

# Didaktik der Geometrie und des Zahlensystems

Friedrich Ischebeck

# 1 Vorbemerkungen

Wahrscheinlich hätte ich nie Mathematik studiert, wenn es die Geometrie auf der Schule nicht gegeben hätte. An ihr habe ich gelernt, was ein Beweis ist. Es war einfach beeindruckend, dass man geometrische Aussagen, die keineswegs auf der Hand liegen, wie z.B. den Satz des Pythagoras aus „offensichtlichen“ Aussagen, wie den Kongruenzsätzen streng ableiten kann.

Hingegen hätte es mich kaum vom Hocker gerissen, letztere aus einer abstrakten Axiomatik abzuleiten.

Erst als ich studierte, hat mich folgende Frage interessiert:

**1.1 AXIOMATIK.** Ist es möglich, „die“ Geometrie, axiomatisch zu begründen? D.h.: Kann man mit *undefinierten* Grundbegriffen „Punkt“, „Gerade“ („Ebene“) und gewissen, ebenfalls undefinierten – Relationen, etwa der „Inzidenz“ („Punkt  $A$  liegt auf Gerade  $g$ “) und einem System von „Axiomen“ beginnend, alle Sätze rein logisch ableitend gewinnen, ohne hier und dort eine „anschauliche Selbstverständlichkeit“ zu benutzen? Kann man also statt der Worte „Ebene, Gerade, Punkt“ die Worte „Tisch, Stuhl, Bierseidel“ verwenden? Hilbert hat um 1900 gezeigt, dass die prinzipiell möglich ist. Ein modernes Lehrbuch, das nach dieser Methode vorgeht, ist [Kunz]. Euklid hat dies 2250 Jahre zuvor nur unvollkommen geschafft, aber vielleicht auch gar nicht angestrebt.

Möglicherweise hat Euklid seine „axiomatische Methode“ anders verstanden. In dem Buch „Elementargeometrie“ von Paul Lorenzen wird gezeigt, wie man, ausgehend von einer gewissen philosophischen Grundhaltung, der „konstruktiven“ Herangehensweise, Geometrie präzise ohne Axiomatisierung betreiben kann. Dieses Buch ist im euklidischen Geiste geschrieben. Es ist sehr interessant. Allerdings scheint es mir nicht möglich, es direkt als Schulbuch zu gebrauchen, obwohl sein Verfasser dies glaubt. Ich will nicht verschweigen, dass ich auch mit dem Buch von Lorenzen so meine Schwierigkeiten habe. Keineswegs würde ich z.B. Hilberts „Grundlagen“ für ein „Zerrbild“ der Geometrie halten. Zudem werde ich das Gefühl nicht los, dass das Wort „Konstruktion“ für Lorenzen einfach als Wort, und nicht wegen der Sache für die es jeweils steht, einen Heiligenschein trägt. Für mich scheint das Wort „konstruktiv“ in dem Lorenzenschen „konstruktiven Aufbau der Arithmetik“ (den ich für viel besser halte als die Axiomatik nach Peano) etwas sehr viel anderes zu bedeuten als in geometrischen „Konstruktionen“.

Eine axiomatische Vorgehensweise im Sinne Hilberts ist in der 5., 6. Klasse (wohl überhaupt auf dem Gymnasium) wenig sinnvoll. Die Kinder müssten in einem Beweis von der anschaulichen Bedeutung von Punkten und Geraden abstrahieren. Ein solches Vorgehen wäre auf der einen Seite eine Überforderung für die meisten Kinder und ließe auf der anderen Seite wahrscheinlich nur die Behandlung der simpelsten anschaulich fast „selbstverständlichen“ Sätze zu.

**1.2** Wenn man mit Kreide einen Punkt auf die Tafel malt und betrachtet ihn anschließend mit einer Lupe, so sieht man keineswegs einen Punkt. Entsprechendes gilt für eine Gerade. Und die Tafelebene ist unter einem Mikroskop ein bizarres Gebirge.

Punkte, Geraden, Ebenen sind „ideale Gegenstände“, die durch Zeichnungen nur unvollkommen widergegeben werden. Sie sind allerdings keine subjektiven Phantastereien. Über diese Dinge lässt sich trefflich philosophieren.

Didaktisch scheint mir aber darin kein Problem zu liegen. Kinder gehen im Allgemeinen mit Punkten und (geraden) Strecken unbefangen richtig um und denken selten darüber nach, inwiefern das Papierblatt oder die Tafel, worauf sie zeichnen, ein Stück einer Ebene darstellt. Eine Gerade als eine ins „unendliche fortgesetzte“ Strecke zu begreifen macht ihnen etwas mehr Schwierigkeiten. Es genügt allerdings, sie im Laufe des Umgehens mit Geraden immer wieder geduldig darauf hinzuweisen. (Überhaupt ist Geduld eine der pädagogischen Haupttugenden!)

**1.3 Abschweifung:** Wenn nun Zeichnungen prinzipiell unvollkommen sind, soll man daraus schließen, es käme auf die Qualität ihrer Ausführung nicht an? Ich denke: Nein. Sorgfältiges Zeichnen hilft, Fehlschlüsse zu vermeiden. Außerdem schult es Auge und Hand, auch die Anschauung, und somit Fähigkeiten, die jedem Menschen, nicht nur Mathematikern zugute kommen.

Aufgabe der Lehrperson ist es, statt (nur) zu kritisieren, geduldig zu helfen. Anzustreben ist eine gelassene Sorgfalt, keine verkrampfte Pedanterie. Dies zu lehren, erscheint mir eher schwierig. (Ich weiß nicht, ob ich das könnte.) Es erscheint mir aber ein zentraler Punkt jeglicher Erziehung – und Selbsterziehung.

Wenn ein mathematisch uninteressiertes, aber zeichnerisch begabtes Kind durch das saubere Zeichnen geometrischer Figuren zu einer gewissen Freude an der Geometrie gelangt, ist das ein Gewinn. Natürlich ist es aber strengstens verboten, ein mathematisch begabtes, aber im Zeichnen ungeschicktes Kind durch übertriebenes Betonen des Wertes einer sauberen Zeichnung auch nur im Mindesten von der Mathematik abzuschrecken!

**1.4 PARALLELENAXIOM.** Im Geometrieunterricht wird ganz selbstverständlich „dieselbe“ Figur wie im Heft mit (etwa) der zehnfachen Vergrößerung an die Tafel gezeichnet. Und wir glauben, dass dabei geometrisch dasselbe passiert, dass z.B. sich zwei auf dieselbe Weise konstruierten Geraden sich in der Heftebene genau dann schneiden, wenn sie es in der Tafel Ebene tun. Das heißt aber, dass unserer Anschauung nach die Geometrie euklidisch ist, d.h. das Parallelenaxiom gilt; oder dass die Winkelsumme im Dreieck 2 Rechte ( $180^\circ$ ) ist; oder dass ... .

Lorenzen begründet die Euklidizität der Geometrie wie folgt: Die Geometrie ist die Lehre von den geometrischen Konstruktionen. Wenn zwei Geometer unabhängig voneinander je 2 Punkte auf ihrem Blatt wählen (deren jeweilige Abstände verschieden sein dürfen) und von ihnen ausgehend je eine geometrische Figur nach derselben Vorschrift konstruieren, muss dasselbe herauskommen, also z.B., wenn zwei Geraden sich bei dem einen Geometer schneiden, müssen die entsprechenden Geraden sich auch bei dem anderen schneiden. Sonst hat einer fehlerhaft gezeichnet. Dies bedeutet aber, dass die Geometrie euklidisch ist. Dazu muss man sagen, dass Lorenzen eine vorphysikalische Geometrie anstrebt, da eine Vermischung von Geometrie mit der Physik zu Zirkelschlüssen führt oder zumindest führen kann. (Bevor man Längen misst, sollte man wissen, was man darunter versteht!?!?)

Die euklidische Geometrie widerspricht auch (zumindest bis heute) **nicht** der physikalischen Erfahrung, es sei denn, man definierte eine Gerade als den Weg eines Photons.

Auf dem Gymnasium muss man natürlich mit der euklidischen Geometrie beginnen und kann allenfalls in der Oberstufe auf nichteuklidische Geometrien eingehen.

**1.5** Die Geometrie ist aufs Engste mit den Zahlen verbunden. Zunächst kann man aus einer gegebenen Strecke ihr  $n$ -faches für jede natürliche Zahl  $n$  konstruieren. Da es aber keine Elementar-Länge gibt, derart, dass jede Strecke (bis auf „Kongruenz“) ein natürliches Vielfaches einer (sehr kleinen) Einheitsstrecke wäre, kommt man mit den natürlichen Zahlen zur Beschreibung von Streckenlängen nicht aus.

Jede Streckenlänge kann aber durch ein (nichtnegatives) rationales Vielfaches einer Längeneinheit beliebig genau beschrieben werden. Der Praktiker wird sich damit begnügen. Je nach Präzisionsanforderung reicht ihm zum Beispiel bei einem Bau die Genauigkeit bis auf einen cm. D.h. er kann mit Brüchen deren Nenner 100 ist, die Längen in einem Haus bezüglich der Maßeinheit Meter hinreichend genau beschreiben.

Aber die Theoretiker wissen seit etwa 2500 Jahren, dass die Länge der Diagonale in einem Quadrat, dessen Seitenlänge 1 Einheit ist, kein rationales Vielfaches der Einheit ist. Wir Mathematiker dürfen uns nicht mit dem genannten praktischen Standpunkt zufrieden geben. Wer, wenn nicht wir sind schließlich für derlei theoretische Aspekte zuständig. (Analog dazu: Natürlich braucht nicht jeder Abiturient Latein zu können. Aber es wäre doch eine Verarmung unserer Gesellschaft, wenn keiner mehr etwas vom Lateinischen wüsste.)

**1.6** Auch wenn man in der Schule einen axiomatischen Aufbau der Geometrie nicht vornehmen kann, sollte ein zukünftiger Lehrer zumindest wissen, dass es einen solchen gibt, und auf Schülerfragen auch Literatur dazu angeben können.

Es gibt aber noch einen weiteren möglichen Aufbau der Geometrie, bei dem man alle Argumente in den Beweisen anschauungsfrei durchführen kann. Man identifiziert den Raum mit dem  $\mathbb{R}^3$ , definiert Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen (oder durch Gleichungssysteme), den Abstand der Punkte  $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$  durch  $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$  und Winkel mit Hilfe des Skalarproduktes und des Arcuscosinus. Für dieses gibt es eine anschauliche Motivation. Anschließend befindet man sich auf sicherem Boden.

Dies macht man im Allgemeinen auf der Uni so. Insbesondere habe ich manchmal in der räumlichen Geometrie den Wunsch nach dieser Art Präzision.

## 2 Strecken und Winkel

**2.1 Strecken** sind einfacher zu verstehen als Geraden. Im Grunde kann man keine Gerade zeichnen, immer nur Strecken. (Hier sei das grundsätzliche Problem ausgeblendet, dass jede gezeichnete Strecke immer zu breit ist.)

Vielleicht sollte man auch mit dem Begriff der Strecke anfangen und **Geraden** als das definieren, was herauskommt, wenn man Strecken in beiden Richtungen unbegrenzt verlängert. (Das ist natürlich auch nur gedanklich möglich, indem man Begrenzungen unbeachtet lässt.)

Ein Sonderfall ist der **Strahl** auch als **Halbgerade** bezeichnet, der einen **Anfangspunkt** (den man auch **Endpunkt** nennen darf) hat und in eine Richtung unbegrenzt ist.

Die **Länge** einer Strecke kann man messen. Das ist den Kindern bekannt.

Auf einem Strahl kann man von dem Anfangspunkt aus eine Strecke beliebiger Länge aus abtragen.

Es ist interessant, dass Euklid hierfür eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal angibt, die nur solche Kreise zu zeichnen erlaubt, von denen der Mittelpunkt und ein Randpunkt gegeben ist. Es ist nicht nötig, einen Kreis zu konstruieren, von dem der Mittelpunkt und an einer anderen Stelle der Ebene der Radius durch eine Strecke gegeben ist. In Lorenzens Buch wird eine Konstruktion angegeben, die aus mehreren „Klappungen“ (Spiegelungen) um Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende besteht.

Was steckt dahinter? L. will eine von Experimenten unabhängige Definition von Streckenlänge geben.

Es spricht nichts dagegen, dass man es im S1-Unterricht mit dem Maßstab auf dem Lineal macht. Dass dies überhaupt geht, ist eine Erfahrungstatsache, die für Lineale, die von hier bis zum Mond reichen, oder solche, die von hier bis zum Mond transportiert wurden, vielleicht nicht erfüllt ist.

**2.2** Als Kind wird man sich vielleicht damit begnügen, Strecken auf den Millimeter genau zu messen. Aber das reicht natürlich nicht aus. Für den Naturwissenschaftler nicht, der viel kleinere Abstände messen will. Für den Mathematiker sicher auch nicht, der z.B. wissen will, wie lang eine Strecke ist, die auf das dreifache verlängert eine Strecke von 5cm ergibt.

Wenn man also die Länge einer Strecke als das  $a$ -fache einer vorher gewählten Strecke (etwa 1cm) angeben will, benötigt man zumindest die (nichtnegativen) rationalen Zahlen. Aber bekanntlich reichen diese nicht aus. Denn schon die Länge der Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 cm bzw. inch ist  $\sqrt{2}$  cm bzw. inch lang. Man weiß aber, dass  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl ist.

M.E. ist die Motivation, über die rationalen Zahlen hinauszugehen, stärker durch die Geometrie als durch die Arithmetik gegeben. Ich persönlich könnte eher darauf verzichten, die Existenz einer Zahl zu fordern, deren Quadrat 2 ist, als der Diagonale eines Einheitsquadrats ein Maß zuzuschreiben.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, reelle Zahlen einzuführen. Wir behandeln sie in dieser Vorlesung als sog. Dedekindsche Schnitte. Wir wollen exemplarisch  $\sqrt{2}$  als solchen beschreiben. Wenn es auch keine rationale Zahl  $\alpha$  mit  $\alpha^2 = 2$  gibt, so kann man doch für jede nichtnegative rationale Zahl  $\alpha$  leicht nachprüfen, ob  $\alpha^2 < 2$  oder ob  $\alpha^2 > 2$  ist. Die Menge  $\mathbb{Q}_+$  der nichtnegativen rationalen Zahlen zerfällt also in die beiden Mengen  $A, B$ , wobei  $A := \{\alpha \in \mathbb{Q}_+ \mid \alpha^2 < 2\}$  und  $B := \{\alpha \in \mathbb{Q}_+ \mid \alpha^2 > 2\}$  ist. Für diese beiden Mengen zeigt man leicht:

$$A \cup B = \mathbb{Q}_+$$

$$a \in A, b \in B \implies a < b$$

$$B \neq \emptyset$$

$B$  besitzt kein kleinstes Element.

Ein Paar von Mengen, das obige vier Eigenschaften hat, heißt ein Dedekindscher Schnitt. Jeden solchen betrachtet man als reelle Zahl. Der speziell hier angegebene Dedekindsche Schnitt ist eben die reelle Zahl  $\sqrt{2}$ . Zwei Dedekindsche Schnitte  $A, B$  und  $A', B'$  bezeichnen definitionsgemäß genau dann dieselbe reelle Zahl, wenn  $A = A'$  und  $B = B'$  ist.

**Remarks 2.3** a) In der Geometrie liegt es nahe, zunächst nur nichtnegative ganze, rationale und reelle Zahlen einzuführen. (Auch im Schulunterricht geht man häufig so vor. Zumindest führt man in der Regel die nichtnegativen rationalen Zahlen vor den negativen ganzen Zahlen ein.) Die Einführung von Koordinaten erzwingt dann die Einführung der negativen Zahlen.

Man kann natürlich Dedekindsche Schnitte auch für ganz  $\mathbb{Q}$  betrachten. Als erste Eigenschaft fordert man dann  $A \cup B = \mathbb{Q}$ , zusätzlich zur dritten muss man dann noch  $A \neq \emptyset$  fordern.

b) Die Unsymmetrie der letzten Eigenschaft aus Abschnitt 2.2 liegt an folgendem. Man möchte die rationalen Zahlen auch als Dedekindsche Schnitte, also als reelle Zahlen auffassen. Der Dedekindsche Schnitt, der die rationale Zahl  $\alpha \geq 0$  beschreibt, ist durch  $A = \{a \in \mathbb{Q}_+ \mid a \leq \alpha\}$  und  $B = \{b \in \mathbb{Q}_+ \mid b > \alpha\}$  gegeben.

Beschreibt man  $\alpha \in \mathbb{Q}_+$  durch das Mengenpaar  $(A', B')$  mit  $A = \{a \in \mathbb{Q}_+ \mid a < \alpha\}$  und  $B = \{a \in \mathbb{Q}_+ \mid a \geq \alpha\}$ , so gilt statt der letzten Eigenschaft die Eigenschaft:

$A$  besitzt kein größtes Element.

Wenn man die letzte Forderung ganz fallen lässt, wird jede rationale Zahl durch zwei Mengenpaare gegeben.

c) Es gibt noch andere Möglichkeiten, reelle Zahlen einzuführen, die alle ihre Vor- und Nachteile haben. Zur Definition der Dedekindschen Schnitte braucht man keinen Grenzwertbegriff. Man kann sie vielleicht in einem Leistungskurs erwähnen. Immerhin!

Wie man mit Dedekindschen Schnitten rechnet, wird später in der Vorlesung angegeben.

**2.4 MÖGLICHE AUFGABEN FÜR SCHULKINDER:** Die Längen gewisser Strecken messen, z.B. Länge und Breite einer Heftseite, eines Schreibblattes. Zwei DIN A5-Blätter bedecken genau ein DIN A4-Blatt. Die Länge (bzw. Breite) eines A5-Blattes ist die Breite (bzw. halbe Länge) eines A4-Blattes.

(Nach Einführung der Wurzelrechnung kann man die Aufgabe stellen: Wie ist das Seitenverhältnis beim DIN  $A_n$ -Format, wenn es für alle  $n$  dasselbe sein soll?)

**2.5 KREIS.** Welche Figur beschreibt die Punkte, die von einem gegebenen Punkt  $A$  alle denselben Abstand  $r$  haben? Wie, mit welchen Hilfsmitteln kann man diese Figur konstruieren? Man stelle diese Frage den Kindern, ehe man den Zirkel als praktisches Instrument erläutert.

Dann kann man die Frage stellen, wie man zeichnerisch die Punkte findet, die vom Punkt  $A$  den Abstand  $b$  und vom Punkt  $B$  den Abstand  $a$  haben sollen.

Sei  $c$  der Abstand von  $A$  und  $B$ . Für welche  $a, b$  gibt es solche Punkte? Denken Sie genau darüber nach, ehe Sie diese Frage an die Schulkinder stellen. Die Ungleichung  $a \geq c - b$  reicht nicht!

Dass es höchstens 2 derartige Punkte (und im Fall  $c - b < a < c + b$  genau 2 solche) gibt, ist anschaulich klar, wird aber bei Euklid *bewiesen*. (In der „analytischen Geometrie“ lässt es sich leicht mit algebraischen Mitteln zeigen.)

Dies bedeutet den bekannten Kongruenzsatz, dass ein Dreieck „bis auf Kongruenz“ bereits eindeutig durch die Längen der drei Seiten gegeben ist.

Dies hat auch mechanische Bedeutung: Wenn man drei Holzlatten an den Enden drehbar zusammenfügt, so entsteht ein starres Lattendreieck. Vielleicht sollte man an Stelle des euklidischen Beweises diesen mechanischen Beweis im Schulunterricht bringen. Das ist natürlich philosophisch Fragwürdig.

Macht man dasselbe mit 4 Latten, so sieht man, dass für Vierecke ein entsprechender Satz nicht gilt!

**2.6 Winkelmessung.** Diese ist ziemlich subtil. Bei zwei sich schneidenden Geraden treten 2 Winkel auf, die sich zu einem **gestreckten Winkel** ergänzen. Man könnte etwa als Schnittwinkel den kleineren der beiden definieren. Das würde allerdings zu folgendem Phänomen führen: Dreht man eine der Geraden gegenüber der anderen, so wächst zunächst der Winkel, um dann wieder kleiner zu werden – oder umgekehrt.

Deshalb definiere man Winkel zwischen zwei Strahlen (Halbgeraden) mit gemeinsamem Endpunkt. Auch hier hat man zunächst zwei Winkel, die sich zu einem **Vollwinkel** ergänzen. Deshalb sollte man (wie im [L-S]) einen Winkel zu einem Paar von Strahlen mit gemeinsamem Endpunkt definieren – wo ja einer der beiden Strahlen als erster ausgezeichnet ist.

Von dem ersten Strahl aus misst man den Winkel gegen den Uhrzeigersinn zum zweiten Strahl. Bei Übereinstimmung der beiden Strahlen hat man allerdings die Wahl zwischen einem Nullwinkel und einem Vollwinkel. Dass man gegen den Uhrzeigersinn wandert, ist lediglich eine Konvention und nicht denknotwendig.

(Übrigens setzt das Reden vom Uhrzeigersinn voraus, das man von einer festgelegten Seite auf die Ebene sieht. Stellt man sich die Ebene als durchsichtig im Raum vor und bevorzugt keine Seite, auf sie zu sehen, so hat es keinen Sinn, von links- und rechts-herum zu sprechen.)

Traditioneller Weise teilt man den Vollwinkel in 360 Grade ein. Das ist natürlich eine Konvention. Genausogut könnte man ihn in 400 (Neugrade) oder 1000 Grade einteilen. Trotzdem ist die Winkelmessung grundsätzlich etwas anderes als die Streckenmessung, da der Vollwinkel ein kanonisches Maß, eine kanonische Einheit ist. Kanonische Längeneinheiten hingegen gibt es nicht. Physiker nennen das Maß eines Winkels dimensionslos.

