satz von Dirichlet, dass in jeder arithmetischen Progression $a + nk, n \geq 0$, unendlich viele Primzahlen vorkommen; zeige dazu das allgemeinere Theorem 2, das beschreibt, wie "dicht" Primzahlen in einer Progression liegen und dass die Primzahlen für ein fest gewähltes m in allen Restklassen modulo m "gleich verteilt" sind.

Zeta-Funktionen können auch in allgemeineren Situationen betrachtet werden. Man kann verschiedenen Objekten der arithmetischen Geometrie eine Zeta-Funktion zuordnen. Die Riemannsche Zeta-Funktion ist diejenige, die zu dem affinen Schema $\text{Spec } \mathbf{Z}$ gehört. Für die Definition stützt man sich auf die Darstellung als Euler-Produkt. In den folgenden Vorträgen studieren wir dieses Prinzip zunächst für Varietäten über einem endlichen Körper. Das nötige Wissen aus der algebraischen Geometrie wird zunächst wiederholt, bevor wir die berühmten Weil-Vermutungen besprechen. In Vortrag 9 studieren wir den allgemeineren Fall der Zeta-Funktion von arithmetischen Schemata.

Vortrag 7: [Ha] I, Appendix C; [De] §1.1-1.5

Definiere projektive Varietäten über einem Körper als Nullstellenmengen homogener Polynome; definiere Morphismen zwischen Varietäten, insbesondere den Frobenius-Morphismus für eine Varietät über einem endlichen Körper \mathbf{F}_q ; definiere die Zeta-Funktion einer Varietät zunächst wie Hartshorne in Appendix C und stelle die Weil-Vermutungen vor; erkläre den Zusammenhang mit der Riemannschen Vermutung.

Vortrag 8: [Ha] Appendix C; [De] §1

Stelle die Eigenschaften der ℓ -adischen Kohomologie vor (es muss nichts bewiesen werden); formuliere die ursprüngliche Definition der Zeta-Funktion einer Varietät über \mathbf{F}_q und zeige die Übereinstimmung mit der vorherigen Definition, siehe [De] (1.5.2); erläutere die kohomologische Interpretation der Weil-Vermutungen (man kann hier [Ha] folgen, aber man sollte sich auch [De] ansehen).

Vortrag 9: [Se1]

Definiere die Hasse-Weil-Zeta-Funktion für Schemata von endlichem Typ über \mathbf{Z} und diskutiere ihre Eigenschaften. Dabei kann man zunächst an ein affines Schema denken, das einer endlich erzeugten \mathbf{Z} -Algebra entspricht.

Ein weiteres Beispiel für das Auftreten von L-Funktionen sind Modulformen. Wir studieren zunächst die Modulgruppe, Modulfunktionen und Spitzenformen. Der q -Entwicklung einer Modulform kann man eine L-Funktion zuordnen. Auf die L-Funktionen, die man auf diese Weise erhält, kann man sein Wissen über die zugehörige Modulform anwenden. Dafür studieren wir insbesondere die Hecke-Operatoren und ihre Aktion auf der Modulgruppe.

Vortrag 10: [Se2] VII, §§1,2

Definiere die Modulgruppe $G = SL_2(\mathbf{Z})/\{\pm 1\}$ und ihre Aktion auf $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$; zeige die Existenz eines Fundamentalbereichs für G (Theorem 1) und beweise, dass G von zwei Elementen erzeugt wird (Theorem 2); definiere Modulfunktionen, Gitterfunktionen und stelle das Beispiel der Eisenstein-Reihen vor.

Vortrag 11: [Se2] VII, §§3,4

Definiere Modul- und Spitzenformen; zeige, wie man einer Modulform eine L-Reihe zuordnet; diskutiere insbesondere die Null- und Polstellen von Modulfunktionen; definiere die modulare Invariante j ; betrachte das Verhalten bei ∞ .

Vortrag 12: [Se2] VII, §§4-6

Zeige die Abschätzungen für die Koeffizienten der q -Entwicklung einer Modulform (Theorem 5, Korollare); diskutiere die Δ -Funktion (Theorem 6); definiere die Hecke-Operatoren $T(n)$ und die Algebra, in der sie liegen; beschreibe die Aktion dieser Operatoren auf Modulfunktionen.

Vortrag 13: [Se2] VII, §§5,6

Beschreibe die Eigenfunktionen aller $T(n)$; zeige, dass die zugeordnete L-Reihe einer solchen Eigenfunktion eine Darstellung als Euler-Produkt besitzt; erläutere die Beispiele von Eisenstein-Reihen und der Δ -Funktion; diskutiere Theta-Funktionen.

Literatur

[Ap] Apostol, T.M.: Introduction to Analytic Number Theory, 1976

[De] Deligne, P.: La Conjecture de Weil, Publ. IHES 34, 1973

[Ha] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry, Springer Verlag Heidelberg, 1977

[Neu] Neukirch, J.: Algebraische Zahlentheorie, 1992

[Se1] Serre, J.P.: Zeta- and L-Functions, in Arithmetical Algebraic Geometry, Proceedings of a conference 1963, hrsg. von O.F.G. Schilling, 1965

[Se2] Serre, J.P.: A Course in Arithmetics, 1976

[Za] Zagier, D.: Newman's Proof of the Prime Number Theorem, in American Mathematical Monthly, 104 (1997), No. 8, S.705-708