Für die Bedürfnisse der Analysis ist es das Sinnvollste, Winkel im Bogenmaß zu messen. Das liegt aber für Schulkinder der S1 keineswegs nahe. Außerdem bracht man dazu das Wissen oder den Glauben, dass man Kreislinienabschnitten eine Länge zuordnen kann.

**2.7 ORTHOGONALITÄT.** Ein **rechter** Winkel ist ein „halber“ gestreckter Winkel. Ist einer der vier (nicht überstumpfen) Winkel, der am Schnittpunkt zweier Geraden auftritt ein Rechter, so auch die anderen drei – wie man sofort nachrechnet. Bei dieser Betrachtungsweise setzt man voraus, dass sich Winkel „geometrisch addieren“. Das ist mathematisch-philosophisch etwas problematisch. Ich glaube nicht, dass es Kindern Probleme bereitet.

Man sagt, dass sich zwei Geraden **senkrecht** – auch **orthogonal** oder **rechtwinklig** schneiden, wenn die Schnittwinkel rechte Winkel sind.

Zu jeder Geraden  $a$  und jedem Punkt  $A$  gibt es genau eine Gerade  $b$  durch  $A$ , die senkrecht auf  $a$  steht. (Dabei darf  $A$  auf oder außerhalb  $a$  liegen.) Die Gerade  $b$  kann man mit dem Geodreieck finden und zeichnen.

Damit kann man den Abstand zwischen  $A$  und  $a$  definieren, nämlich als Streckenlänge  $\overline{AS}$  wo  $S$  den Schnittpunkt von  $a$  mit der Orthogonalen zu  $a$  durch  $A$ . Kinder haben manchmal Schwierigkeiten, diesen Abstand zu messen, wenn man die Gerade  $a$  zeichnerisch durch eine Strecke repräsentiert, auf der  $S$  nicht liegt.

**2.8 Parallelität.** Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie entweder übereinstimmen oder keinen gemeinsamen Punkt (**Schnittpunkt**) haben.

Ich schlage vor, das sog. **Parallelenaxiom** (stärker als nötig) wie folgt zu formulieren:

Verschiedene Geraden  $a, b$  sind genau dann parallel, wenn die **Gegenwinkel**  $\alpha, \beta$ , die wie in folgender Zeichnung sich bei einem Schnitt mit einer dritten Geraden ergeben, sich zu einem gestreckten Winkel ergänzen (addieren).

Es ist dann klar, dass es zu einer Geraden  $a$  und einem Punkt  $B$  genau eine Gerade  $b$  durch  $B$  gibt, die zu  $a$  parallel ist.

Man rechnet auch leicht nach, dass bei zwei Parallelen, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, sogenannte **Stufenwinkel** gleichgroß sind.

### 3 Natürliche Zahlen

**3.1** Die natürlichen Zahlen sind  $0, 1, 2, 3, \dots$ , insgesamt unendlich viele, so dass man sie nicht alle hinschreiben kann. (Übrigens gibt es unter Mathematikern einen erbitterten Streit darüber, ob man die 0 wirklich zu ihnen rechnen soll. Ich jedenfalls tue das und setze es hiermit für diesen Kurs fest.)

Die Menge (=Gesamtheit) der natürlichen Zahlen wird mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet, also

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Mit  $\mathbb{N}_1$  bezeichne ich die Menge der natürlichen Zahlen  $\neq 0$  also  $\mathbb{N}_1 := \{1, 2, 3, \dots\}$ . (Wenn man will, kann man auch  $\mathbb{N}_2 := \{2, 3, 4, \dots\}$  definieren, usw.)

**3.2** Sie wissen, wie man natürliche Zahlen addiert und multipliziert. Wahrscheinlich kennen Sie auch folgende Gesetze für diese „Verknüpfungen“

$$(1) \begin{cases} m + n = n + m & mn = nm & \text{Kommutativität} \\ k + (m + n) = (k + m) + n & k(mn) = (km)n & \text{Assoziativität} \\ k(m + n) = km + kn & & \text{Distributivität} \end{cases}$$

(In der letzten Gleichung ist natürlich die Konvention „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“ anzuwenden; d.h.  $km + kn := (km) + (kn)$ .) Beachten Sie, dass das Distributivitätsgesetz die Addition und die Multiplikation vollkommen unterschiedlich behandelt. Die Ausdrücke  $k + mn$  und  $(k + m)(k + n)$  haben fast immer verschiedene Werte!

Übrigens hielt ich als abc-Schütze die Kommutativität der Multiplikation natürlicher Zahlen keinesfalls für selbstverständlich. Erst das Beispiel der Apfelsinen, die in einer Kiste in 4 (waagerechten) Reihen à 5 Stück, d.h. aber auch in 5 (senkrechten) Reihen à 4 Stück angeordnet waren, machten mir das Kommutativitätsgesetz für die Multiplikation augenfällig.

Die Zahlen 0 und 1 spielen für die Addition, bzw. Multiplikation eine Sonderrolle:

$$(2) \quad 0 + n = n, \quad 1n = n$$

Man nennt die 0 ein **neutrales Element** für die Addition und die 1 ein solches für die Multiplikation.

**3.3** Für *natürliche* Zahlen  $a, b$  gelten folgende beiden Regeln

$$a + b = 0 \implies a = b = 0$$

(dies stimmt für die ganzen Zahlen, die auch negativ sein können, nicht mehr)

$$ab = 0 \implies a = 0 \text{ oder } b = 0$$

(Die stimmt auch im Bereich aller ganzen Zahlen.)

**3.4** Man kann die natürlichen Zahlen der Größe nach vergleichen: Man schreibt  $m \leq n$ , wenn es eine natürliche Zahl  $k$  mit  $m + k = n$  gibt. Man sagt in diesem Fall: „ $m$  (ist) kleiner (oder) gleich  $n$ .“

Die Relation ‘ $<$ ’ wird dann folgendermaßen definiert:

$$m < n \iff m \leq n \text{ und } m \neq n$$

Die Relation ‘ $\leq$ ’ genügt neben der Regel „ $0 \leq n$  für alle natürlichen Zahlen  $n$ “ den folgenden Gesetzen:

$$(4) \begin{cases} k \leq m, m \leq n \implies k \leq n & \text{Transitivität} \\ n \leq n & \text{Reflexivität} \\ m \leq n, n \leq m \implies m = n & \text{Antisymmetrie} \\ m \leq n \text{ oder } n \leq m & \text{Totalität} \end{cases}$$

Was folgt daraus für '≥' (was Sie richtig definieren müssen)? Man kann folgende Regeln ableiten:

$$(5) \quad k \leq m < n \implies k < n; \quad \text{und} \quad k < m, m \leq n \implies k < n$$

Bezüglich der Addition und Multiplikation gilt für ≤:

$$(6) \quad \begin{cases} m \leq n \implies k + m \leq k + n \\ m \leq n \implies km \leq kn \end{cases}$$

Welche Regeln gelten für '<'?

**3.5** Wichtig ist das „**Induktionsprinzip**“, das bei einer axiomatischen Beschreibung der natürlichen Zahlen gemeinhin eines der Axiome ist:

*Sei  $\mathcal{A}(n)$  eine Aussage über natürliche Zahlen  $n$  (die für jede einzelne natürliche Zahl  $n$  wahr (d.h. richtig) oder falsch sein kann). Es gelte:*

*$\mathcal{A}(0)$  ist richtig;*

*und*

*für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , für welches  $\mathcal{A}(n)$  richtig ist, gilt auch  $\mathcal{A}(n+1)$ .*

*Dann gilt  $\mathcal{A}(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . (Hier, wie immer in der Mathematik, bedeutet „gilt“ dasselbe wie „ist richtig“.)*

(Ein Beweis dafür, dass  $\mathcal{A}(0)$  gilt, heißt „Induktionsanfang“. Ein Beweis dafür, dass  $\mathcal{A}(n+1)$  aus  $\mathcal{A}(n)$  folgt, heißt „Induktionsschritt“. Die Voraussetzung in diesem Schluss heißt auch „Induktionsvoraussetzung“ oder „Induktionsannahme“.)

Äquivalent zu o.a. Beschreibung kann man das Induktionsprinzip auch in der Sprache der Mengen darstellen:

Sei  $M \subset \mathbb{N}$  eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$ , die folgenden Eigenschaften genügt:

$$0 \in M$$

und

$$n \in M \implies n + 1 \in M.$$

Dann gilt  $M = \mathbb{N}$

**Examples 3.6** a) Wir beweisen für  $n \in \mathbb{N}$  die Aussage  $\mathcal{A}(n)$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Die Aussage  $\mathcal{A}(0)$

$$1 = (0 + 1)^2$$

ist offenbar richtig. Unter der Annahme, dass  $\mathcal{A}(n)$  gilt, wollen wir jetzt  $\mathcal{A}(n+1)$  zeigen:

$$1 + \dots + (2n + 1) + (2(n + 1) + 1) = (n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1 = ((n + 1) + 1)^2$$

Also gilt  $\mathcal{A}(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Wir beweisen für  $n \in \mathbb{N}$  die Aussage  $\mathcal{A}(n)$

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Die Aussage  $\mathcal{A}(0)$

$$0 = \frac{0(0 + 1)}{2}$$

ist offenbar richtig. Unter der Annahme, dass  $\mathcal{A}(n)$  gilt, wollen wir jetzt  $\mathcal{A}(n+1)$  zeigen:

$$0 + 1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 =$$
$$\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Also gilt  $\mathcal{A}(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Hier haben wir das Rechnen mit „Brüchen“ verwendet. In Wahrheit sind allerdings die Ausdrücke  $n(n+1)/2$  natürliche Zahlen für alle  $n \in \mathbb{N}$

c)  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

In der Mathematik werden **sehr häufig** Beweise mit dem Induktionsprinzip geführt. Man sagt auch: sie werden mit (vollständiger) Induktion geführt.

**3.7** Mit Hilfe vollständiger Induktion lässt sich auch folgendes **Minimalprinzip** beweisen

*Ist  $M$  eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{N}$ , so besitzt  $M$  ein kleinstes Element, d.h. es gibt ein  $k \in M$  mit  $k \leq m$  für alle  $m \in M$ .*

(Eine Menge  $M$  heißt **nichtleer**, wenn es mindestens ein  $m \in M$  gibt.)

Ein BEWEIS des Minimalprinzips mit Hilfe vollständiger Induktion (der nicht vorgetragen wird) geht so:

Die Aussage  $\mathcal{A}(n)$  ist die folgende:

Wenn in  $M$  ein Element  $m \leq n$  existiert, so besitzt  $M$  ein kleinstes Element.

Offenbar ist das Minimalprinzip äquivalent damit, dass  $\mathcal{A}(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

Der Induktionsanfang bedeutet:

Besitzt  $M$  ein Element  $m \leq 0$ , so hat  $M$  ein kleinstes Element.

Dies ist aber richtig. Denn da 0 das kleinste Element von  $\mathbb{N}$  ist, muss es zu  $M$  gehören und ist dann offenbar das kleinste Element von  $M$ .

Jetzt müssen wir  $\mathcal{A}(n+1)$  aus  $\mathcal{A}(n)$  folgern.

Sei also  $M$  eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$ , die ein Element  $\leq n+1$  enthält. Enthält sie ein Element  $\leq n$ , so besitzt sie nach Induktionsvoraussetzung ein kleinstes Element. Enthält sie aber kein solches, so muss  $n+1$  ihr kleinstes Element sein.

Mit Hilfe des Minimalprinzips wollen wir zwei Sätze über Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen zeigen, die allerdings von den meisten für selbstverständlich gehalten werden. Was ‘Teiler’ etc. bedeutet, sei als bekannt vorausgesetzt.

**Definition 3.8** *Eine Primzahl ist eine ganze Zahl  $p > 1$  die außer 1 und  $p$  keine weiteren natürlichen Zahlen als Teiler hat.*

(Im Bereich aller ganzen Zahlen sind auch  $-1$  und  $-p$  noch Teiler von  $p$ .) Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, ...

**Proposition 3.9** *Jede ganze Zahl  $n > 1$  ist ein Produkt von Primzahlen.*

Dabei versteht man eine Primzahl als Produkt eines einzigen Faktors. Wenn man will, kann man die 1 als Produkt von 0 Faktoren auffassen. Der Satz wäre dann sogar für alle  $n \geq 1$  richtig.

**Proof:** Angenommen, die Behauptung wäre falsch, d.h. die Menge derjenigen  $n > 1$ , die kein Produkt von Primzahlen sind, wäre nicht leer. Nach dem Minimalprinzip hätte sie ein kleinstes Element

$m$ . Dieses kann keine Primzahl sein, da eine solche als Produkt von Primzahlen (mit 1 Faktor) gilt. Also gibt es einen Teiler  $d$  von  $m$  mit  $1 < d < m$ . D.h. es gibt ein  $e \in \mathbb{N}$  mit  $m = de$ . Für  $e$  gilt gleichfalls  $1 < e < m$ . Da  $m$  die kleinste ganze Zahl  $> 1$  ist, die nicht in Primfaktoren zerlegbar ist, müssen die kleineren  $d, e$  in Primfaktoren zerlegbar sein, etwa

$$d = p_1 \cdots p_r, \quad e = p'_1 \cdots p'_s$$

Also ist  $m = de = p_1 \cdots p_r p'_1 \cdots p'_s$  doch in Primfaktoren zerlegbar. Widerspruch.  $\square$

**Remark 3.10** Aus diesem Beweis, den ich bewusst auf recht abstrakte Weise geführt habe, kann man nicht erkennen, wie man eine Primfaktorzerlegung einer ganzen Zahl  $n > 1$  effektiv herstellen kann. Dies ist aber prinzipiell möglich. Durch systematisches Durchprobieren der Zahlen 2,3,4,... findet man nämlich die kleinste ganze Zahl  $p$  mit  $2 \leq p \leq n$ , die ein Teiler von  $n$  ist.  $p$  ist prim; denn jeder Teiler von  $p$  ist  $\leq p$  und ein Teiler von  $n$ .

Dann macht man dasselbe mit  $\frac{n}{p}$ , wenn noch  $p \neq n$  ist. Usw.

Diese Methode ist allerdings schon für Zahlen  $n$ , die im Dezimalsystem einige 100 Stellen haben, mit den besten Computern in vernünftiger Zeit nicht mehr ausführbar. Es gibt zwar ein paar Tricks, schneller voranzukommen. Aber die vermindern nur unwesentlich das Problem. (Man weiß allerdings, dass sogenannte Quantencomputer, wenn es sie denn je geben wird, dies Problem besser lösen könnten.)

Andererseits ist es sehr wohl möglich, von Zahlen der angegebenen Größenordnung in wenigen Sekunden oder Minuten festzustellen, ob sie prim sind – ohne eine Faktorzerlegung im negativen Falle angeben zu können.

Auf Grund dieser Diskrepanz ist es möglich, Texte nach einem öffentlich gemachten Schlüssel zu verschlüsseln, die man ohne eine zusätzliche Information nicht mehr entschlüsseln kann.

Mag man die Möglichkeit einer Primfaktorzerlegung noch für selbstverständlich halten, so scheint mir dies für die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung nicht mehr so zu sein. Ist es z.B. wirklich so selbstverständlich, dass  $17^n \neq 19^m$  für alle natürlichen  $n, m \geq 1$  ist?

**Proposition 3.11** *Die Zerlegung einer ganzen Zahl  $> 1$  in Primfaktoren ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.*

**Proof:** (ZERMELO) Wir führen den Beweis indirekt. D.h. wir nehmen an, die Menge  $M$  der natürlichen Zahlen  $\geq 2$ , die auf mehrere Weisen in Primfaktoren zerlegbar ist, sei nicht leer, und leiten daraus einen Widerspruch ab. Nach dem Minimalprinzip hat  $M$  ein kleinstes Element  $a$ . Wir werden im Widerspruch hierzu zeigen, dass es noch ein kleineres  $b \in M$  gibt.

Da  $a$  zu  $M$  gehört, hat  $a$  zwei verschiedene Zerlegungen in Primfaktoren:

$$a = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s.$$

Es gilt  $r, s > 1$ , und es ist  $p_i \neq q_j$  für alle  $i, j$ , da man sonst kürzen könnte und auf diese Weise ein kleineres Element in  $M$  fände. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $q_1 < p_1$  ist. Beachte, dass  $q_1 \nmid p_1 - q_1$  gilt. Wenn man also  $p_1 - q_1$  in irreduzible Faktoren zerlegt, kann keiner von diesen  $q_1$  sein.

Die Zahl

$$b := (p_1 - q_1)p_2 \cdots p_r = a - q_1 p_2 \cdots p_r = q_1(q_2 \cdots q_s - p_2 \cdots p_r)$$

besitzt zwei verschiedene Zerlegungen in irreduzible Faktoren. Indem man nämlich die jeweiligen Klammerausdrücke in irreduzible Faktoren zerlegt, erhält man einerseits eine solche in der  $q_1$  nicht vorkommt, andererseits eine solche, in der  $q_1$  sehr wohl vorkommt. (Das stimmt auch noch, wenn  $p_1 - q_1 = 1$  ist.)

Ferner ist  $b$  echt kleiner als  $a$  (und größer als 1) im Widerspruch zur minimalen Wahl von  $a$ . Dies ist ein Widerspruch, den wir aus der Annahme hergeleitet haben, dass es überhaupt natürliche Zahlen ( $> 1$ ) gibt, die auf wesentlich verschiedene Arten in Primfaktoren zerlegbar sind. Diese Annahme kann also nicht stimmen.  $\square$

**Proposition 3.12** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

**Proof:** (EUKLID) Zu gegebenen endlich vielen Primzahlen  $p_1, \dots, p_n$  finden wir eine weitere. Denn jeder Primfaktor von  $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$  ist von allen  $p_1, \dots, p_n$  verschieden.  $\square$

Das heißt nicht, dass  $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$  immer selbst prim wäre. Z.B. ist

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509.$$

(**Aufgabe:** Aus dem Namen Zermelo mache man ein beschwingtes Wort, indem man je drei Buchstaben zu Anfang und am Ende hinzufügt!)

**3.13** Es stellt sich die Frage, wie man die grundlegenden Gesetze des Rechnens mit natürlichen Zahlen beweisen soll. Neben einer „konstruktiven“ Möglichkeit wie man sie in meiner Einladung zur Zahlentheorie findet, gibt es die axiomatische Methode. Man beschreibt nach Peano die Menge  $\mathbb{N}$  durch folgende Gegebenheiten:

- (1) Es gibt in  $\mathbb{N}$  ein spezielles Element, das mit 0 bezeichnet sei.
- (2) Es gibt eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto n'$  mit folgenden Eigenschaften:
  - a)  $n' = m' \implies n = m$ ;
  - b)  $n' \neq 0$ , was auch immer  $n \in \mathbb{N}$  sei;
  - c) das Induktionsaxiom, wo  $n + 1$  durch  $n'$  ersetzt sei (s.o.).

(Mit  $n'$  ist  $n + 1$  gemeint. Aber zunächst ist die Addition ja noch nicht definiert.)

Man definiert dann die Addition „induktiv“ durch

$$m + 0 = m \text{ und } m + n' = (m + n)'$$

(Unmittelbar aus dieser Definition folgt z.B.  $n + 0' = n'$ . Man setzt definiert  $1 := 0'$ .)

Ist die Addition bereits definiert, so definiert man die Multiplikation durch

$$m \cdot 0 = 0 \text{ und } m \cdot n' = (m \cdot n) + m.$$

(Unmittelbar aus dieser Definition kann man z.B.  $m \cdot 0' = m$  folgern!)

Man kann dann die o.a. Gesetze für das Rechnen mit natürlichen Zahlen mit einiger Mühe ableiten. Sie können sich ja daran versuchen. (Dabei ist die Reihenfolge des Vorgehens nicht unwichtig, wenn man einigermaßen schnell vorankommen will.)

**3.14** Hat man einen (geometrischen) Strahl und eine Einheitslänge gewählt, so kann man auf dem Strahl die natürlichen Zahlen durch Punkte repräsentieren. Wie?

## 4 Brüche, rationale Zahlen

**4.1** Während das Rechnen mit ganzen Zahlen den allermeisten Studierenden keine Probleme bereitet, scheint das für das Rechnen mit Brüchen bereits nicht mehr zu stimmen. Habe ich doch z.B. in einer Staatsexamensklausur die

$$\text{absurde Unregel} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

lesen müssen, obgleich doch jeder, der mit dem Bruch  $\frac{1}{2}$  irgendeine vernünftige Vorstellung verbindet, immer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

rechnen würde.

Ohne Kommentar zitiere ich: „Die Fähigkeit, eine Bruchrechenaufgabe zu lösen, war anscheinend ein gutes Qualitätsmerkmal, auf den Erfolg im Mathematikstudium zu schließen.“ (Johann Sjuts in DMV mitteilungen 12-2/2004.)

### 4.2 Anschauliche Vorstellung einer rationalen Zahl

Die rationale Zahl  $\frac{m}{n}$  mit  $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$  kann man folgendermaßen auf der Zahlengeraden konstruieren: Man teile Strecke von 0 nach 1 in  $n$  gleichgroße Teilstrecken. Eine solche trage man dann  $m$ -mal von 0 aus nach rechts auf der Zahlengeraden ab, wenn  $m \geq 0$  ist. Ist  $m < 0$ , d.h.  $-m > 0$ , so trage man sie  $(-m)$ -mal nach links ab.

Man sieht, dass man den Punkt  $m/n$  auch konstruieren kann, indem man die Strecke von 0 bis  $m$  in  $n$  gleiche Teilstrecken teilt und eine solche Teilstrecke von 0 an in die Richtung von  $m$  abträgt.

**4.3** Bekanntlich kann man dieselbe rationale Zahl auf viele verschiedene Arten schreiben, z.B.

$$\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

Man kann ‘erweitern’ und ‘kürzen’. Man kann sich überlegen, dass es aufs selbe hinausläuft, ob man ein 15-tel der Einheitstrecke 9-mal, oder ein 10-tel der Einheitstrecke 6-mal von 0 aus (nach rechts) abträgt.

Am elegantesten definiert man die Gleichheit von Brüchen durch

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} : \iff ab' = a'b .$$

Diese Definition ist äquivalent dazu, dass  $\frac{a}{b}$  durch Erweitern und/oder Kürzen zu  $\frac{a'}{b'}$  wird:

Wenn z.B.  $\frac{a'}{b'}$  aus  $\frac{a}{b}$  durch Erweitern mit  $c$ , d.h.  $\frac{a}{b}$  aus  $\frac{a'}{b'}$  durch Kürzen durch  $c$  hervorgeht, folgt  $ab' = a(bc) = (ac)b = a'b$ . Ist umgekehrt  $ab' = a'b$ , dann entsteht  $\frac{a'}{b'}$  aus  $\frac{a}{b}$  durch Erweitern und Kürzen, wie folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'} = \frac{a'b}{bb'} = \frac{a'}{b'}$$

Ferner setzen wir fest

$$\frac{m}{1} = m .$$

Auf diese Weise wird  $\mathbb{Z}$  zu einer Teilmenge von  $\mathbb{Q}$ , der Menge der rationalen Zahlen.

**4.4 Addition:** Haben zwei Brüche den gleichen Nenner, so ist ihre Summe einfach zu definieren:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n} := \frac{m + m'}{n}$$

Dies entspricht der Addition von Strecken auf der Zahlengeraden – oder der Subtraktion, wenn etwa  $m \geq 0, m' < 0$  ist. Sind die Nenner nicht (notwendig) gleich, so kann man sie durch Erweitern gleich machen, also z.B. rechnen

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn'}{nn'} + \frac{m'n}{nn'} = \frac{mn' + m'n}{nn'}$$

(Will man bei der Addition mit möglichst kleinen Zahlen rechnen, so nimmt man als gemeinsamen Nenner das kleinste gemeinsame Vielfache von  $n, n'$  statt  $nn'$ . Für allgemeine Überlegungen ist es allerdings meist naheliegend, die o.a. Formel zu verwenden.)

Man sieht, dass sich Nenner und Zähler bei der Addition sehr **verschieden** verhalten! Wenn  $m, n, n' > 0$  sind, **gilt immer:**

$$\frac{m}{n} + \frac{m}{n'} = \frac{m(n' + n)}{nn'} \neq \frac{m}{n + n'}, \text{ aber } \frac{n}{m} + \frac{n'}{m} = \frac{n + n'}{m}$$

Offenbar ist  $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{n}$  für alle  $n > 0$  ein neutrales Element bezüglich der Addition. Ferner gibt es ein additiv Inverses zu  $\frac{m}{n}$ , nämlich  $\frac{-m}{n}$ . Denn

$$\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{m - m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

Man darf also  $\frac{-m}{n} = -\frac{m}{n}$  schreiben.

**4.5 Multiplikation:** Zunächst definieren wir  $k \cdot \frac{m}{n}$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Ist  $k \geq 0$ , so sei  $k \cdot \frac{m}{n}$  die  $k$ -fache Summe von  $\frac{m}{n}$  zu sich selbst, d.h.

$$k \cdot \frac{m}{n} := \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n} = \frac{km}{n}$$

Dies muss man zwangsläufig so machen, wenn 1 ein neutrales Element für die Multiplikation bleiben und die Distributivität und Kommutativität der Multiplikation erhalten bleiben soll. Die Forderung, dass die Distributivität weiter gelte, erzwingt dann auch

$$(-k) \cdot \frac{m}{n} = -\frac{km}{n}, \text{ also } k \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{n} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ergibt unsere Definition (für  $k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_1$ )

$$k \cdot \frac{1}{r} = \frac{k}{r} \text{ und } r \cdot \frac{1}{r} = \frac{r}{r} = \frac{1}{1} = 1.$$

Soll die Assoziativität der Multiplikation weiterhin gelten, so muss

$$\frac{m}{n} = 1 \cdot \frac{m}{n} = r \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{m}{n} \right)$$

sein. D.h., ist  $\frac{1}{r} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ , so ist  $\frac{rm'}{n'} = \frac{m}{n}$ , also  $rm'n = n'm$ . d.h.  $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{rn}$ .

Wir definieren also

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{m}{n} := \frac{m}{rn}$$

und somit

$$\frac{k}{r} \cdot \frac{m}{n} := k \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{m}{n} = k \cdot \frac{m}{rn} = \frac{km}{rn}$$

**Merke:** Die Addition von Brüchen ist **komplizierter** als ihre Multiplikation!

Offensichtlich ist  $1 = \frac{1}{1} = \frac{n}{n}$  für  $n \neq 0$  das multiplikativ neutrale Element.

Beachte: Sind  $m, n, m', n'$  positive ganze Zahlen, so **gilt immer**

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} > \frac{m + m'}{n + n'} \text{ also } \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} \neq \frac{m + m'}{n + n'}$$

**4.6** Es gibt auch ein geometrisches Argument dafür, die Multiplikation von Brüchen wie oben zu definieren. Man bestimme dazu den Flächeninhalt eines Rechteckes, dessen Seiten  $m/n$ , bzw.  $m'/n'$  lang sind.

**4.7** In  $\mathbb{Q}$  gibt es nicht nur additiv inverse Elemente, sondern zu jedem  $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$  gibt es genau ein multiplikativ Inverses  $a^{-1}$ , nämlich

$$\text{Ist } a = \frac{m}{n}, \text{ so ist } a^{-1} = \frac{n}{m} \text{ (oder } = \frac{-n}{-m} \text{ falls } m < 0)$$

In  $\mathbb{Q}$  kann man also die Gleichung  $ax = b$  mit der Unbekannten  $x$  lösen, wenn  $a \neq 0$  ist. Nämlich durch  $x = ba^{-1}$

**4.8** Das Rechnen mit rationalen Zahlen genügt denselben Gesetzen wie das mit den ganzen Zahlen. Es genügt sogar einem zusätzlichen Gesetz, nämlich dem der Existenz von **multiplikativ Inversen**.  $\mathbb{Q}$  ist ein sogenannter **Körper**.

(Übrigens muss man bei der axiomatischen Definition eines Körpers folgendes bedenken: Eine Menge, die aus genau einem Element  $p$  besteht, für das  $p + p = pp = p$  definiert ist, erfüllt alle o.a. Körperaxiome. Man will sie aber nicht als Körper gelten lassen. Man verlangt deshalb zusätzlich, dass in einem Körper  $1 \neq 0$  ist, oder – äquivalent dazu – dass er aus mindestens 2 Elementen besteht. Es gibt einen nicht ganz unnützen Körper, der aus genau 2 Elementen besteht.)

**Remark 4.9** Die Nullteilerfreiheit, und damit die Kürzungsregel gilt natürlich im Bereich der rationalen Zahlen auch. Offenbar gilt sie in jedem Körper. (Warum?)

**4.10** Da sowohl bei der Multiplikation wie bei der Addition von Brüchen der Nenner (genauer: einer der möglichen Nenner) des Ergebnisses das Produkt der Nenner der Faktoren, bzw. der Summanden ist, gibt es echte Teilmengen von  $\mathbb{Q}$ , die  $\mathbb{Z}$  echt umfassen, die gegen Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen sind, sogenannte **Unterringe** von  $\mathbb{Q}$ . Z.B. ist die Menge der Brüche, die sich mit einem ungeraden Nenner schreiben lassen, ein solcher Unterring. (Kann man in dieser Behauptung ‘ungerade’ durch ‘gerade’ ersetzen??? Diese Frage ist allerdings nicht wirklich gut gestellt. Denn offenbar kann man jeden Bruch durch Erweitern zu einem Bruch mit einem geraden Nenner machen.)

**4.11 Anordnung:** Wie vergleicht man Brüche der Größe nach? Nun, wenn zwei Brüche denselben positiven Nenner haben, ist die Sache einfach:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{m'}{n} \iff m \leq m' .$$

Ansonsten muss man die (als positiv vorausgesetzten!) Nenner gleich machen:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{m'}{n'} \iff \frac{mn'}{nn'} \leq \frac{m'n}{nn'} \iff mn' \leq m'n .$$

Z.B. sieht man: Ist  $0 < n \leq n'$ , so gilt  $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n'}$ . Die Regeln der Verträglichkeit der Anordnung mit Addition und Multiplikation bleiben erhalten. Das Induktionsprinzip und das Minimumprinzip gilt natürlich für die rationalen Zahlen nicht. Z.B. hat die Menge  $M := \{a \in \mathbb{Q} \mid 0 < a\}$  die untere Schranke 0, aber kein kleinstes Element. Ist nämlich  $a \in M$  beliebig (klein), so ist  $2^{-1}a < a$  und  $2^{-1}a \in M$ .

Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen gibt es immer unendlich viele weitere rationale Zahlen.

**4.12 Verallgemeinerung der Bruchschreibweise:** Sei  $K$  ein beliebiger Körper. Für  $a, b \in K, b \neq 0$  schreibt man dann

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}$$

Aus den Körpergesetzen leitet man dann leicht ab:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

letzteres, wenn auch  $a \neq 0$  ist.

**Remark 4.13** Auch für positive rationale Zahlen  $a, b, c, d$  gilt immer

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}, \text{ also } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$$

**4.14** Wenn man im Körper der rationalen Zahlen Brüche rationaler Zahlen bildet bekommt man ‘Mehrfachbrüche’, z.B.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}.$$

Man muss hier aufpassen, z.B.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \quad \text{und} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$$

voneinander **unterscheiden!** Berechnen Sie

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Ein Ausdruck der Form

$$\frac{a}{\frac{b}{c}}$$

hat **keinen Sinn!**

**4.15 Standarddarstellung.** Jede rationale Zahl kann als ein Bruch geschrieben werden, in welchem Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Primfaktor haben. Denn sonst kann man ja noch kürzen. Da bei jedem Kürzen (durch eine ganze Zahl  $> 1$ ) Zähler und Nenner (dem Betrag nach) kleiner werden, muss der Kürzungsprozess nach dem Minimalprinzip irgendwann anhalten. (Übrigens gibt es eine Algorithmus – von Euklid –, der es erlaubt, den ggT von zwei Zahlen zu berechnen, ohne sie vorher in Primfaktoren zerlegt zu haben.)

Verlangt man noch – wie wir es bisher meist getan haben – dass der Nenner positiv ist, so ist die Darstellung einer rationalen Zahl als „gekürzter“ Bruch eindeutig.

*Beweis hierfür:* Sei  $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ , wo beide Brüche gekürzt sind. Dann gilt  $mn' = m'n$ . Wir verwenden die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Ist  $p$  ein Primfaktor von  $m$ , genauer, ist  $p^k$  die höchste  $p$ -Potenz, die  $m$  teilt, so muss sie auch  $m'$  teilen, da nach Voraussetzung  $p$  kein Teiler von  $n$  ist. Es folgt  $m|m'$ , und ebenso  $m'|m$ . Also  $m = \pm m'$ . Da nach Voraussetzung  $n, n' > 0$  ist, müssen auch die Vorzeichen von  $m$  und  $m'$  übereinstimmen.

Ebenso folgt  $n = n'$ . –

## 5 Reelle Zahlen

**5.1** Man könnte meinen, die rationalen Zahlen füllten die ganze Zahlengerade aus. In beliebiger Nähe jeder rationalen Zahl liegen noch unendlich viele weitere rationale Zahlen. Anders als bei den ganzen Zahlen gibt es zu einer rationalen Zahl keine nächstkleinere oder nächstgrößere.

Trotzdem gilt die BEMERKUNG: Wenn man auf dem Einheitsintervall der Zahlengerade von 0 bis 1 ein Quadrat errichtet und um 0 den Kreis schlägt, der durch die rechte obere Ecke geht, so schneidet dieser die Zahlengerade in keinem rationalen Punkt. M.a.W. Es gibt keine rationale Zahl  $r$  mit  $r^2 = 2$ .

BEWEIS: Da  $1^2 < 2$  und bereits  $2^2 > 2$  ist, gibt es keine ganze Zahl  $n$  mit  $n^2 = 2$ . Wir nehmen an, es gäbe ein  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $r^2 = 2$  und  $r > 0$ . Wir schreiben  $r = \frac{m}{n}$  in Standardform, d.h. so dass  $m$  und  $n$  keinen gemeinsamen Primfaktor haben und positiv sind. Wir zerlegen  $m$  und  $n$  in Primfaktoren:

$$r = \frac{m}{n} = \frac{p_1 \cdots p_t}{q_1 \cdots q_s}$$

Da  $r$  nicht ganz ist, ist  $n \geq 2$ , d.h.  $s \geq 1$ . Wegen der Teilerfremdheit von  $m, n$  gilt  $p_i \neq q_j$  für alle  $i, j$ . Jetzt bilden wir

$$r^2 = \frac{p_1^2 \cdots p_t^2}{q_1^2 \cdots q_s^2}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung hat sich an der Teilerfremdheit von Zähler und Nenner nichts geändert. D.h.  $r^2$  kann nicht ganz sein, insbesondere ist  $r^2 \neq 2$ . –

Aus der Bemerkung folgen:

a) Die – nicht besonders komplizierte – Funktion  $f(x) = x^2 - 2$  hat zwar in 1 den negativen Wert  $-1$  und in 2 den positiven Wert 2, aber zwischendurch an keiner rationalen Stelle den Wert 0.

b) Sei  $A$  die Menge der rationalen Zahlen  $a$ , für die  $a < 0$  oder  $a^2 < 2$  gilt, und  $B$  die Menge der positiven rationalen Zahlen  $b$  mit  $b^2 > 2$ . Dann ist  $A \cup B = \mathbb{Q}$  und  $a < b$  für alle  $a \in A, b \in B$ , aber weder besitzt  $A$  ein größtes, noch  $B$  ein kleinstes Element.

Es ist schlechthin nicht möglich, über dem Körper  $\mathbb{Q}$  vernünftig Analysis zu treiben.

Auf dieselbe Weise wie obige Bemerkung beweist man:

**Proposition 5.2** Sei  $n \geq 2$  ganz. Ist eine ganze Zahl  $k$  keine  $n$ -te Potenz einer ganzen Zahl, so ist sie auch keine  $n$ -te Potenz einer rationalen Zahl.

**5.3** Man hat mit Erfolg den Körper  $\mathbb{Q}$  zu einem Körper  $\mathbb{R}$  der sogenannten **reellen Zahlen** erweitert, in welchem außer den Rechen- und Anordnungsaxiomen folgende zueinander äquivalente Aussagen erfüllt sind:

(i) Jede Zahlenfolge in  $\mathbb{R}$ , die vernünftigerweise konvergieren sollte (d.h. eine sogenannte Cauchyfolge ist), konvergiert auch. S.u.

(ii) Ist  $\mathbb{R} = A \cup B$ , derart dass sowohl  $A$  als auch  $B$  mindestens 1 Element besitzt und  $a < b$  für alle  $a \in A, b \in B$  gilt, so hat entweder  $A$  ein größtes oder  $B$  ein kleinstes Element.

(iii) Sei  $(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge. D.h. für alle  $n$  gelte  $a_n \leq a_{n+1}$ , ferner gebe es ein  $s$  mit  $a_n \leq s$  für alle  $n$ . Dann konvergiert die Folge  $(a_n)_n$ .

(iii') Dasselbe wie (iii) mit umgekehrten Ungleichungen.

(iv) Jede nichtleere (d.h. wenigstens eine Zahl besitzende) Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$ , die eine untere Schranke besitzt, d.h. für die es ein  $s \in \mathbb{R}$  gibt mit  $s \leq a$  für alle  $a \in A$ , besitzt auch eine **untere Grenze**, d.h. ein  $u \in \mathbb{R}$  mit  $u \leq a$  für alle  $a \in A$ , so dass in beliebiger Nähe von  $u$  noch Elemente von  $A$  liegen.

(iv') Dasselbe wie (iv), wo „untere“ durch „obere“ ersetzt ist.

Manche der genannten Begriffe bedürfen noch der Präzisierung. „Anschaulich“ ist es so, dass die reellen Zahlen den Punkten auf der Zahlengeraden entsprechen, die beliebig genau durch rationale Zahlen approximierbar sind. (Und diese sind dann wohl alle Punkte auf der Zahlengeraden, was auch immer das heißen mag.)

**Remark 5.4** Es gibt eine wichtige Eigenschaft des Körpers der reellen Zahlen, die man aus jedem der o.a. „Axiome“ ableiten kann – aus (i) nur bei entsprechender Definition von „Cauchy-Folgen“ – das sogenannte archimedische Axiom:

(a) Zu allen positiven reellen Zahlen  $a, b$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$  mit  $na > b$ .

Hierzu äquivalent ist folgende Aussage:

(b) Ist  $\alpha$  eine reelle Zahl, so dass  $0 \leq \alpha < 1/n$  für alle ganzen Zahlen  $n > 0$  gilt, so ist  $\alpha = 0$ .

BEWEIS der Äquivalenz: „(a) $\implies$ (b)“: Wäre  $\alpha > 0$ , so gäbe es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n\alpha > 1$ . Multiplikation mit der positiven Zahl  $1/n$  ergäbe  $\alpha > 1/n$ .

„(b) $\implies$ (a)“: Wäre  $na \leq b$  für alle natürlichen  $n$ , so erhielte man durch Multiplikation mit der positiven Zahl  $\frac{1}{nb}$  die Ungleichung  $a/b \leq 1/n$  für alle  $n$  und somit aus  $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{n+1}$  die Ungleichung  $a/b < 1/n$  für alle  $n$ . –

Etwas vage ausgedrückt, besagt das archimedische Axiom, dass es weder unendlich große, noch unendlich kleine reelle Zahlen gibt. Reelle Zahlen  $a, b$ , die unendlich nahe beieinander liegen, sind schon gleich.

Überlegen Sie selbst, dass auch im Bereich der rationalen Zahlen das archimedische Axiom gilt.

(Für bestimmte mathematische Zwecke ist es durchaus sinnvoll auch Körper mit einer Anordnung zu betrachten, die nicht das archimedische Axiom erfüllen.)

Für die reellen Zahlen kann man folgendes beweisen:

**Proposition 5.5** Sei  $a \geq 0$  reell und  $n \geq 2$  ganz. Dann gibt es genau eine reelle Zahl  $r \geq 0$  mit  $r^n = a$ .

Man nennt  $r$  die  $n$ -te Wurzel von  $a$  und schreibt  $r = \sqrt[n]{a}$ . (Ist  $n$  ungerade, so gibt es auch für  $a < 0$  eine  $n$ -te Wurzel aus  $a$ . Ist  $n$  gerade, und  $a > 0$ , so ist auch  $(-\sqrt[n]{a})^n = a$ . In diesem Falle soll  $\sqrt[n]{a}$  immer die positive Wurzel bezeichnen! Der Ausdruck  $\sqrt[n]{a}$  soll nicht zweideutig sein!)

**Proof:** Sei  $B$  die Menge der reellen Zahlen  $b \geq 0$  mit  $b^n \geq a$  und  $A := \mathbb{R} - B$ . Dann ist offenbar  $A \cup B = \mathbb{R}$ . Ferner sieht man leicht  $c < b$  für  $c \in A, b \in B$ . Die kleinste Zahl von  $B$  oder die größte von  $A$  ist dann das gesuchte  $r$ .  $\square$

**5.6** Für den Studienanfänger empfiehlt sich vielleicht folgendes zweigleisige Vorgehen: Anschaulich stelle er sich die reellen Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden vor (die rational approximierbar sind). Und für präzise Beweise benutze er ein Axiomensystem der reellen Zahlen. Ein solches wird er sicherlich in der Analysis-Vorlesung kennenlernen.

**5.7** Man kann  $\mathbb{R}$  auch auf mannigfache Weise konstruieren, z.B. als Menge aller unendlichen oder endlichen positiven oder negativen Dezimalbrüche konstruieren.

Ohne auf die Probleme des Rechnens mit unendlichen Dezimalbrüchen einzugehen, wollen wir uns überlegen, wie man die Eigenschaft (iv) für nach unten beschränkte nichtleere Mengen  $B$  von Dezimalbrüchen zeigen kann.

BEWEIS: Man darf annehmen,  $A$  sei durch 0 nach unten beschränkt. (Sonst verschiebe man die Menge.) Zunächst betrachten wir den „ganzen Anteil“, d.h. die „Vorkommazahlen“ der Zahlen aus  $A$ . Unter diesen gibt es nach dem Minimalprinzip eine kleinste, etwa  $m$ . Dieses  $m$  wird die Vorkommazahl der gesuchten unteren Grenze. Dann betrachten wir alle  $a \in A$ , die die Vorkommazahl  $m$  haben und von diesen jeweils die erste Nachkommaziffer. Die kleinste dieser Ziffern sei  $n_1$ . Dieses  $n_1$  wird die erste Nachkommaziffer der gesuchten unteren Grenze. Diese beginnt also mit  $m, n_1$ . Von allen Zahlen aus  $A$ , die mit  $m, n_1$  beginnen, betrachten wir die jeweils zweite Ziffer nach dem Komma. Sei  $n_2$  die kleinste unter diesen. Unsere untere Grenze beginnt mit  $m, n_1 n_2$ , usw. Sei  $m, n_1 n_2 \dots n_k$  auf diese Weise bereits gefunden. In  $A$  gibt es also mindestens eine Zahl, deren Dezimalzahldarstellung mit  $m, n_1 \dots n_k$  beginnt. Und keine beginnt mit einer kleineren Zahl mit  $k$  Nachkommastellen. Man betrachte nun

alle Zahlen aus  $A$ , die mit  $m, n_1 \dots n_k$  beginnen und betrachte von jeder die  $(k + 1)$ -te Ziffer nach dem Komma. Die kleinste unter allen diesen sei  $n_{k+1}$ . Diese ist auch die  $(k + 1)$ -te Nachkommaziffer der gesuchte unteren Schranke. Wenn wir dies bis ins Unendliche fortsetzen, bekommen wir einen Dezimalbruch  $u$ , der die gewünschte Eigenschaft hat. Denn keine Zahl aus  $A$  ist kleiner als  $u$ . Und für jedes  $k$  gibt es eine Zahl aus  $A$ , deren Vorkommazahl und deren erste  $k$  Nachkommaziffern mit  $u$  übereinstimmen. Es gibt also Zahlen in  $A$ , die beliebig nahe bei  $u$  liegen. –

**5.8** Übrigens gibt es reelle Zahlen, die auf zweierlei Weisen als unendliche Dezimalbrüche darstellbar sind:

$$3,72 = 3,71\bar{9} := 3,71999\dots$$

Jeder von 0 verschiedene, abbrechende Dezimalbruch (der, wollte man ihn als unendlichen Dezimalbruch schreiben, bis auf endlich viele Ausnahmen nur die Ziffer 0 hat) lässt sich auch auf die Weise schreiben, dass alle seine Ziffern bis auf endlich viele Ausnahmen 9 sind.

Seltsamer Weise gibt es viele Menschen, die glauben, die Zahlen  $0,\bar{9}$  und 1 seien in Wahrheit doch ein wenig verschieden. Man sollte sich aber überlegen, dass ihr Abstand kleiner ist als  $10^{-n}$  ( $= 1/10^n$ ) für jede natürliche Zahl  $n$ , und sie deshalb auf Grund des archimedischen Axioms gleich sind. (Es gibt angeordnete Körper, die das archimedische Axiom nicht erfüllen. Um deren Elemente zu beschreiben, kommt man allerdings nicht mit Dezimalbrüchen aus.) Was spricht denn dagegen, dass man ein und dieselbe Zahl auf mehrere Weisen schreiben kann? Die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch zweier ganzer Zahlen ist ja überhaupt nicht eindeutig.

Wer vernünftig mit Dezimalbrüchen als reellen Zahlen umgehen will, hat nur folgende Wahlmöglichkeiten: Entweder er verbietet eine der beiden Schreibweisen, erlaubt also nicht, dass fast alle Ziffern 0, bzw. erlaubt nicht, dass fast alle Ziffern 9 sind. Oder er akzeptiert, dass gewisse reelle Zahlen 2 Schreibweisen als Dezimalbrüche haben.

## 6 Dedekindsche Schnitte

Wir wollen hier die nichtnegativen reellen Zahlen als Dedekindsche Schnitte einführen. In der elementaren Geometrie hat man *zunächst* keinen Anlass, negative Zahlen einzuführen. Deshalb betrachten wir *zunächst* nur die nichtnegativen rationalen und reellen Zahlen. (Dies hat auch Vorteile bei der Definition der Multiplikation reeller Zahlen.) Die Menge  $\{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$  der nichtnegativen rationalen Zahlen wird mit  $\mathbb{Q}_+$  bezeichnet.

**Definition 6.1** Ein Dedekindscher Schnitt ist ein Paar  $(A, B)$  von Teilmengen von  $\mathbb{Q}_+$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $B \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $A \cup B = \mathbb{Q}_+$ ;
- (iii) für alle  $a \in A$ ,  $b \in B$  ist  $a < b$ ;
- (iv)  $B$  besitzt kein kleinstes Element.

**Remarks 6.2** a) Wir definieren die reellen Zahlen als die Dedekindschen Schnitte. Jede rationale Zahl  $\rho$  definiert einen D. Schnitt wie folgt:  $A := \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq \rho\}$ ,  $B := \{b \in \mathbb{Q} \mid b > \rho\}$ . Insofern wird  $\mathbb{Q}_+$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}_+$  dargestellt. Die irrationalen Zahlen sind die Schnitte  $(A, B)$ , wo auch  $A$  kein größtes Element hat.

Die Zahl  $\sqrt{2}$ , die wir z.B. als reelle Zahl überhaupt erst kreieren wollen, wird durch folgenden D. Schnitt  $(A, B)$  gegeben:  $A := \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq 0 \text{ oder } a^2 < 2\}$ ,  $B := \{b \in \mathbb{Q} \mid b > 0 \text{ und } b^2 \geq 2\}$ .

b) Die Forderung (iv) in obiger Definition wird gestellt, damit verschiedene D. Schnitte immer verschiedene reelle Zahlen definieren. Sonst könnte man eine rationale Zahl  $\rho$ , anders als oben, auch durch das Paar  $A' := \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq \rho\}$ ,  $B' := \{b \in \mathbb{Q} \mid b > \rho\}$  beschreiben. Wenn man akzeptiert, dass gewisse Zahlen (nämlich die rationalen) auf zwei Weisen durch einen D. Schnitt gegeben werden, kann man auf (iv) verzichten. (Übrigens folgt aus (iv), dass  $0 \in A$  ist.) Die durch (iv) erzwungene Unsymmetrie verkompliziert etwas die Konstruktion sowohl des additiv wie des multiplikativ Inversen.

c) Man kann einem unendlichen nichtnegativen Dezimalbruch, der nicht notwendig periodisch ist, aber möglicherweise auf lauter Nullen ausgeht, einen Dedekindschen Schnitt auf folgende Weise zuordnen:

Sei  $a_n$  derjenige endliche Dezimalbruch, der entsteht, indem man einen unendlichen Dezimalbruch  $a$  nach der  $n$ -ten Nachkomma-Stelle abbricht. Definiere  $B' := \{q \in \mathbb{Q}_+ \mid q > a_n \text{ für alle } n\}$ . Besitzt  $B'$  kein kleinstes Element, so setze  $B = B'$ . Besitzt  $B'$  das kleinste Element  $b$ , so setze  $B = B' - \{b\}$ . Dann setze  $A := \mathbb{Q}_+ - B$ . Dann ist  $(A, B)$  der Dedekindsche Schnitt der  $a$  „darstellt“.

d) Umgekehrt kann man einem Dedekindschen Schnitt  $(A, B)$  einen unendlichen Dezimalbruch auf folgende Weise zuordnen. Sei  $a_0$  die größte natürliche Zahl, die in  $A$  existiert. (Beachte, dass  $0 \in A$  und  $A$  nach oben beschränkt ist, etwa durch ein beliebiges Element aus  $B$ .) Dann sei  $a_1$  die größte unter den Zahlen der Form  $n/10$  in  $A$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , dann sei  $a_2$  die größte unter den Zahlen der Form  $n/10^2$  in  $A$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , usw. Offenbar ist  $a_0, a_1, a_2, \dots$  die Folge der abgebrochenen Dezimalbrüche eines unendlichen Dezimalbruches.

**6.3** Seien  $(A, B)$ ,  $(A', B')$  Dedekindsche Schnitte.

$(A, B) \leq (A', B')$  wird durch  $A \subset A'$ , d.h.  $B \supset B'$  definiert.

Die Addition wird wie folgt definiert:

$$(A, B) + (A', B') := (\mathbb{Q}_+ - (B + B'), B + B'),,$$

wo  $B + B' := \{b + b' \mid b \in B, b' \in B'\}$  definiert ist und  $\mathbb{Q}_+ - (B + B')$  die Mengendifferenz bedeutet.

Man prüft leicht nach, dass  $(\mathbb{Q}_+ - (B + B'), B + B')$  wieder ein D. Schnitt ist. Die rationale Zahl 0, d.h. der ihr entsprechende Schnitt bleibt das neutrale Element der Addition.

**6.4** Die Multiplikation wird definiert durch:

$$(A, B) \cdot (A', B') := (\mathbb{Q} - BB', BB')$$

Hier sei  $BB' := \{bb' \mid b \in B, b' \in B'\}$

Das multiplikative Inverse eines irrationalen Schnittes  $(A, B)$  ist dann  $(B^{-1}, \mathbb{Q}_+ - B^{-1})$ , wo  $B^{-1} := \{b^{-1} \mid b \in B\}$  sei. Das multiplikativ Inverse des zu einer rationalen Zahl  $a > 0$  gehörenden Schnittes ist der Schnitt, der zu  $a^{-1}$  gehört.

Die Rechenregeln, d.h. die Körperaxiome mit Ausnahme der Existenz der additiv Inversen für die durch D. Schnitte definierten nichtnegativen reellen Zahlen nachzuprüfen ist zeitaufwendig und nicht in allen Punkten trivial.

**Remarks 6.5** Sicher haben Sie bemerkt, dass gerade die Dedekindschen Schnitte,  $(A, B)$ , wo  $A$  ein größtes Element besitzt, die also zu rationalen Zahlen gehören, besondere Schwierigkeiten machen. Deshalb ist vielleicht eine andere Definition Dedekindscher Schnitte besser. Etwa so:

$B \neq \emptyset; \quad a \in A, b \in B \implies a < b;$

$A$  besitzt kein größtes und  $B$  kein kleinstes Element;

$\mathbb{Q}_+ = A \cup B$  oder  $\mathbb{Q}_+ = A \cup \{c\} \cup B$ , mit einem  $c \in \mathbb{Q}_+$ , wofür  $a < c < b$  für alle  $a \in A$  und  $b \in B$  gilt.

Aber da die Summe oder das Produkt zweier irrationaler Schnitte rational sein kann, bekommt man immer Schwierigkeiten. Im Schulunterricht wird es nicht möglich sein, eine Einführung der reellen Zahlen zu geben, die sowohl leicht verständlich als auch sachlich korrekt ist. Dabei will ich von den Einwänden der Intuitionisten einmal ganz absehen.

Ein geometrisch denkender Mensch stellt sich eine reelle Zahl als Punkt auf der Zahlengerade vor, den man durch rationale Zahlen beliebig genau approximieren kann. Man kann die Rechenoperationen durch geometrische Konstruktionen definieren! (Wie?)

## 7 Symmetrien

Es spricht manches dafür, mit dem Begriff der (Klapp-)Symmetrie zu beginnen. Die folgende „Definition“ ist keine schulmäßige Definition. D.h. sie kann nicht alles auf bereits bekannte Begriffe zurückführen. Irgendwo muss man schließlich anfangen. Es gibt keine Theorie, die allein mit schulmäßigen Definitionen auskommt.

**Definition 7.1** *Eine Figur (Menge)  $F$  in der Ebene heißt **symmetrisch zur (Symmetrie-)Achse  $g$**  (wobei  $g$  eine Gerade sei) wenn sie bei Klappung um diese Gerade mit sich zur Deckung kommt.*

*Man drückt dies auch so aus:  $g$  ist eine Symmetrieachse von  $F$ .*

Was eine **Klappung** ist, muss man praktisch erlernen.

BEISPIEL: Sei  $F$  ein Quadrat. Zu  $F$  gibt es 4 Symmetrieachsen, nämlich zwei die durch je zwei diagonal gegenüber liegenden Eckpunkte gehen und zwei, die durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten gehen.

**7.2**  $F$  bestehe aus genau zwei Punkten  $A$  und  $B$ . Die Gerade, die durch beide Punkte geht, ist sicher eine Symmetrieachse von  $F$ . Aber es gibt noch eine weitere, nämlich die sogenannte **Mittelsenkrechte** der Strecke  $AB$ .

Bei einer Klappung bleiben Abstände von Punkten dieselben. Wenn man will, kann man dies zur schulmäßigen Definition dafür nutzen, wann man zwei Strecken (in einer Ebene) gleichlang nennt, nämlich dann, wenn die beiden Strecken durch eine endliche Folge von Klappungen zur Deckung gebracht werden können.

**7.3** Zu zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt gibt es eine Symmetrieachse, die „Winkelhalbierende“.

**7.4** Zeichnet man um einen Punkt  $P$  auf einer Geraden  $g$  einen „Halbkreis“ auf einer Seite der Geraden, d.h. die Menge der Punkte, die auf der einen Seite der Geraden liegen und von  $P$  einen gegebenen festen Abstand  $r$  haben, so ist das Bild dieses Halbkreises bei einer Klappung um  $g$  wieder ein Halbkreis mit dem Radius  $r$ . Man bekommt somit aus dem ursprünglichen Halbkreis und seinem Bild unter der Klappung zusammen einen Vollkreis mit dem Radius  $r$  um  $P$ .

## 8 Dreiecke, Kongruenzsätze

**8.1** Ein **Dreieck** wird durch drei Punkte  $A, B, C$  in der Ebene gegeben. Dieses Dreieck wird mit  $ABC$  bezeichnet. In der Regel verlangt man noch, dass die Punkte  $A, B, C$  nicht auf einer Geraden liegen. Wenn  $A, B, C$  auf einer Geraden liegen, heißt das Dreieck **ausgeartet**. In dieser Vorlesung wird ein Dreieck in der Regel als nicht ausgeartet vorausgesetzt.

Häufig wird unter einem Dreieck auch die Figur verstanden, die aus den drei Verbindungsstrecken  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ , den sogenannten Seiten von  $ABC$  besteht. So wollen wir es auch immer zeichnen.

Mit  $a$  bezeichnet man die Länge der Seite  $\overline{BC}$ , mit  $b$  die der Seite  $\overline{CA}$ , mit  $c$  die der Seite  $\overline{AB}$  bezeichnet.

In den Eckpunkten hat man (Innen)Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ ;  $\alpha$  bei  $A$ , usw.

**Proposition 8.2** Für die drei Innenwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  gilt  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

Aus der Größe zweier Winkel kann man also die des dritten errechnen, auch zeichnerisch bestimmen.

**Proof:** Man ziehe durch  $C$  die Parallele zur Seite  $AB$  und erkennt dann das am Punkt  $C$  die drei Winkel entstehen, die sich zu einem gestreckten Winkel ergänzen.  $\square$

**8.3 Persönliche Bemerkung.** Dies war der erste mathematische Beweis, den ich in meinem Leben kennengelernt habe. Die Möglichkeit, dass man so allgemeine Sätze beweisen kann, hat mich zutiefst fasziniert und somit mein Leben bestimmt.

**Definition 8.4** Zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  heißen kongruent, wenn gilt:

$$a = a', b = b', c = c', \alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$$

ist. Dabei sind  $a', b'$  usw. vernünftig definiert.

Hier sind die Dreiecke als Tripel der Punkte aufgefasst. D.h. es kommt auf die Reihenfolge an. Ist z.B.  $a = b', b = c', c = a', \alpha = \beta', \beta = \gamma', \gamma = \alpha'$ , so sagt man  $ABC$  sei kongruent zu  $B'C'A'$ .

Vielleicht ist es besser, zunächst Bewegungen als Verkettungen von Klappungen zu definieren und anschließend Kongruenz dadurch, dass man das Tripel  $ABC$  durch eine Bewegung in das Tripel  $A'B'C'$  überführen kann. Didaktisch gesehen, scheint mir das eher zweifelhaft.

**8.5** Da zwei Winkel in einem Dreieck den dritten bestimmen, kann man in der Definition der Kongruenz z.B. die Gleichung  $\gamma = \gamma'$  weglassen.

Dass man – mit gewissen Kautelen – nur drei Gleichheiten braucht ist der Inhalt der sogenannten Kongruenzsätze.

**Proposition 8.6** Kongruenzsatz SSS. Die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  sind kongruent, wenn nur  $a = a', b = b'$  und  $c = c'$  ist.

Der BEWEIS besteht darin, dass man zeigt, es lässt sich bis auf Kongruenz höchstens ein Dreieck mit drei gegebenen Seitenlängen  $a, b, c$  konstruieren. ( $a, b, c > 0$  sei vorausgesetzt.)

Man fängt an, Punkte  $A, B$  mit dem Abstand  $c$  zu wählen. Alle Punkte, die von  $A$  den Abstand  $b$  haben, liegen auf dem Kreis  $K$  um (den Mittelpunkt)  $A$  mit (dem) Radius  $b$ . Diejenigen, die von  $B$  den Abstand  $a$  haben, auf dem Kreis  $K'$  um  $B$  mit Radius  $a$ .

Die Schnittpunkte von  $K$  und  $K'$  sind nun alle Möglichkeiten, den Punkt  $C$  so zu wählen, dass die Seiten, die gegebenen Längen haben.

Ist  $a + b > c$  und  $c > |a - b|$ , so schneiden sich  $K$  und  $K'$  in genau zwei Punkten  $C, C'$ , die symmetrisch zur Geraden durch  $A, B$  liegen. Die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $ABC'$  sind aus Symmetriegründen kongruent.

(Ist  $a + b = c$  oder  $c = |a - b|$ , so ist das entstehende Dreieck ausgeartet. Ist sogar  $a + b < c$  oder  $c < |a - b|$ , so gibt es kein Dreieck mit den Seitenlängen  $a, b, c$ .)

**Remark 8.7** Die o.a. Aussage über die Schnittpunkte zweier Kreise wird von Euklid in I7 bewiesen. Im Schulunterricht darf man sie für anschaulich klar halten. (Oder?)

Auch wird eine Art Homogenität der Ebene angenommen, die besagt: Macht man an einer Stelle einer Ebene eine Konstruktion und dieselbe Konstruktion an einer anderen Stelle, möglicherweise sogar in einer anderen Ebene, so erhält man kongruente Figuren. Dieses scheint in der Regel einem Kind nicht fraglich.

Euklid geht in I8 folgendermaßen vor: Er „legt“ das Dreieck  $ABC$  auf das Dreieck  $A'B'C'$  so dass  $A$  auf  $A'$  und  $B$  auf  $B'$  zu liegen kommt und  $C'$  auf die Seite der Geraden (Halbebene) auf der  $C$  liegt. Dann benutzt er, dass er in I7 bereits gezeigt hat, dass dann  $C$  mit  $C'$  zusammenfallen muss.

Will man diese Argumente in einer strengen Axiomatik benutzen, so muss man „Bewegungen“ als Abbildungen der Ebene in sich einführen und Axiome über solche bereitstellen.

Interessant ist auch der Zusammenhang mit einem mechanischen Phänomen: Wenn man drei Stäbe an ihren Enden **drehbar** verbindet, entsteht ein starres Dreieck. (Das ist nicht mehr so bei vier Stäben, die ein Viereck bilden.) Vielleicht ist dies ein guter Zugang zum Kongruenzsatz SSS für Schulkinder. S.o.

Die folgenden beiden Kongruenzsätze werden wie obiger durch die Eindeutigkeit der Konstruktion „bewiesen“, d.h. sinnfällig gemacht.

**Proposition 8.8** Kongruenzsatz SWS. *Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  sind kongruent, wenn  $a = a'$ ,  $\gamma = \gamma'$ ,  $b = b'$  gilt.*

**Proposition 8.9** Kongruenzsatz WSW. *...., wenn  $\alpha = \alpha'$ ,  $c = c'$ ,  $\beta = \beta'$  gilt.*

Da die Größen zweier Dreieckswinkel die des dritten bestimmen, folgt hieraus sofort:

**Corollary 8.10** Kongruenzsatz SWW. *...., wenn  $c = c'$ ,  $\beta = \beta'$ ,  $\alpha = \alpha'$  gilt.*

**Vorsicht:** Man darf die beiden letzten Sätze **nicht** wie folgt zusammenfassen: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn je eine Seite und je zwei Winkel gleichgroß sind. **Warum nicht? Beispiel?**

Wenn man ein Dreieck aus zwei Seiten und einem Winkel konstruieren will, der nicht zwischen den beiden Seiten liegt, hat man häufig zwei Lösungen.

Glücklicherweise kann man diese gut voneinander unterscheiden.

**Proposition 8.11** Kongruenzsatz SSW. *Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  sind kongruent, wenn  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $\alpha = \alpha'$  und zusätzlich  $\beta, \beta'$  beide spitze oder beide stumpfe oder beide rechte Winkel sind.*

Natürlich reicht in letztem Fall, dass einer der Winkel  $\beta, \beta'$  ein Rechter ist.

Ist ein Dreieckswinkel stumpf oder ein rechter, so sind die beiden anderen spitz. (Warum?) Deshalb:

**Corollary 8.12** *Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  sind kongruent, wenn  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $\alpha = \alpha' > 90^\circ$  gilt.*

Ich muss gestehen, dass wir hier eigentlich nichts bewiesen haben. Aber von diesem Vorrat an „einsichtigen“ Kongruenzsätzen ausgehend, kann man die klassischen Sätze über geradlinige Figuren beweisen und noch mehr.

## 9 Gleichschenklige Dreiecke

**Proposition 9.1** Für ein Dreieck  $ABC$  gilt folgende Äquivalenz:

$$a = b \iff \alpha = \beta .$$

**Proof:** Ist  $a = b$ , so ist wegen des Kongruenzsatzes SSS das Dreieck  $ABC$  zum Dreieck  $BAC$  kongruent. Also ist  $\alpha = \beta$ .

Ist  $\alpha = \beta$ , so ist wegen des Kongruenzsatzes WSW das Dreieck  $ABC$  kongruent zum Dreieck  $BAC$ . Also ist  $a = b$   $\square$

**9.2** Eine weitere Beweismöglichkeit geht so:

Man beweist die Äquivalenz mit der Existenz einer Symmetrieachse für das Dreieck.

Angenommen  $a = b$ . Sei  $s$  die Winkelhalbierende von  $\gamma$ , d.h. die Symmetrieachse des Strahlenpaares  $C \mapsto A, C \mapsto B$ . Die Klappung an dieser Achse bilde  $A$  auf  $A'$  ab. Da der Strahl  $C \mapsto A$  auf den Strahl  $C \mapsto B$  abgebildet wird und  $l(CB) = l(CA) = l(CA')$  ist, gilt  $A' = B$ . Das Dreieck  $ABC$  ist deshalb symmetrisch zu sich selbst bezüglich  $s$ , wobei die Klappung  $C$  festhält und  $A$  mit  $B$  vertauscht. Deshalb sind die beiden Dreieckswinkel bei  $A$  und  $B$  einander gleich.

Sei umgekehrt  $\alpha = \beta$ . Sei jetzt  $s$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{AB}$ . Wegen  $\alpha = \beta$  geht bei der Klappung um  $s$  die Gerade  $AC$  in die Gerade  $BC$  über, also auch ihr gemeinsamer Punkt  $C$  in einen gemeinsamen Punkt  $C'$ . Da aber zwei verschiedene Geraden nur einen gemeinsamen Punkt haben, bleibt  $C$  bei der Klappung um  $s$  fest, liegt also auf  $s$ . Wir haben dieselbe Situation wie oben, dürfen mithin auf  $l(CA) = l(CB)$  schließen.

**Definition 9.3** Ein Dreieck, das die genannten äquivalenten Eigenschaften besitzt, heißt **gleichschenklige**. Die Seite  $AB$  heißt seine Basis, die Seiten  $CA$  und  $CB$  seine Schenkel, der Punkt  $C$  seine Spitze, die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  seine Basiswinkel,  $\gamma$  der Spitzenwinkel.

**Corollary 9.4** In einem Dreieck sind genau dann die drei Seiten untereinander gleich, wenn die drei Winkel es sind.

**Definition 9.5** In diesem Fall heißt das Dreieck **gleichseitig** oder auch **regelmäßig**.

**9.6** Aus 6 untereinander kongruenten gleichseitigen Dreiecken kann man ein regelmäßiges Sechseck auf folgende Weise zusammenbauen: **Skizze**.

(Dabei heißt ein Sechseck regelmäßig wenn sowohl alle seine Seiten, als auch alle seine Winkel untereinander gleich groß sind.)

Der den sechs Dreiecken gemeinsame Eckpunkt  $M$  ist der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius gleich einer Seite des Sechsecks ist und der durch alle Eckpunkte des Sechsecks geht. Man kann also mit dem Zirkel leicht die sechs Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks konstruieren:

Man schlägt einen Kreis mit Radius  $r$ , wählt auf ihm einen Punkt, schlägt um diesen wieder einen Kreis mit demselben Radius  $r$ , wiederholt dies um einen der Schnittpunkte der beiden Kreise usw.

**9.7** Die allgemeine Frage, was man wie mit mehr oder weniger Hilfsmitteln konstruieren kann, benutzt durchaus gelegentlich tiefere mathematische Theorien, z.B. die Körpertheorie der Algebra. (Hier bedeutet „Körper“ keinen geometrischen Gegenstand.)

Hier wollen wir sehen, wie man einen Winkel mit Hilfe der sogenannten **Einschiebung** dritteln kann:

(Unter  $\angle AMB$  versteht man die Größe des Winkels zwischen zwei Strahlen mit dem gemeinsamen Anfangspunkt  $M$ , die durch  $A$  bzw.  $B$  gehen.)

Vom Mittelpunkt  $M$  eines Kreises mit Radius  $r$  zeichnen wir den zu drittelnden Winkel  $\alpha = \angle A'MA$ , wo  $A, A'$  auf dem Kreis liegen. Verlängere  $A'M$  über  $M$  hinaus. Auf einem Lineal markiere zwei Punkte  $B$  und  $C$  im Abstand  $r$ . Dann schiebe das Lineal so, dass es einerseits durch  $A$  läuft, der Punkt  $B$  auf dem Kreis liegt und der Punkt  $C$  auf der Geraden  $A'M$ . (Dieses Vorgehen heißt Einschiebung.) Man erhält folgende Figur:

Ich behaupte, dass der Winkel  $\gamma = \angle A'CA$  ein Drittel so groß ist wie  $\alpha$ .

Das Dreieck  $CBM$  ist gleichschenkelig, da die Strecke  $CB$  nach Konstruktion die Länge  $r$  hat. Deshalb ist  $\angle BMC = \gamma$ . Ferner hat der Außenwinkel bei  $B$  das Maß  $2\gamma$ . Da das Dreieck  $AMB$  ebenfalls gleichschenkelig ist, gilt für  $\beta := \angle AMB$  die Gleichung  $\beta + 4\gamma = 180^\circ$ . Ebenso gilt die Gleichung  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Durch Subtraktion ergibt sich  $\alpha - 3\gamma = 0$ .

**9.8** Die verwendete Methode geht über die so genannten „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“ hinaus. Bei diesen darf man Geraden nur so konstruieren, dass man sie durch 2 bereits konstruierte Punkte zieht.

Mit algebraischen Methoden kann man zeigen, dass man einen „allgemeinen“ Winkel (und auch konkrete Winkel, wie den von  $60^\circ$ ) nicht mit dieser eng gefassten Methode dritteln kann.

Mir ist es ein Rätsel, warum es immer wieder Menschen gibt, die das trotzdem versuchen – obwohl es, wie oben gesehen, eine durchaus geometrische Methode dazu gibt.

**9.9** Mit Zirkel und Lineal (im engen Sinne) kann man je ein regelmäßiges 3-, 4-, 5-, 6-, 8-, 10-, 12-, 15-, 16-Eck konstruieren, ja sogar ein regelmäßiges 17-Eck. Ein regelmäßiges 9-Eck kann man so nicht, aber nach Obigem mit Hilfe der Einschiebung konstruieren. Das gilt übrigens auch für das 7-Eck, aber nicht mehr für das 11-Eck.

Oben haben wir zwei einfache Einsichten verwendet:

1. Jedes Dreieck aus dem Mittelpunkt und zwei Randpunkten eines Kreises ist gleichschenkelig.
2. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß wie ein Basiswinkel.

Das benutzen wir auch zum Beweis folgenden Satzes:

**Proposition 9.10** *Seien  $A, B, C$  verschiedene Punkte auf dem Rand eines Kreises und  $M$  dessen Mittelpunkt. Ferner mögen  $M$  und  $C$  auf der gleichen Seite der Geraden  $AB$  liegen. Im Extremfall darf  $M$  auf der Geraden  $AB$  liegen. Dann ist  $\angle AMB$  doppelt so groß wie  $\angle ACB$ .*

*Insbesondere sind alle Winkel  $\angle ACB$  gleich groß, wenn  $A, B$  festgehalten werden und  $C$  auf dem Teil der Kreislinie läuft, der auf der gleichen Seite wie  $M$  bezüglich der Geraden  $AB$  liegt.*

**Proof:** Spezialfall:  $M$  liege auf der Geraden  $AC$  (oder  $BC$ ). Dann folgt die Behauptung direkt aus den o.a. Bemerkungen 1. und 2. Denn  $BMC$  ist gleichschenkelig mit der Spitze  $M$ , also  $\angle AMB = 2 \cdot \angle MCB$ .

Ansonsten betrachten wir zwei Fälle:

1)  $M$  liegt innerhalb des Dreiecks  $ABC$ . Dann ziehen wir als Hilfslinie die Gerade  $MC$ . Diese schneide den Kreis in  $P \neq C$ . Nach dem Spezialfall ist sowohl  $\angle AMP = 2 \cdot \angle ACM$  und  $\angle BMP = 2 \cdot \angle BCM$ . Durch Addition erhält man die Behauptung.

2)  $M$  liege außerhalb des Dreiecks  $ABC$ , oBdA wie in der Zeichnung. Wieder ziehen wir die Gerade  $MC$  als Hilfslinie, welche den Kreis in  $P \neq C$  schneide. Wieder erhält man auf Grund des Spezialfalles  $\angle BMP = 2 \cdot \angle BCM$  und  $\angle AMP = 2 \cdot \angle ACM$ . Diesmal erhält man die Behauptung durch Subtraktion.

□

Liegt speziell  $M$  auf  $AB$  so erhält man den Satz von THALES:

**Corollary 9.11** *Seien  $A, B$  die Enden eines Halbkreises und  $C \neq A, B$  ein Punkt der Halbkreislinie, so ist  $\angle ACB = 90^\circ$ .*

**Remarks 9.12** a) Wenn  $C$  und  $M$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $AB$  liegen, so gilt für den Winkel  $\angle BCA$  ein entsprechender Satz in Bezug auf den überstumpfen Winkel  $\angle BMA$ .

b) Der zweite Teil des Satzes 9.10 hat auch eine gültige UMKEHRUNG: *Sind  $C, C'$  Punkte auf derselben Seite der Geraden  $AB$  mit  $\angle ACB = \angle AC'B$  und liegt  $C$  auf dem Kreis  $k$  durch  $A, B$ , so liegt  $C'$  auf demselben Kreis  $k$ .*

Der Beweis sei dem Leser überlassen.

## 10 Der Strahlensatz

**Definition 10.1** Ein Parallelogramm ist ein Viereck, dessen jeweils gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind. ( $AB \parallel DC$  und  $BC \parallel AD$ .)

**Proposition 10.2** Für ein Viereck  $ABCD$  (dessen Seiten sich als Strecken nur in den vier Eckpunkten schneiden) sind äquivalent: (i)  $ABCD$  ist ein Parallelogramm;

(ii) die jeweils gegenüber liegenden Winkel sind gleich groß ( $\alpha = \gamma$ ,  $\beta = \delta$ );

(iii) die jeweils gegenüberliegenden Seiten sind gleich groß:  $l(AB) = l(CD)$  und  $l(BC) = l(AD)$ ;

(iv) die Diagonalen schneiden einander in ihren Mittelpunkten.

**Proof:** (i) und (ii) sind äquivalent auf Grund der Beziehungen zwischen Schnittwinkeln und Parallelität.

(i)  $\Rightarrow$  (iii). Die Dreiecke  $ABC$  und  $CDA$  sind nach WSW kongruent, da sie die Seite  $CA$  gemeinsam haben und die entsprechenden Winkel als Wechselwinkel an Parallelen gleich groß sind.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii). Hier gilt die Kongruenz der Dreiecke nach SSS.

Der Beweis von '(iv)  $\Rightarrow$  (iii)' und '(i) und (iii)  $\Rightarrow$  (iv)' sei dem Leser überlassen.  $\square$

**Proposition 10.3** Sei  $ABC$  ein Dreieck und  $n > 0$  ganz. Verlängere die Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  über  $B$  bzw.  $C$  hinaus zu  $\overline{AB'}$ , bzw.  $\overline{AC'}$ , so dass  $C'D' \parallel CD$  gilt und  $l(AB') = n \cdot l(AB)$  ist. Dann ist  $l(B'C') = n \cdot l(BC)$ .

**Proof:** Induktion nach  $n$ , wobei der Fall  $n = 1$  trivial ist. Sei  $l(AB') = n \cdot l(AB)$  und  $B''$  auf der Geraden  $AB'$ , so dass  $B'$  zwischen  $A$  und  $B''$  liegt und  $l(AB'') = (n + 1) \cdot l(AB)$ . Ferner sei  $C''$  auf der Geraden  $AC$ , so dass  $B''C'' \parallel BC$  ist. Ziehe durch  $C'$  die Parallele zu  $AB$ . Diese schneide  $B''C''$  in  $D$ . Dann ist  $l(C'D) = l(B'B'') = l(AB)$ . Es folgt, dass  $ABC$  und  $B'DC''$  kongruent sind. Da  $l(B''D) = l(B'C') = n \cdot l(BC)$  ist, gilt  $l(B''C'') = (n + 1) \cdot l(BC)$ .  $\square$

**10.4 Aufgabe:** Teilen Sie eine beliebige Strecke in  $n$  gleiche Teile.

**Corollary 10.5** Seien  $g, h$  Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt  $A$ . Ferner seien  $k, l$  zueinander parallele Geraden, die  $g$  in  $B', B''$  und  $h$  in  $C', C''$  schneiden. Dann gilt  $l(B''C'')/l(B'C') = l(AB'')/l(AB')$ .

**Proof:** Ist das Verhältnis  $l(AB'')/l(AB') = m/n$  rational, so folgt die Behauptung aus obigem Satz, indem man  $B$  auf der Strecke  $AB'$  so wählt, dass  $l(AB) = l(AB')/n$  ist und  $C$  der Schnittpunkt von der zu  $k$  parallelen Geraden durch  $B$  mit  $h$  ist.

Der Fall eines irrationalen Verhältnisses wird behandelt, indem man reelle Zahlen als Dedekindsche Schnitte betrachtet. Dazu hat man folgendes zu zeigen: Ist  $l(AB'')/l(AB') < m/n$ , (bzw.  $l(AB'')/l(AB') > m/n$ ), so ist auch  $l(B''C'')/l(B'C') < m/n$ , (bzw.  $l(B''C'')/l(B'C') > m/n$ ).

Sei  $D$  auf dem Strahl  $AB$ , so dass  $l(AD) = \frac{m}{n} \cdot l(AB')$  und  $E$  auf dem Strahl  $AC$ , so dass  $DE \parallel BC$ . Dann sieht man leicht, dass  $l(DE) > l(B''C'')$  ist. Nach dem bereits bewiesenen Fall ist aber  $l(DE) = \frac{m}{n} \cdot l(B'C')$ .

Den Fall der anderen Ungleichung behandelt man analog.  $\square$

**Corollary 10.6** Unter den Bedingungen des Satzes gilt auch  $l(AB'')/l(AB') = l(AC'')/l(AC')$ .

**Corollary 10.7** Seien  $g, h$  Geraden, die durch 4 parallele Geraden  $k_1, k_2, k_3, k_4$  in  $A_1, A_2, A_3, A_4$  auf  $g$  und  $B_1, B_2, B_3, B_4$  auf  $h$  geschnitten werden. Dann gilt  $l(A_1A_2)/l(A_3A_4) = l(B_1B_2)/l(B_3B_4)$ .

Hierzu gibt es eine Umkehrung:

**Proposition 10.8** Seien  $g, h$  Strahlen, die durch 4 verschiedene Geraden  $k_1, k_2, k_3, k_4$  in  $A_1, A_2, A_3, A_4$  auf  $g$  und  $B_1, B_2, B_3, B_4$  auf  $h$  geschnitten werden. Die Geraden  $k_1, k_2, k_3$  seien parallel. Ferner gelte  $l(A_1A_2)/l(A_3A_4) = l(B_1B_2)/l(B_3B_4)$ . Dann ist auch  $k_4$  zu  $k_1$  parallel.

**Proposition 10.9** Sei  $ABC$  ein Dreieck. Die Winkelhalbierende durch  $C$  schneide die Seite  $\overline{AB}$  in  $Q$ . Dann gilt

$$l(AQ) : l(BQ) = l(AC) : l(BC).$$

**Proof:** Verlängere die Seite  $\overline{AC}$  über  $C$  hinaus bis zu einem Punkt  $D$ , so, dass  $l(CD) = l(CA)$  ist. Dann ist  $BCD$  ein gleichschenkliges Dreieck.

BEHAUPTUNG: Dann ist  $BD \parallel QC$ .

Für die Winkel  $\gamma$  und  $\delta := \angle(ADB)$  gilt  $\gamma + \angle(BCD) = 180^\circ$  und  $2\delta + \angle(BCD) = 180^\circ$ . Folglich ist  $\delta = \gamma/2 = \angle(ACQ)$ . Wegen der Gleichheit von Stufenwinkeln gilt dann die Behauptung.

Aus der Behauptung folgt die Aussage des Satzes nach dem Strahlensatz, da  $l(BC) = l(DC)$  ist.  $\square$

## 11 Merkwürdige Punkte des Dreiecks

Diesen altmodischen Namen habe ich noch auf der Schule gelernt. Wir werden hier die folgenden merkwürdigen Punkte betrachten: Den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, den der Winkelhalbierenden, den der Seitenhalbierenden, den der Höhen. In allen Fällen muss man zeigen, dass sich drei Geraden in einem Punkt schneiden. Es gibt weitere Punkte, die man mit Recht als 'des Merkens würdig' bezeichnen kann, z.B. den Mittelpunkt des Feuerbachkreises, den wir später kennenlernen werden.

**11.1** Mit Hilfe der Kongruenzsätze zeigt man, dass ein Punkt genau dann von zwei gegebenen Punkten  $A$  und  $B$  den gleichen Abstand hat, wenn er auf der Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$  liegt.

Entsprechend zeigt man, dass ein Punkt von zwei Strahlen, die von einem Punkt ausgehen und einen Winkel von weniger als  $180^\circ$  einschließen genau dann zwei gleichlange Lote auf diese Strahlen hat, wenn er auf der Winkelhalbierenden liegt.

**11.2 Umkreismittelpunkt.** Sei  $U$  der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$ . Dann ist  $l(AU) = l(BU)$  und  $l(BU) = l(CU)$ , also  $l(AU) = l(CU)$ . Somit liegt  $U$  auch auf der Mittelsenkrechten von  $\overline{CA}$ . Also schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt. Und dieser hat zu allen Eckpunkten denselben Abstand; dieser sei  $r$ . Der Kreis um  $U$  mit Radius  $r$  geht also durch alle drei Eckpunkte. Es gibt aber auch keinen anderen Kreis durch alle drei Eckpunkte. Denn dessen Mittelpunkt muss auf den Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$  liegen. Diese sind aber ungleich und nicht parallel, da  $ABC$  nicht ausgeartet ist.

Der Umkreismittelpunkt kann außerhalb des Dreiecks liegen.

**11.3 Inkreismittelpunkt.** Da die Winkelhalbierende eines Strahlenpaares aus den Punkten besteht, die zu beiden Strahlen gleichen Abstand haben, schneiden sich die Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks in einem Punkt, dem Punkt der von allen drei Seiten gleichen Abstand hat. Er ist der Mittelpunkt des Kreises, der alle drei Seiten eines Dreiecks von innen berührt.

Der Inkreismittelpunkt liegt im Inneren des Dreiecks.

Analog gibt es auch drei so genannte Ankreise.

**11.4 Schwerpunkt.** Die Seitenhalbierende der Seite  $\overline{BC}$  ist die Gerade durch  $A$  und den Mittelpunkt  $M_a$  der Seite  $\overline{BC}$ . Analog seien die anderen Bezeichnungen gewählt.

Sei  $S$  der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden von  $\overline{BC}$  und der Seitenhalbierenden von  $\overline{CA}$ . Die Gerade  $M_aM_b$  ist nach der Umkehrung des Strahlensatzes parallel zu  $AB$ . Und nach dem Strahlensatz, angewandt auf die Seiten  $CA$ ,  $CB$ , ist  $l(AB) = 2l(M_aM_b)$ . Wiederum nach dem Strahlensatz, diesmal angewandt auf die beiden Seitenhalbierenden, sieht man  $l(SA) = 2l(M_aS)$  (und  $l(SB) = 2l(M_bS)$ ). Ist  $S'$  der Schnittpunkt von  $CM_c$  mit  $AM_a$ , so muss analog  $l(S'A) = 2l(M_aS')$  gelten. Daraus folgt  $S = S'$ . Die Seitenhalbierende von  $\overline{BC}$  geht also auch durch  $S$ .

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt in seinem Inneren.

**11.5** Die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks bilden wieder ein Dreieck, das sogenannte **Mittendreieck**. Dieses hat die gleichen Winkel wie das Ausgangsdreieck. (Genauer ist jeweils ein Winkel des Ausgangsdreiecks gleich groß dem Winkel in der Mitte der gegenüberliegenden Seite.) Entsprechende Seiten des Ausgangsdreiecks und des Mittendreiecks sind parallel. Jede Seite des Ausgangsdreiecks ist doppelt so lang wie die entsprechende des Mittendreiecks.

**11.6** Fällt man von  $A$ , bzw.  $B$  aus die Lote auf die Seitenhalbierende  $s_c$  von  $\overline{AB}$  mit den Fußpunkten  $A'$ , bzw.  $B'$ , so erhält man zwei nach WWS kongruente rechtwinklige Dreiecke  $AA'M_c$ , bzw.  $BB'M_c$ . Man erkennt, dass  $A$  und  $B$  von  $s_c$  gleichen Abstand haben. Da entsprechendes für die anderen Seitenhalbierenden gilt, sieht man, dass  $S$  der Schwerpunkt der dreipunktigen Menge  $\{A, B, C\}$  ist.

Ebenso sieht man, dass jede Seitenhalbierende die Dreiecksfläche in gleichgroße Dreiecksflächen aufteilt. Darüberhinaus gilt folgendes: Schneidet man die Dreiecksfläche durch die beiden Parallelen zu einer Seitenhalbierenden die von dieser denselben Abstand  $r$  haben, so sind die beiden Schnittstrecken gleichlang nach dem Strahlensatz. Daraus folgt, dass  $S$  auch der Schwerpunkt der Dreiecksfläche ist. Im Allgemeinen ist  $S$  aber nicht der Schwerpunkt des Dreiecksumfangs. (????)

**11.7 Das Doppeldreieck.** Zieht man durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks die Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten, so erhält man ein Dreieck, das sogenannte Doppeldreieck, dessen Seiten doppelt so lang sind wie die des Ausgangsdreiecks. Das Ausgangsdreieck ist das Mittendreieck des Doppeldreiecks. Dies sieht man, indem man die entstehenden vier kleinen Dreiecke als untereinander kongruent erweist.

**11.8 Der Höhenschnittpunkt.** Die Höhen eines Dreiecks  $ABC$  sind die Lote der Eckpunkte auf die gegenüberliegende Seite. Dabei kann der Fußpunkt ein es solchen Lotes außerhalb des Dreiecks liegen. Offenbar sind die Höhen eines Dreiecks die Mittelsenkrechten seines Doppeldreiecks, schneiden sich also in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt.

**Remark 11.9** Im Raum betrachte man anstelle eines Dreiecks ein **Tetraeder**, das durch 4 Punkte gegeben wird, die nicht in einer Ebene liegen. In einem Tetraeder schneiden sich die Höhen nicht immer in einem Punkt.

Hingegen gibt es Analoga zum Umkreis- und Inkreis-Mittelpunkt und zum Schwerpunkt.

## 12 Vektoren, Skalarprodukt

**Definition 12.1** a) Ein Vektor (im Raum oder in der Ebene) ist eine „gerichtete Strecke  $\vec{AB}$ “, man kann auch sagen einfach ein Paar von Punkten  $(A, B)$ , (wo  $(A, B)$  von  $(B, A)$  unterschieden wird) wobei zwei solche gerichtete Strecken  $\vec{AB}$ ,  $\vec{A'B'}$  als gleiche Vektoren angesehen werden, wenn sie durch Parallelverschiebung ineinander übergehen. Genau genommen ist ein Vektor eine Äquivalenzklasse gerichteter Strecken bezüglich folgender Äquivalenzrelation

$$\vec{AB} \sim \vec{A'B'} \iff \vec{A'B'} \text{ geht durch Parallelverschiebung aus } \vec{AB} \text{ hervor.}$$

Wir betrachten auch den Nullvektor, der durch  $\vec{AA}$  gegeben ist, wo  $A$  ein beliebiger Punkt sein darf.

b) Die Summe  $v + w$  zweier Vektoren wird so definiert:  $v$  sei durch  $\vec{AB}$  gegeben. Dann kann man  $w$  durch eine gerichtete Strecke der Form  $\vec{BC}$  geben. Die Summe  $v + w$  wird dann durch  $\vec{AC}$  beschrieben.

Für Vektoren im Raum oder in einer Ebene kann man die Wohldefiniertheit obiger Konstruktionen zeigen. Wir sprechen gelegentlich von geometrischen Vektoren, wenn wir den Unterschied zu den Elementen eines beliebigen („abstrakten“) Vektorraumes betonen wollen.

**12.2** Man kann leicht folgende Gesetze zeigen:

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

$$v + w = w + v$$

$$0 + v = v + 0 = v$$

Darüber hinaus gibt es zu jedem Vektor  $v$  ein **additiv Inverses**, geschrieben  $-v$  mit der Eigenschaft  $v + (-v) = (-v) + v = 0$ . Wird nämlich  $v$  durch  $\vec{AB}$  gegeben, so  $-v$  durch  $\vec{BA}$ .

Das ganze gilt natürlich nicht nur für die Vektoren im Raum oder einer Ebene, sondern natürlich auch für Vektoren in einer Geraden! Man wähle auf einer solchen einen Punkt, den man  $0$  nennt und betrachtet nur Punktepaare  $0\vec{B}$ . Diese repräsentieren alle Vektoren der Geraden. Man wähle einen von  $0$  verschiedenen Punkt  $1$  auf der Geraden. Dann kann man die Vektoren die „von  $0$  in Richtung  $1$  gehen“ mit den nichtnegativen reellen Zahlen identifizieren, wie wir bereits wissen. Wenn man jetzt alle Vektoren in der Geraden betrachtet, so bilden diese bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe, in der jedes Element eine nichtnegative reelle Zahl oder deren additiv Inverses repräsentiert. Es liegt also nahe die additive Gruppe aller reellen Zahlen als die Punkte auf der Geraden anzusehen (auf der die Punkte  $0$  und  $1$  festgelegt sind).

**12.3** Ist  $\lambda \in \mathbb{R}$  und der Vektor  $v$  (im Raum, einer Ebene oder einer Geraden) durch  $\vec{AB}$  gegeben, so sei  $\lambda v$  durch  $\vec{AB'}$  gegeben, wobei  $B'$  auf der Geraden  $AB$  liegt,  $l(AB') = |\lambda|l(AB)$  und  $B'$  auf derselben Seite von  $A$  wie  $B$  liegt, wenn  $\lambda > 0$  ist, und auf der anderen Seite, wenn  $\lambda < 0$  ist. Ist  $A = B$  oder  $\lambda = 0$  so sei  $\lambda v$  der Nullvektor.

Man zeigt leicht, dass folgende Regeln gelten:

$$1v = v, \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v.$$

Wendet man diese Multiplikation einer reellen Zahl auf die Vektoren in der Zahlengeraden an, die zu den Punkten der Zahlengeraden, also den reellen Zahlen korrespondieren, so bekommt man die Multiplikation im Bereich aller reeller Zahlen. Nach dieser Definition ist trivialerweise  $(-\lambda)(-\mu) = \mu$ .

**12.4** Im Raum, einer Ebene, einer Geraden sei ein Punkt  $P$  fixiert – genau so wie oben auf der Zahlengeraden der  $0$ -Punkt fixiert war. Jeden Vektor kann man durch  $\vec{PA}$  – bei festem  $P$  – mit einem und nur einem Punkt  $A$  repräsentieren. Man bekommt somit eine bijektive Abbildung des Raumes (genauer der Menge der Punkte des Raumes), bzw. der Ebene, bzw. der Geraden mit der Menge der

Vektoren des Raumes, bzw. der Ebene, bzw. der Geraden. Nochmals sei betont: Diese Abbildung ist erst festgelegt, nachdem man einen Grundpunkt (Ursprung)  $P$  festgelegt hat.

Seien im Raum  $B_1, B_2, B_3$  Punkte, die nicht zusammen mit  $P$  in einer Ebene liegen, und seien  $b_i := \vec{PB}_i$  die entsprechenden Vektoren, dann kann man geometrisch leicht zeigen, dass  $(b_1, b_2, b_3)$  eine Basis des Vektor-Raumes aller Vektoren des Raumes ist. D.h. jeder Vektor lässt sich auf eindeutige Weise in der Form  $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$  schreiben. Jeder Vektor des Raumes lässt sich also – nach Wahl der  $b_1, b_2, b_3$  – eindeutig durch ein Tripel von reellen Zahlen  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  beschreiben. So lässt sich dann natürlich jeder Punkt des Raumes – nach Wahl eines Ursprungs  $P$  und einer Vektorraumbasis – durch ein Tripel von Zahlen beschreiben. (Für die Ebene hat man natürlich eine Basis aus 2 Vektoren, und für die Gerade ...??) Das Tripel  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  ist dann natürlich auch das Koordinatentripel des entsprechenden Punktes, das man auch ohne den Begriff „Vektor“ definieren kann.

Naheliegend ist natürlich, dass man eine Einheitslänge auszeichnet und alle  $b_i$  von dieser Länge und aufeinander senkrecht stehend wählt. Auf solche **Orthonormalbasen** kann man sich natürlich für die Schule beschränken.

**12.5 Skalarprodukt.** Für geometrische Vektoren  $v, w$  im Raum definiert man ihr Skalarprodukt  $\langle v, w \rangle$ , wie folgt: Sei  $w'$  die orthogonale Projektion von  $w$  auf die Gerade durch  $v$ . Dann sei

$$\langle v, w \rangle := \pm |v| |w'|,$$

wobei  $|v|, |w'|$  die jeweiligen Längen bezeichnen und das Vorzeichen ein  $+$  ist, wenn die beiden Vektoren  $v, w'$  in die gleiche Richtung zeigen, hingegen ein  $-$  ist, wenn sie in entgegengesetzte Richtung zeigen.

Man braucht also, um das geometrische Skalarprodukt zu definieren, eine Längeneinheit und den Begriff des rechten Winkels. Wenn man allgemein die Winkelmessung beherrscht und die Cosinus-Funktion kennt, kann man auch definieren:

$$\langle v, w \rangle := |v| |w| \cos \alpha,$$

wo  $\alpha$  den von  $v, w$  eingeschlossenen Winkel bezeichnet. (Beachte, dass  $\cos \alpha = \cos(-\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha)$  ist, und deshalb keine Schwierigkeit mit der Definition der Winkelgröße auftritt.)

Wie man es auch macht, ist es leicht, folgende Gesetze zu beweisen:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \tag{1}$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \tag{2}$$

$$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \tag{3}$$

$$\langle v, w \rangle = 0 \iff v \perp w \tag{4}$$

$$\langle v, v \rangle = |v|^2 \tag{5}$$

Dabei bedeutet  $v \perp w$ , dass  $v$  auf  $w$  im geometrischen Sinne senkrecht steht, oder einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist.

**12.6** Nun wähle man im Raum eine Basis  $b_1, b_2, b_3$  mit  $|b_i| = 1$  und  $b_1 \perp b_2 \perp b_3 \perp b_1$ . Dann gilt

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$$

also

$$\langle \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 \rangle = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$$

Hieraus folgt die positive Definitheit des Skalarproduktes.

Es folgt auch der Satz des Pythagoras:

**Theorem 12.7**  $|\lambda b_1 + \mu b_2|^2 = \lambda^2 + \mu^2.$

**Proposition 12.8** (EUKLID) Sei  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei  $C$  und  $D$  der Fußpunkt der  $C$ -Höhe, d.h. des Lotes von  $C$  auf  $AB$ . Da  $\alpha$  und  $\beta$  spitz sind, liegt  $P$  zwischen  $A$  und  $B$ . Sei  $s := l(AP)$ ,  $t := l(BP)$ ,  $h := l(CP)$ . Dann gilt  $st = h^2$ ,  $sc = b^2$  und  $tc = a^2$ .

Dies ist nicht tautologisch, da ich das Skalarprodukt der Vektoren  $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$  und  $\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$  nicht etwa als  $\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$  definiert habe, sondern dies aus einer geometrischen Definition gefolgert habe!

**Proof:** Aus dem Satz des Pythagoras, angewendet auf drei Dreiecke folgt:

$$(s+t)^2 = a^2 + b^2, \quad a^2 = t^2 + h^2, \quad b^2 = s^2 + h^2$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$s^2 + 2st + t^2 = t^2 + h^2 + s^2 + h^2, \text{ also } st = h^2.$$

Ferner rechnet man

$$sc = s^2 + st = s^2 + h^2 = b^2.$$

Die letzte Behauptung ergibt sich entsprechend. □

## 13 Geometrie im Vektorraum, Abbildungen

Hier werden wir Geraden, Ebenen und den Raum als Mengen ihrer Punkte betrachten.

**13.1** Wir fixieren im Raum, bzw. in der Ebene einen Ursprungs-Punkt  $O$  und identifizieren so den (dreidimensionalen) euklidischen Raum, bzw. die euklidische Ebene mit dem Vektorraum  $V_3$  der Vektoren im Raum, bzw.  $V_2$  derer in der Ebene. Jeder Punkt  $A$  wird mit dem Vektor  $\vec{OA}$  identifiziert. Umgekehrt kann man jeden Vektor  $v$  eindeutig in der Form  $v = \vec{OA}$  darstellen. Diesem wird dann der Punkt  $A$  zugeordnet.

**13.2** Man überlegt sich leicht, dass die Geraden (im Raum oder in der Ebene) genau die Mengen der Form  $\{w + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$  sind, wo  $v \neq 0$  und  $w$  feste Vektoren sind. (Natürlich sind weder  $v$  noch  $w$  durch die Gerade, die sie bestimmen, eindeutig gegeben.)

Entsprechend sind die Ebenen im Raum genau die Mengen der Form  $\{w + sv_1 + tv_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ , wo  $v_1, v_2, w$  feste Vektoren sind und das Paar  $(v_1, v_2)$  linear unabhängig ist.

Man lernt in der Linearen Algebra, dass Ebenen und Geraden sich auch als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme beschreiben lassen. Genauer gilt das Folgende:

Sei  $V_3$ , bzw.  $V_2$  der Vektorraum der Vektoren im Raum bzw. einer Ebene. Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form  $A\vec{x} = b$  ist eine Ebene, bzw. eine Gerade, wenn  $A : V_3 \rightarrow \mathbb{R}$ , bzw.  $A : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine surjektive (d.h. von 0 verschiedene) lineare Abbildung und  $b \in \mathbb{R}$  ist. Jede Ebene in  $V_3$ , bzw. Gerade in  $V_2$  lässt sich so darstellen.

Die Geraden im Raum sind genau die Lösungsmengen von Gleichungen der Form  $A\vec{x} = \vec{b}$ , wo  $A : V_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine surjektive lineare Abbildung und  $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$  ist.

Im Folgenden wollen wir verschiedene Arten von bijektiven Abbildungen  $V_3 \rightarrow V_3$ , bzw.  $V_2 \rightarrow V_2$  betrachten. Mit  $V$  sei  $V_3$  oder  $V_2$  bezeichnet.

**Definition 13.3** Eine **Parallelverschiebung** ist eine Abbildung der Art  $x \mapsto x + b$  mit festem  $b \in V$ .

**13.4** Fasst man  $V$  als euklidischen Raum oder Ebene auf, so ist eine Parallelverschiebung genau das, was man sich unter einer solchen im geometrischen Sinne vorstellt.

Eine Parallelverschiebung ist bijektiv, bildet Geraden auf Geraden (und gegebenenfalls Ebenen auf Ebenen) ab, erhält Längen und Winkelgrößen, ist also eine sogenannte Kongruenzabbildung.

Die Verkettung zweier Parallelverschiebungen ist wieder eine solche. Ist  $f(x) = x + a$ ,  $g(x) = x + b$ , so ist  $g \circ f(x) = x + a + b$ . Das Inverse der Parallelverschiebung  $f(x) = x + a$  ist  $f^{-1}(x) = x - a$ , also wieder eine solche.

Da eine lineare Abbildung  $V \rightarrow V$  immer den Nullpunkt festlässt, ist die Parallelverschiebung  $x \mapsto x + b$  genau dann linear, wenn  $b = 0$ , also die Parallelverschiebung die Identität ist.

**Definition 13.5** Eine **affine Abbildung**  $V \rightarrow V$  ist eine Abbildung der Form  $x \mapsto Ax + b$ , wo  $A : V \rightarrow V$  eine bijektive lineare Abbildung und  $b \in V$  ist.

**Remarks 13.6** a) Die Verkettung affiner Abbildungen ist wieder eine solche. Ist  $f(x) = Ax + a$ ,  $g(x) = Bx + b$  so ist  $g \circ f(x) = BAx + (Ba + b)$ . Das Inverse der affinen Abbildung  $f(x) = Ax + a$  ist  $f^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}a$ .

b) Eine affine Abbildung ist bijektiv, bildet Geraden auf Geraden (und gegebenenfalls Ebenen auf Ebenen) ab, erhält aber im Allgemeinen weder Längen noch Winkelgrößen, ist also keine sogenannte Kongruenzabbildung.

c) Im Gegenteil: Zu zwei nichtausgearteten Dreiecken  $ABC$  und  $A'B'C'$  in der Ebene existiert eine affine Abbildung von  $f : V_2 \rightarrow V_2$  mit  $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$ .

d) Es werden also auch keine Längenverhältnisse erhalten. Allerdings werden Längenverhältnisse von Strecken auf parallelen Geraden erhalten. Ebenso wird die Parallelität erhalten.

e) Kreise, allgemeiner Ellipsen werden auf Ellipsen, Hyperbeln auf Hyperbeln und Parabeln auf Parabeln abgebildet, wie wir vielleicht später sehen werden.

**Remark 13.7** Mit Hilfe affiner Abbildungen kann man einen zweiten Beweis dafür erbringen, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden. In einem gleichseitigen Dreieck sind die Höhen auch die Winkelhalbierenden, auch die Seitenhalbierenden, auch die Mittelsenkrechten. Dass sich diese drei Geraden in einem Punkt schneiden, folgt aus Symmetriegründen. Nach obigem werden unter einer affinen Abbildungen die drei Seitenhalbierenden wieder auf solche abgebildet. Ist also  $ABC$  ein beliebiges Dreieck und  $A'B'C'$  gleichseitig und  $f$  eine affine Abbildung, die  $A'B'C'$  auf  $ABC$  abbildet, so schneiden sich die drei Seitenhalbierenden von  $ABC$  in einem Punkt, weil die drei Seitenhalbierenden von  $A'B'C'$  es tun.

**Definition 13.8** a) Eine **orthogonale** Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V$  ist eine solche, die das Skalarprodukt erhält, d.h. für welche  $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$  gilt.

b) Eine **Kongruenzabbildung**  $V \rightarrow V$  ist eine von der Form  $f(x) = \varphi(x) + b$ , wo  $\varphi$  orthogonal und  $b \in V$  ist.

**Remarks 13.9** a) Eine orthogonale Abbildung erhält offenbar Längen und Winkel. Deshalb tut dies auch jede Kongruenzabbildung.

a') Eine orthogonale Abbildung ist offenbar injektiv. Da  $V$  endlichdimensional ist, ist sie also bijektiv. Dasselbe gilt für Kongruenzabbildungen.

b) Beispiele von Kongruenzabbildungen sind Spiegelungen an Ebenen, Geraden oder Punkten, auch Drehungen.

c) Die Kongruenzabbildungen bilden eine Gruppe. (Man kann zeigen, dass diese von den Spiegelungen an Ebenen (in  $V_3$ ), an Geraden (in  $V_2$ ), an Punkten (in  $V_1$ ) erzeugt wird.)

**Definition 13.10** Eine **Ähnlichkeitsabbildung** ist eine Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V$  mit  $\varphi(x) = \lambda f(x) + b$ , wo  $f$  orthogonal,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  und  $b \in V$  ist.

**Remarks 13.11** a) Eine Ähnlichkeitsabbildung erhält Winkel und Längenverhältnisse, aber im Allgemeinen (genauer, wenn  $|\lambda| \neq 1$  ist) keine Längen. Sie ist bijektiv.

b) Ähnlichkeitsabbildungen bilden eine Gruppe.

## 14 Eulergerade und Feuerbachkreis

Wir erinnern uns:

Sei  $ABC$  ein Dreieck. Das **Mittendreieck** dieses Dreiecks ist das Dreieck  $A'B'C'$ , wo  $A'$  der Mittelpunkt der Seite  $\overline{BC}$  und  $B'$  derjenige von  $\overline{CA}$  und  $C'$  derjenige von  $\overline{AB}$  ist.

**Remarks 14.1** Mit obigen Bezeichnungen gilt:

- $A'B'$  (bzw.  $B'C'$ , bzw.  $C'A'$ ) ist parallel zu  $AB$  (bzw.  $BC$ , bzw.  $CA$ ) und halb so lang.
- Die seitenhalbierenden Geraden von  $ABC$  sind dieselben wie die von  $A'B'C'$ , wobei die durch  $A$  von  $ABC$  auch durch  $A'$  geht, usw. Insbesondere haben  $ABC$  und  $A'B'C'$  denselben Schwerpunkt  $S$ . Dies folgt wie a) aus dem Strahlensatz und seiner Umkehrung.
- Die Mittelsenkrechte von  $AB$  ist die Höhen Gerade von  $A'B'C'$  durch  $C'$ , usw. Also ist der Höhenschnittpunkt von  $A'B'C'$  der Umkreismittelpunkt  $U$  von  $ABC$ .
- Das Dreieck  $A'B'C'$  entsteht aus dem Dreieck  $ABC$  durch Drehung um  $S$  um  $180^\circ$  und Halbierung aller Abstände von  $S$ . Es handelt sich also hier um eine Ähnlichkeitsabbildung. Wenn man also den Höhenschnittpunkt  $H$  von  $ABC$  am Punkt  $S$  spiegelt und einen Punkt  $K$  erhält, so ist der Höhenschnittpunkt  $H'$  von  $A'B'C'$  der Mittelpunkt der Strecke  $SK$ . D.h.  $H'$  liegt auf der Geraden  $HS$  auf der anderen Seite von  $S$  und ist von  $S$  halbsoweit entfernt wie  $H$ . Nach c) gilt aber  $H' = U$ .

Es folgt also

**Proposition 14.2** (Euler) *In einem Dreieck  $ABC$  liegen Höhenschnittpunkt  $H$ , Schwerpunkt  $S$  und Umkreismittelpunkt  $U$  in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Für die Streckenlängen gilt  $l(HS) : l(SU) = 2 : 1$ . (Ist das Dreieck gleichseitig, fallen diese drei Punkte zusammen. Die Aussage des Satzes ist dann leer.)*

**Definition 14.3** *Die Gerade, auf welcher Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt eines nicht gleichseitigen Dreiecks liegen, heißt seine **Eulergerade**.*

In einem gleichseitigen Dreieck, und nur in einem solchen, fallen die drei Punkte zusammen. Es besitzt also keine (eindeutige) Eulergerade.

**Remarks 14.4** Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

- Sei  $M'$  der Umkreismittelpunkt von  $A'B'C'$ . Dann liegt  $M'$  auf der Geraden  $MS$ , d.h. der Eulergeraden, auf der  $M$  gegenüberliegenden Seite von  $S$  und ist halbsoweit von  $S$  entfernt wie  $M$ . Gemäß der berühmten Identität  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$  ist er also der Mittelpunkt der Strecke  $MH$ . Durch  $M$  geht die Mittelsenkrechte von  $AB$ , d.h. die Senkrechte auf  $AB$  durch  $C'$ , durch  $H$  geht die dazu parallele Höhe von  $ABC$  durch  $C$ . Der Kreis um  $M'$  durch  $A'$  geht also auch durch den Fußpunkt der Höhe durch  $C$ . Dieser Kreis, der **Feuerbachkreis** geht also durch die Seitenmittelpunkte und die Höhenfußpunkte von  $ABC$ .
- Nun bringen wir die Gerade  $C'M'$  mit der Höhen Geraden von  $ABC$  durch  $C$  zum Schnitt, der von dem Fußpunkt der Höhe verschieden ist. Der Schnittpunkt heiße  $D$ . Die Dreiecke  $M'MC'$  und  $M'HD$  sind kongruent. Denn die Strecken  $M'M$  und  $M'H$  sind gleichlang, die Winkel bei  $M'$  sind gleichgroß, ebenso die bei  $H$  bzw.  $M$ . Folglich gilt  $l(A'M) = l(DH)$ . Da wir schon wissen, das die Strecke  $\overline{C'M}$  halb so groß ist wie  $\overline{CH}$  – sie korrespondieren bei der Halbdreieck-Korrespondenz – ist  $D$  der Mittelpunkt von  $\overline{CH}$ . Ferner folgt aus obiger Kongruenz  $l(M'D) = l(M'C')$ . Somit geht der Feuerbachkreis durch die Mittelpunkte der Strecken  $\overline{CH}$ ,  $\overline{AH}$  und  $\overline{BH}$ .
- Ohne Beweis zitieren wir: Der Feuerbachkreis berührt den Inkreis und die Ankreise.

## 15 Trigonometrie

So elegant und anziehend auch die Idee ist, die trigonometrischen Funktionen über die komplexe Exponentialfunktion einzuführen, kann ich mir doch nicht vorstellen, das dies in der Sekundarstufe 1 möglich ist. Der Einführung über Winkel- und Seitenmessung am rechtwinkligen Dreieck kann ich auch nicht soviel abgewinnen. (Ein Grund ist z.B., dass der Sinus- und der Cosinus-Satz auch für Dreiecke mit einem stumpfen Winkel gelten und man den Sinus, bzw. Cosinus für stumpfe Winkel an einem rechtwinkligen Dreieck nicht definieren kann.)

Ich werde die Funktionen „sin“ und „cos“ am Einheitskreis definieren.

**Definition 15.1** *Wir betrachten in der Ebene den Einheitskreis um den Nullpunkt eines orthonormalen Koordinatensystems. Sei  $\alpha \geq 0$  ein Winkel. Diesen Winkel trage man von der positiven  $x$ -Halbachse aus gegen den Uhrzeigersinn ab. Der entsprechende Schenkel schneidet den Einheitskreis in genau einem Punkt  $A$ . Wir definieren  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  als Koordinaten von  $A$ , also  $A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ .*

*Dies ist wohldefiniert, auch wenn  $\alpha$  größer als der Vollwinkel ist.*

*Für negative  $\alpha$  trägt man  $|\alpha|$  mit dem Uhrzeigersinn ab.*

**Remarks 15.2** a) Für die Bedürfnisse der Analysis ist es günstig, den Winkel  $\alpha$  als Bogenlänge auf dem Einheitskreis vom Punkt  $(1;0)$  gegen den Uhrzeigersinn bis  $A$  zu messen. Dabei wird natürlich (naiv) vorausgesetzt, dass es diese Bogenlänge gibt. (Naivität in der Mathematik ist allerdings nichts Schlechtes. So ist z.B. die „naive Mengenlehre“ diejenige, die fast jeder praktisch arbeitende Mathematiker benutzt.)

In der elementaren Geometrie tut es natürlich auch jedes andere Winkelmaß.

b) Mit  $\sin \alpha$  ist  $\sin(\alpha)$  gemeint, der Sinus als Funktion des Winkels  $\alpha$ , nicht etwa das Produkt der Zahlen  $s, i, n, \alpha$ .

c) Für beliebige Winkel  $\alpha$  gilt:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Man kann also  $\sin \alpha$  aus  $\cos \alpha$  und umgekehrt berechnen, wenn man über die Vorzeichen Bescheid weiß. (Hier ist wie üblich  $\sin^2 \alpha = \sin(\alpha)^2 = (\sin \alpha)^2$ .)

d)  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ,  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ,  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ,  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .

**Remark 15.3** Ist  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ , so hat in dem rechtwinkligen Dreieck  $(0,0)(\sin \alpha, 0)(\sin \alpha, \cos \alpha)$  die Gegenkathete des Winkels  $\alpha$  die Länge  $\sin \alpha$ , die Ankathete des Winkels  $\alpha$  die Länge  $\cos \alpha$  und die Hypotenuse die Länge 1. In einem allgemeinen rechtwinkligen Dreieck gilt also:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

(Die Silbe ‘An-’ in der Bezeichnung Ankathete ist die deutsche Präposition ‘an’ und soll hier bedeuten, dass die Ankathete *an* dem Winkel  $\alpha$  liegt, hat also nichts mit der griechischen Verneinungssilbe ‘an’ etwa in ‘Anästhesie’ zu tun.)

**15.4 SPEZIELLE WERTE.** Für die Winkel  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  kann man Sinus und Cosinus leicht bestimmen:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ =$$

Die dritte sieht man mit Hilfe des Satzes über die Winkel im Kreis (9.10). Diese beweist natürlich auch die ersten Gleichheiten.  $\square$

**Remark 15.5** Seien  $\vec{a}, \vec{b}$  Vektoren der Längen  $a$ , bzw.  $b$ . Dann ist nach Definition des Skalarproduktes

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ab \cos \gamma, \quad a^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

wobei  $\gamma$  der von  $\vec{a}, \vec{b}$  eingeschlossene Winkel ist ( $0 \leq \gamma \leq 180^\circ$ ).

**Proposition 15.6** Cosinussatz. In einem Dreieck gilt (mit den üblichen Bezeichnungen)

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2$$

**Proof:** Betrachte die Vektoren  $\vec{CB}, \vec{CA}$ ; sie haben die Längen  $a$ , bzw.  $b$ . Es ist  $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$  von der Länge  $c$ .

Dann rechnet man  $c^2 = |\vec{AB}|^2 = \langle \vec{CB} - \vec{CA}, \vec{CB} - \vec{CA} \rangle = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  □

**Corollary 15.7** Seien  $\alpha, \beta, \gamma$  Winkel mit  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Dann gilt  $\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$

Mit  $\sin^2 \gamma$  ist  $(\sin \gamma)^2$  gemeint.

**Proof:**  $\alpha, \beta, \gamma$  sind die drei Winkel eines Dreiecks, dessen Umkreisdurchmesser gleich 1 gesetzt werden kann. Nach dem Sinussatz haben dessen Seiten die Längen  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ . Wenn man auf dieses Dreieck den Cosinussatz anwendet, erhält man die behauptete Formel. □

**15.8** Die Abbildungen  $\sin$  und  $\cos$  bilden den Bereich  $[0^\circ, 90^\circ]$  bijektiv auf das Intervall  $[0, 1]$  ab. Also gibt es auch zu beiden jeweils eine Umkehrabbildung, genannt „Arcus-Sinus“ ( $\arcsin$ ), bzw. „Arcus-Cosinus“ ( $\arccos$ ).

**Beachte:**  $\arcsin x$  ist der Winkel (=Bogen=arcus), dessen Sinus gleich  $x$  ist.

Wenn man beliebige Winkel zulässt, so gibt es zu jedem  $x \in [-1, 1]$  unendlich viele Winkel  $\alpha$  mit  $\sin \alpha = x$ . (Ist  $x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$ , so gibt es keinen (reellen) Winkel  $\alpha$  mit  $\sin \alpha = x$  oder  $\cos \alpha = x$ .) Im strengen, im Mathestudium üblichen, Sinn ist die Vorschrift:

„Ordne jedem  $x \in [-1, 1]$  den Winkel  $\alpha$  zu, für den  $\sin \alpha = x$  ist“

keine Abbildung. Ist  $x \in ]-1, 1[$  so gibt es sogar im Bereich  $[0^\circ, 360^\circ[$  jeweils zwei Winkel  $\alpha$ , für die  $\sin \alpha = x$ , bzw.  $\cos \alpha = x$  gilt!

Um  $\arcsin$  und  $\arccos$  zu Abbildungen zu machen, muss man die möglichen Winkel einschränken. Hierbei hat man im Prinzip viele Wahlmöglichkeiten. Üblich und nützlich sind  $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$  für den Arcus-Sinus und  $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$  für den Arcus-Cosinus.

Auf der Schule wird man vielleicht gar nicht von Umkehrfunktionen sprechen. Jedenfalls hat man das vor Einführung der Taschenrechner nicht getan, sondern in den „Tafeln“ zu einem gegebenen Sinus-, bzw. Cosinus-Wert den möglichen Winkel abgelesen.

Wenn man den Cosinussatz zur Berechnung eines Dreieckswinkels heranzieht, ist durchaus möglich, dass  $\cos \alpha < 0$  ausfällt, d.h.  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  ist.

**15.9** Sind von den Seitenlängen und Winkelgrößen eines Dreiecks drei Maße, darunter mindestens eine Seitenlänge, bekannt, so kann man die anderen zeichnerisch bestimmen (einmal gibt es zwei Möglichkeiten). Mit Hilfe der obigen zwei Sätze kann man sie auch berechnen, vorausgesetzt man hat einen leistungsfähigen Taschenrechner.

Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen.

**15.10** Wie berechnet nun ein Taschenrechner etwa die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$ ? Es gibt schnell konvergente Potenzreihen dafür. In diesen wird das sog. Bogenmaß eines Winkels benutzt. ( $1^\circ = \pi/180$ ) Man kann sich überlegen, dass es genügt,  $\cos x, \sin x$  für  $0 < x \leq \pi/4$  zu berechnen. Da  $\pi/4 < 1$  ist, konvergieren die Potenzreihen für diese  $x$  sehr gut. ( $x^n$  geht für  $0 < x \ll 1$  schnell gegen 0. Die Koeffizienten sind von der Form  $((2n+1)!)^{-1}$ , bzw.  $(2n!)^{-1}$  und schließlich sind die Reihen für  $x > 0$  noch alternierend.)

????

**Theorem 15.11** (Additionstheoreme)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Hier hat man auf viele Klammern verzichtet!  $\sin \alpha \cos \beta$  soll  $\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$  bedeuten, und **nicht** etwa  $\sin(\alpha \cos(\beta))$ !

Wenn man Sinus und Cosinus über die komplexe Exponentialfunktion einführt, folgen diese Additionstheoreme aus dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion. Hier wollen wir einen geometrischen Beweis führen, der allerdings einen gewissen Nachteil hat: Er gilt zunächst nur für  $0^\circ < \alpha, \beta$  und  $\alpha + \beta < 90^\circ$ . Ihn allgemein zu führen, erfordert eine Unterscheidung mehrerer Fälle, die prinzipiell ähnlich bewiesen werden oder trivial sind.

**Proof:** Betrachte folgende Figur, wo  $l(PC) = 1$  sei:

In ihr gilt:

$$l(CD) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$l(PB) = \cos \beta, \text{ also}$$

$$l(AB) = \cos \beta \sin \alpha$$

$$l(BC) = \sin \beta, \text{ also}$$

$$l(CE) = \sin \beta \cos \alpha. \text{ Folglich}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = l(CD) = l(CE) + l(AB) = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha.$$

Was den Cosinus betrifft, finden wir in derselben Figur folgende Gleichheiten:

$$l(PD) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$l(PB) = \cos \beta, \text{ also}$$

$$l(PA) = \cos \beta \cos \alpha$$

$$l(BC) = \sin \beta, \text{ also}$$

$$l(BE) = \sin \beta \sin \alpha. \text{ Folglich}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = l(PD) = l(PA) - l(BE) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \quad \square$$

**Corollary 15.12** a)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

$$b) \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$c) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 4 \sin \alpha \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)$$

Hier ist  $\sin 2\alpha = \sin(2\alpha)$  usw.

**Proof:** Nur b) und c) sind zu zeigen.

$$b) \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

$$b) \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^3 \alpha =$$

$$3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 4 \sin \alpha \cdot \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \sin^2 \alpha \right) =$$

$$4 \sin \alpha \cdot (\sin^2 60^\circ - \sin^2 \alpha) = 4 \sin \alpha \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha). \quad \square$$

Als Anwendung beweisen wir den Satz von Morley:

**Proposition 15.13** *Bringt man die benachbarten Drittelllinien der Winkel eines beliebigen Dreiecks zum Schnitt, so bilden die drei erhaltenen Schnittpunkte ein gleichseitiges Dreieck.*

**Proof:** Unter Benutzung von (15.7) und (15.12 c) berechnen wir die Länge einer Seite des „Morley-Dreiecks“ und zeigen die BEHAUPTUNG, dass sie gleich

$$8r \sin \frac{\alpha}{3} \sin \frac{\beta}{3} \sin \frac{\gamma}{3}$$

ist, wobei  $r$  den Umkreisradius und  $\alpha, \beta, \gamma$  wie üblich die Dreieckswinkel von  $ABC$  bezeichnen. Da dieser Ausdruck symmetrisch in  $\alpha, \beta, \gamma$  ist, muss sich dasselbe Ergebnis auch für die anderen beiden Seiten des Morley-Dreiecks gelten.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG: Wohlan, sei in folgender Figur  $A'B'C'$  das Morley-Dreieck. Wir wählen als Einheit des Längenmaßes  $2r$ . Wir wollen die Länge  $l(B'C')$  berechnen, und zu diesem Zweck zunächst  $l(AB')$  und  $l(AC')$ .

Nachdem Sinussatz angewandt auf das Dreieck  $ABC'$  erhalten wir

$$l(AC') = \frac{l(AB) \sin \frac{\beta}{3}}{\sin \gamma'}$$

Da  $2r = 1$  ist, gilt  $l(AB) = \sin \gamma$ . Da  $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = 60^\circ - \frac{\gamma}{3}$  ist, gilt  $\gamma' = 180^\circ - (60^\circ - \frac{\gamma}{3})$ , also  $\sin \gamma' = \sin(60^\circ - \frac{\gamma}{3})$ . Mit Hilfe von (15.12 c) folgt dann

$$\begin{aligned} l(AC') &= \frac{4 \sin \frac{\gamma}{3} \sin \left(60^\circ + \frac{\gamma}{3}\right) \sin \left(60^\circ - \frac{\gamma}{3}\right) \sin \frac{\beta}{3}}{\sin \left(60^\circ - \frac{\gamma}{3}\right)} \\ &= 4 \sin \frac{\gamma}{3} \sin \left(60^\circ + \frac{\gamma}{3}\right) \sin \frac{\beta}{3} \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von  $B$  mit  $C$ , also von  $B'$  mit  $C'$  und  $\beta$  mit  $\gamma$  erhält man analog:

$$l(AB') = 4 \sin \frac{\beta}{3} \sin \left(60^\circ + \frac{\beta}{3}\right) \sin \frac{\gamma}{3}$$

Jetzt können wir  $l(B'C')^2$  nach dem Cosinussatz (angewandt auf  $AB'C'$ ) berechnen:

$$\begin{aligned} l(B'C')^2 &= l(AB')^2 + l(AC')^2 - 2l(AB')l(AC') \cos \frac{\alpha}{3} = \\ &= 16 \sin^2 \frac{\beta}{3} \sin^2 \frac{\gamma}{3} \\ &\quad \cdot \left[ \sin^2 \left(60^\circ + \frac{\beta}{3}\right) + \sin^2 \left(60^\circ + \frac{\gamma}{3}\right) - 2 \sin \left(60^\circ + \frac{\beta}{3}\right) \sin \left(60^\circ + \frac{\gamma}{3}\right) \cos \frac{\alpha}{3} \right] \end{aligned}$$

Da  $\frac{\alpha}{3} + 60^\circ + \frac{\beta}{3} + 60^\circ + \frac{\gamma}{3} = 180^\circ$  gilt, ist nach (15.7) der Faktor in den eckigen Klammern gleich  $\sin^2 \frac{\alpha}{3}$ . Da alle betrachteten Sinuswerte positiv sind, ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

## 16 Flächeninhalte und Volumina

**16.1 Rechteck.** Für mich war es in meiner Kindheit durchaus eine Erkenntnis, dass  $10 \text{ m}^2$  nicht die Fläche eines Quadrates mit der Seitenlänge  $10 \text{ m}$  ist. Als ich neulich in einer Zeitung von einem Balkon las, der  $80 \text{ cm}^2$  groß sein sollte, war mir klar, dass der Verfasser dies in seiner Jugend nicht mitbekommen hat, obwohl er wahrscheinlich das Gymnasium besucht hatte.

Umso sorgfältiger werden Sie das einführen müssen!

Man sieht durch Abzählen, dass ein Rechteck, welches etwa  $5 \text{ cm}$  lang und  $3 \text{ cm}$  breit ist, einen Flächeninhalt von  $3 \cdot 5 \text{ cm}^2$  besitzt. Dieses Beispiel lässt erkennen, dass ein Rechteck der Länge  $m$  (Längeneinheiten) und der Breite  $n$  Längeneinheiten den Flächeninhalt  $mn$  (den Längeneinheiten entsprechende Flächeneinheiten) hat.

Welche Fläche hat ein Rechteck, dessen Länge  $1/n_1$  und Breite  $1/n_2$  mit ganzen  $n_i > 0$  ist? Seien etwa  $n_1 = 3$  und  $n_2 = 5$ . Teile ein Quadrat mit der Seitenlänge  $1$  durch waagerechte und senkrechte Strecken in  $3 \cdot 5$  kongruente Rechtecke. Man erkennt, dass der Flächeninhalt jedes solchen Rechtecks  $1/15$  des Flächeninhalts des Einheitsquadrates ist. Allgemein hat also ein Rechteck mit den Seitenlängen  $1/n_1, 1/n_2$  den Flächeninhalt  $\frac{1}{n_1 n_2}$ .

Und dann sieht man auch, dass ein Rechteck mit den Seitenlängen  $2/3$  und  $4/5$  den Flächeninhalt  $8/15$  besitzt. Allgemein besitzt ein Rechteck mit den rationalen Seitenlängen  $m_1/n_1, m_2/n_2$  den Flächeninhalt  $\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$ .

Dies ist natürlich ein Hinweis darauf, dass wir die Multiplikation von Brüchen richtig definiert haben.

Hat mindestens eine Seitenlänge ein irrationales Maß, so kann man mit Dedekindschen Schnitten argumentieren. Sind  $\rho, \sigma > 0$  reelle Zahlen und  $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$  mit  $a \leq \rho < a', b \leq \sigma < b'$ , so gilt arithmetisch:  $ab \leq \rho\sigma < a'b'$ . Geometrisch ist aber offenbar ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a, b$  kleiner oder gleich groß wie ein solches mit den Seitenlängen  $\rho, \sigma$  und dieses kleiner als ein solches mit den Seitenlängen  $a', b'$ . Das genügt.

**16.2 Rechtwinkliges Dreieck.** Aus einem solchen und einem zu ihm kongruenten Dreieck kann man ein Rechteck zusammensetzen, dessen Flächeninhalt gleich dem Produkt der beiden Kathetenlängen des Ausgangsdreiecks ist. Also ist dessen Fläche gleich  $ab/2$ , wo  $a, b$  die beiden Kathetenlängen bezeichnet.

**16.3 Allgemeines Dreieck.** Wähle eine Seite als sogenannte **Grundseite** mit der Länge  $g$  und betrachte die Höhe mit der Länge  $h$  vom gegenüberliegenden Eckpunkt aus. Je nachdem, ob diese Höhe mit einer Seite übereinstimmt, im innern des Dreiecks oder aber außerhalb desselben verläuft, ist das Dreieck rechtwinklig, wo Höhe und Grundseite die beiden Katheten sind, oder seine Fläche die Summe zweier Flächen rechtwinkliger Dreiecke oder aber die Differenz zweier solcher. Allgemein bekommt man für die Dreiecksfläche das Maß

$$\frac{gh}{2}$$

**16.4 Trapez.** Ein solches ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten. Ihr Abstand sei  $h$ . Seien  $a, c$  die Seitenlängen der beiden parallelen Seiten. Durch eine Diagonale zerlegt man das Trapez in zwei Dreiecke, die beide die Höhe  $h$  und die Grundseitenlängen  $a$  bzw.  $c$  haben. Es ergibt sich als Flächeninhalt des Trapezes:

$$\frac{(a+c)h}{2}$$

Im Spezialfall des Parallelogrammes gilt  $a = c$ . Seine Fläche ist also  $ah$ .

**Remarks 16.5** a) Ich habe auf der Schule ein umgekehrtes Verfahren kennengelernt: Zunächst wurde der Flächeninhalt eines Parallelogrammes ermittelt, indem ein Dreieck „an einer Seite“ abgeschnitten und an die andere angelegt wurde. Das ist aber nicht immer so einfach. Siehe Abbildung!

b) Jede geradlinig begrenzte beschränkte Figur lässt sich in Dreiecke zerlegen. Ihre Flächengröße lässt sich ohne infinitesimale Betrachtungen definieren und berechnen. Das Entsprechende gilt nicht mehr für das Volumen von Körpern, die durch Ebenenstücke begrenzt sind. (Satz von Dehn). Dies ist einer der Sätze, die man je nach Temperament ärgerlich oder faszinierend finden kann.

**Remark 16.6** HERONISCHE FORMEL. Da Dreiecke durch die Längen ihrer 3 Seiten bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt sind und kongruente Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben, ist es prinzipiell möglich, den Flächeninhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seitenlängen zu berechnen. Wir gehen wie folgt vor:

Da die Höhe  $h_c = b \sin \alpha$  ist, gilt für den Flächeninhalt  $F$  des Dreiecks:

$$2F = bc \sin \alpha$$

Aus dem Cosinussatz ergibt sich

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = bc \cos \alpha$$

Quadriere beide Gleichungen und addiere sie unter Beachtung, dass  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  ist:

$$4F^2 + \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)^2 = b^2 c^2$$

Also

$$\begin{aligned} 16F^2 &= -(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 4b^2c^2) = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ &= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = 16s(s - a)(s - b)(s - c), \text{ wo } s := \frac{a + b + c}{2} \text{ sei.} \end{aligned}$$

**Remark 16.7** GAUSS. Ein beliebiges  $n$ -Eck **ohne Überschneidungen**, aber nicht notwendig konvex habe in einem orthonormalen, wie üblich orientierten, Koordinatensystem die Eckpunkte  $(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ . Dabei seien die Eckpunkte der Reihenfolge nach angegeben, so dass beim Durchlaufen des Randes das Innere des  $n$ -Ecks links liege. Wir setzen noch  $(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ .

Dann gilt für die Fläche  $F$  des  $n$ -Ecks:

$$F = \frac{1}{2} \sum_k = 1^n (x_{k-1} - x_k)(y_{k-1} + y_k)$$

**16.8 Kreis.** Bei einem Kreis ist es nicht nur interessant, seinen Flächeninhalt, sondern auch, seinen Umfang, d.h. die Länge der Kreislinie zu bestimmen. Zunächst ermitteln wir einen Zusammenhang zwischen diesen Größen.

Beschreibt man einem Kreis ein regelmäßiges  $n$ -Eck um, so ist dessen Flächeninhalt gleichgroß wie der eines Dreiecks, dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises und dessen Umfang gleich dem Umfang des  $n$ -Ecks ist. Vergrößert man  $n$  – etwa durch Verdoppeln, so nähert sich sowohl der Flächeninhalt des  $n$ -Ecks als auch sein Umfang dem des Kreises beliebig an. Das ist doch anschaulich klar. Und ich glaube, dass die Schüler das akzeptieren.

Hieraus folgt: Ist  $u$  der Umfang eines Kreises vom Radius  $r$ , so ist sein Flächeninhalt  $ur/2$ .

Nun habe man zwei Kreise von den Radien  $r$  und  $r'$  und den Umfängen  $u$  und  $u'$ . Zeichnet man um beide ein regelmäßiges  $n$ -Eck, so sind die beiden  $n$ -Ecke zueinander ähnlich. Für ihre Umfänge  $u_n, u'_n$  gilt also  $u_n/u'_n = r/r'$ . Da aber  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  und  $u' = \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n$  ist, gilt somit auch  $u/u' = r/r'$ . Damit ist das Verhältnis  $u/r$ , also auch  $u/2r$  konstant als Funktion von  $r$ . (Beachte, dass  $u$  von  $r$  abhängig ist.)

Man kann also definieren:

**Definition 16.9**  $\pi := u/2r$ , wo  $u$  der Umfang eines Kreises vom Radius  $r \neq 0$  ist.

Beachte, dass diese Definition nur in der euklidischen Geometrie möglich ist, da wir ein Ähnlichkeitsargument benutzt haben.

**16.10** Der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius  $r$  ist nach obigem gleich  $ur/2 = 2\pi r \cdot r/2 = \pi r^2$ . Die Länge der Kreislinie ist nach Definition gleich  $2\pi r$ .

Man kann  $\pi$  näherungsweise berechnen, indem man  $u_n$  für große  $n$  berechnet. Archimedes hat dies getan. Heute liefert die Analysis weit bessere Methoden. S.u. Man kann auch verhältnismäßig leicht zeigen, dass  $\pi$  irrational ist. Schwierig ist allerdings der Beweis des Satzes, dass  $\pi$  transzendent ist, d.h. keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt.

**Remark 16.11** Noch einmal: Auf Grund der Ähnlichkeit aller Kreise gibt es eine (universelle) Konstante  $\pi_1$  mit der Eigenschaft, dass der Umfang eines Kreises vom Radius  $r$  gleich  $2\pi_1 r$  ist. Aus dem selben Grund gibt es eine (universelle) Konstante  $\pi_2$  derart, dass der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius  $r$  gleich  $\pi_2 r^2$  ist. Die eigentliche Erkenntnis, die wir oben in (16.8) gewonnen haben, ist  $\pi_1 = \pi_2$ .

**16.12 Mönchchen des Hippokrates.** Es gibt eine durch Kreislinien begrenzte Figur, deren Flächen­größe sich ohne Benutzung von  $\pi$  berechnen lässt. Sei  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $a, b$  und der Hypotenuse  $c$ . Betrachte je einen Halbkreis auf den Dreiecksseiten. Die Flächen­größe eines Halbkreises ist proportional zum Quadrat seines Durchmessers. Deshalb gilt auf Grund des „Pythagoras“: Die Flächen­größe  $f_c$  des Halbkreises über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächen­größen  $f_a$  und  $f_b$  der Halbkreise über den Katheten.

Jetzt zeichne man über den beiden Katheten je einen Halbkreis „außerhalb“ des Dreiecks, hingegen über der Hypotenuse den Halbkreis, der durch  $C$  geht (Thales). Man sieht zwei „mond­förmige“ Flächen. Deren Gesamtinhalt ist so groß, wie die Dreiecksfläche – wie man leicht rechnet. Leider kann man diese Erkenntnis nicht zur Berechnung von  $\pi$  verwenden!

Beachte, dass in Wahrheit eine Mondsichel (bei einem exakt kugelförmigen Mond) nicht von zwei Kreisabschnitten begrenzt wird! Sondern?

**16.13 BERECHNUNG VON  $\pi$  NACH LEIBNIZ.** Es ist  $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$ . Wir versuchen deshalb, den Arcustangens in eine Potenzreihe zu entwickeln und nutzen, dass

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist. Für  $|x| < 1$  gilt nach der Summenformel der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Da man Potenzreihen in ihrem offenen Konvergenzbereich ableiten kann, indem man gliedweise ableitet, ist

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

für  $|x| < 1$  eine Stammfunktion von  $(1+x^2)^{-1}$ . Da  $F(0) = 0 = \arctan 0$  ist, stimmen beide Stammfunktionen überein:

$$\arctan x = F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe auch für  $x = 1$ . Nach dem Abelschen Grenzwertsatz ist ihr Wert in 1 gleich  $\arctan 1$ :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

Diese von Leibniz gefundene Reihe konvergiert nicht besonders schnell. Schneller geht es, wenn man mit o.g. Potenzreihe  $\pi/6$  ausrechnet.

**16.14 Volumen eines allgemeinen Kegels.** Sei in einer Ebene  $E$  ein Flächenstück  $F$  mit dem Flächeninhalt  $f$  gegeben. Sei  $P$  ein Punkt außerhalb der Ebene  $E$  im Abstand  $h$  von  $E$  gegeben. Der **Kegel über  $F$  mit der Spitze  $P$**  ist die Vereinigung aller Verbindungsstrecken von  $P$  zu den Punkten von  $F$ . (Wir sprechen hier von einem allgemeinen Kegel, der ein eigentlicher Kegel in dem Fall ist, dass  $F$  eine Kreisfläche und das Lot von  $P$  auf die Ebene  $E$  diese im Mittelpunkt von  $F$  trifft.)

**Proposition 16.15** *Das Volumen des o.a. allgemeinen Kegels ist  $fh/3$ .*

**Proof:** Wir benutzen die Integralrechnung. Dazu betrachten wir folgende Funktion: Sei  $E_x$  für  $0 \leq x \leq h$  die zu  $E$  parallele Ebene, die zwischen  $P$  und  $E$  liegt und von  $P$  den Abstand  $x$  hat. Der Schnitt der Ebene  $E_x$  mit dem betrachteten Kegel ist ein zu  $F$  ähnliches Flächenstück, dessen Flächeninhalt  $f_x$  sich zu  $f$  verhält wie  $x^2$  zu  $h^2$ , also

$$f_x = \frac{fx^2}{h^2}$$

Das Volumen ist somit

$$\int_0^h f_x dx = \int_0^h \frac{fx^2}{h^2} dx = \frac{f}{h^2} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^h = \frac{fh^3}{3h^2} = \frac{fh}{3}$$

□

**Remark 16.16** Wenn man die Volumenberechnung elementarer (geometrischer) Körper vor der Integralrechnung einführt, benutzt man i.A. das **Prinzip des Cavalieri**: *Seien  $K, L$  Körper im Raum und  $E$  eine Ebene, derart dass die zu  $E$  parallelen Ebenen beide Körper in gleich großen Flächenstücken schneiden, so haben  $K$  und  $L$  das gleiche Volumen.*

Dieses „Prinzip“ gewinnt man durch eine infinitesimale Betrachtung, ohne welche man nach dem Satz von Dehn bei der dreidimensionalen Volumenberechnung nicht auskommt.

Jedes – auch schräge – **Prisma** hat dann das Volumen *Grundfläche*  $\times$  *Höhe*.

Sei jetzt eine (nichtägyptische) **Pyramide** mit dreieckiger Grundfläche vom Maß  $f$  gegeben, so kann man diese mit zwei anderen (nicht notwendig kongruenten aber) nach dem Cavalieri-Prinzip gleichgroßen solchen Pyramiden zu einem Prisma zusammensetzen und erhält deshalb als Volumen der Pyramide  $fh/3$ .

Dies kann man auf allgemeine Kegel leicht verallgemeinern, wenn deren Grundfläche geradlinig begrenzt ist. Im allgemeinen Fall, etwa dem Kreiskegel, muss man noch eine infinitesimale Betrachtung hinzufügen.

**Proposition 16.17** *Eine Kugel vom Radius  $r$  hat das Volumen  $4\pi r^3/3$ .*

**Proof:** Wir betrachten eine Halbkugel vom Radius  $r$ , die mit ihrer ebenen Seite auf einer Ebene  $E$  steht. Neben dieser Halbkugel stehe auf einer Grundseite ein **Zylinder**, dessen Grundseite ein Kreis vom Radius  $r$  und dessen Höhe gleich  $r$  ist. Aus diesem sei ein Kreiskegel so ausgebohrt, dass dessen Spitze der Mittelpunkt der (kreisförmigen) Zylindergrundfläche in  $E$  ist, dessen Grundfläche gleich der oberen Grundfläche des Zylinders ist. Das Volumen des auf diese Weise entstehenden Differenzkörpers ist  $r^3\pi - \frac{1}{3}r^3\pi = \frac{2}{3}r^3\pi$ .

BEHAUPTUNG: Jede zu  $E$  parallele Ebene  $F$  schneidet aus der Halbkugel und dem Differenzkörper von Zylinder und Kegel gleichgroße Flächenstücke aus.

BEWEIS HIERFÜR: Liegt  $F$  „unterhalb“  $E$  oder in einem Abstand  $> r$  zu  $E$ , so ist der Durchschnitt von  $F$  sowohl mit der Halbkugel, als auch mit dem Differenzkörper leer. Im Abstand  $x$  mit  $0 \leq x \leq r$  oberhalb von  $E$  hat  $F$  mit der Halbkugel als Schnitt eine Kreisfläche vom Radius  $\sqrt{r^2 - x^2}$ . Dessen Flächeninhalt ist also  $(r^2 - x^2)\pi$ . Der Durchschnitt mit dem Differenzkörper ist ein Kreisring, dessen äußerer Radius  $r$  und dessen innerer Radius  $x$  ist. Sein Flächeninhalt ist also  $r^2\pi - x^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$ .

Nach dem Prinzip des Cavalieri ist also auch das Volumen der Halbkugel gleich  $2r^3\pi/3$ .  $\square$

**16.18** Sei  $O_r$  der Oberflächeninhalt einer Kugel vom Radius  $r$ . Analog zum Vorgehen beim Kreis zeigt man mit infinitesimalen Betrachtungen, dass das Volumen der Kugel vom Radius  $r$  gleich dem eines Kegels der Höhe  $r$  über einer Fläche vom Inhalt  $O_r$  ist. In Formeln:

$$\frac{rO_r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}, \text{ also } O_r = 4\pi r^2.$$

**16.19** Sei  $K$  eine Kugel und  $E$  eine Ebene durch den Mittelpunkt dieser Kugel.  $E$  und die Oberfläche der Kugel mögen sich in der Kreislinie  $S$ , die wir als Äquator auffassen können, schneiden. Wir errichten über dieser Kreislinie den Zylinder  $Z$ , der nach beiden Seiten von  $E$  durch Ebenen im Abstand  $r$  begrenzt ist. Seien ferner  $F_1, F_2$  zu  $E$  parallele Ebenen, welche die Kugel  $K$ , oder – äquivalent dazu – den Zylinder  $Z$ , schneiden. Dann hat der Teil der Kugeloberfläche, der zwischen diesen beiden Ebenen liegt, den gleichen Inhalt wie der Teil des Zylindermantels der zwischen diesen beiden Ebenen liegt.

Wenn man die Methode der sogenannten **Flächenelemente** zur Begründung zulässt, ist dies ziemlich einfach zu beweisen.

## 17 Stereometrie

Bislang haben wir fast ausschließlich Geometrie in der Ebene betrieben. Geometrie im (anschaulichen, d.h. 3-dimensionalen) Raum heißt Stereometrie. Diese kommt in der Schule ziemlich kurz. Auf der einen Seite ist dies verständlich. Denn die räumliche Anschauung fällt vielen schwer, auch mir. (Noch viel schwerer fällt es mir allerdings, räumliche geometrische Tatsachen zu erklären.) Außerdem kann man im Raum nicht zeichnen. Und schließlich kann man in der Schule ja auch nicht alles machen. Auf der anderen Seite ist die mangelnde Beschäftigung mit dem räumlichen Denken auch bedauerlich. Denn wir leben nun mal im Raum. Manche Moleküle kann man nur im 3-Dimensionalen richtig verstehen und voneinander unterscheiden! So geht es auch mit vielen Maschinen. Die Beschäftigung mit 3-dimensionaler Geometrie könnte die 3-dimensionale Anschauung effektiv schulen. Auch jemand, der alle stereometrischen Sätze vergessen hat, kann möglicherweise in seinem späteren Leben und Beruf von einer Schulung der räumlichen Anschauung profitieren.

Wir werden nur einige Aspekte der Stereometrie streifen.

**17.1 Windschiefe Geraden.** In der Ebene haben wir für ein Paar von Geraden folgende Möglichkeiten: Sie schneiden sich in genau einem Punkt, oder sie sind zueinander parallel. Dabei hat für uns die Parallelität eine sehr anschauliche Bedeutung. Im Raum kann man sicher viele Paare von Geraden finden, die in keiner gemeinsamen Ebene liegen. Diese nennt man **windschief** zueinander.

Wir wollen zwei Geraden (dann und) nur dann **parallel** nennen, wenn sie in einer gemeinsamen Ebene liegen und in dieser parallel sind. (Das schließt natürlich den Fall ein, dass die beiden Geraden übereinstimmen.)

**17.2** Zwei Ebenen im Raum schneiden sich „im Allgemeinen“ in einer Geraden. (Wenn sie einen Punkt gemeinsam haben, haben sie auch mindestens eine Gerade gemeinsam.) Sie heißen **parallel**, wenn sie entweder übereinstimmen oder keinen Punkt gemeinsam haben.

**17.3** Zu einer Ebene  $e$  und einem Punkt  $P$  im Raum gibt es genau eine Gerade  $g$ , die senkrecht zu  $e$  ist und durch  $P$  geht.

(Was heißt hier „senkrecht“?)

Zu einer Geraden  $g$  und einem Punkt  $P$  im Raum gibt es genau eine Ebene  $e$ , die senkrecht zu  $g$  durch  $P$  geht. Zu einer Strecke gibt es also eine mittelsenkrechte Ebene.

**17.4** Das Analogon zum Dreieck in der Ebene ist im Raum das **Tetraeder**. Es wird durch 4 Punkte gegeben, die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen. Je drei der vier Punkte bestimmen ein Dreieck, eine **Seite(nfläche)** des Tetraeders. Man hat also vier Seitenflächen, daher der Name Tetraeder, d.h. Vierflach. Ferner hat das Tetraeder sechs **Kanten** und vier **Eckpunkte**.

Wir wollen merkwürdige Punkte im Tetraeder finden und beginnen mit dem **Schwerpunkt**.

**Proposition 17.5** *Die Verbindungsstrecken der Eckpunkte eines Tetraeders mit den Schwerpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seiten schneiden sich in einem Punkt.*

**Proof:** Wir denken uns die Eckpunkte  $A, B, C, D$  des Tetraeders als Vektoren, bei einem beliebig angenommenen Ursprung (Nullpunkt). Wir zeigen, dass der Punkt  $(A + B + C + D)/4$  auf jeder der angegebenen Strecken liegt.

Der Schwerpunkt der Seite  $ABC$  ist bekanntlich  $S_d = (A + B + C)/3$ . Da  $(1/4) + (3/4) = 1$  ist, liegt

$$\frac{1}{4}D + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(A + B + C)\right) = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$$

auf der Verbindungsgeraden von  $D$  mit  $S_d$ . Er liegt zwischen  $D$  und  $S_d$ , da  $1/4$  und  $3/4$  positiv sind.

□

**Proposition 17.6** *Die Senkrechten auf den Seiten in den jeweiligen Umkreismittelpunkten schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt der Umkugel (oder Umsphäre) des Tetraeders, d.h. dem Punkt, der von allen vier Ecken des Tetraeders den selben Abstand hat.*

**Proof:** Es ist nicht ganz klar, dass es einen Umkugelmittelpunkt überhaupt gibt. Während bei einem nichtausgearteten Dreieck klar ist, dass die Mittelsenkrechten zweier verschiedener Seiten sich schneiden, könnten die o.a. Geraden zueinander windschief sein.

Sei  $g$  die zum Dreieck  $ABC$  senkrechte Gerade durch den Umkreismittelpunkt desselben Dreiecks und  $e$  eine (meist *die*) Ebene durch  $g$  und  $D$ . Diese schneide die Umkreislinie in den Punkten  $E, F$ . Der Umkreismittelpunkt  $U$  des Dreiecks  $DEF$  liegt auf  $g$  und hat von  $E$  (und  $F$ ) denselben denselben Abstand, wie zu allen Punkten des Umkreises von  $ABC$ , insbesondere zu den Punkten  $A, B, C$  – der Umkreis von  $ABC$  ist der Schnitt der Kugel um  $U$  mit dem Radius  $l(UE)$  mit der Ebene, in der  $ABC$  liegt. Diesen Abstand hat er auch zu  $D$ , da  $U$  der Umkreismittelpunkt von  $DEF$  ist. Mithin ist  $U$  der gesuchte Punkt.  $\square$

**Remark 17.7** Man kann auch zeigen, dass die mittelsenkrechten Ebenen der sechs Kanten eines Tetraeders sich in dem Umsphären-Mittelpunkt schneiden.

**17.8** Es gibt auch eine Inkugel eines beliebigen Tetraeders. Durch jede Kante legt man die Ebene, die den Innenwinkel (Definition??) der anliegenden Seiten halbiert. Man sieht – analog zu dem obigen Vorgehen oder dem zur Konstruktion des Inkreismittelpunktes – dass diese Ebenen sich in einem Punkt schneiden, dem Inkugelmittelpunkt.

Es gibt natürlich auch vier Ankugeln.

**Remark 17.9** Die Höhen (Definition?) eines Tetraeders schneiden sich im Allgemeinen nicht!

## 18 Komplexe Zahlen

Wenn man von den natürlichen Zahlen aus über die ganzen und rationalen Zahlen schließlich zu den reellen Zahlen gelangt ist, ist ein gewisser Abschluss erreicht. Man kann z.B. jeden Punkt des (euklidischen) Raumes – nach Festlegung eines Koordinatensystems – durch ein Tripel reeller Zahlen beschreiben, was bekanntlich nicht möglich ist, wenn man sich auf die rationalen oder die positiven reellen Zahlen beschränkt. Wen kümmert es eigentlich ernsthaft, dass man aus negativen Zahlen keine Quadratwurzeln ziehen kann? Man verzichtet ja auch darauf, durch 0 zu dividieren.

Die erste Ahnung davon, dass sich möglicherweise hinter der durch reelle Zahlen beschriebenen Realität eine mathematisch relevante Wirklichkeit verbirgt, bekamen unsere Vorfahren in der Renaissance.

**Kubische Gleichungen:** Sie wissen, wie man quadratische Gleichungen löst. Auf die sogenannte „p-q-Formel“ kommt man durch die quadratische „Ergänzung“. Wenn man analog eine „kubische Ergänzung“ auf kubische Gleichungen (d.h. solche 3. Grades) anzuwenden versucht, erreicht man lediglich eine Reduktion auf Gleichungen der Form  $x^3 + px + q = 0$ . Eine Lösungsformel für diese Gleichung fand (wahrscheinlich) Tartaglia im Jahre 1535:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Für die Gleichung  $x^3 - 3x + 2 = 0$  z.B. liefert Tartaglias Formel die Lösung  $x = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1-1}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{1-1}} = -2$ , die offenbar richtig ist. (Allerdings ist 1 eine weitere Lösung.) Ebenso erhält man mit Tartaglias Formel die Lösung 0 der Gleichung  $x^3 + x = 0$ . (Diese ist übrigens die einzige Lösung im Bereich der reellen Zahlen.)

Bei der ebenso simplen Gleichung  $x^3 - x = 0$  scheint allerdings Tartaglias Formel zu versagen. Sie ergibt

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}$$

Die (richtige) Lösung 0 erhält man nur dann, wenn man sich großzügig darüber hinwegsetzt, dass der zweimal vorkommende Ausdruck  $\sqrt{-\frac{1}{27}}$  im Bereich der reellen Zahlen gar keinen Sinn hat. Die weiteren Lösungen 1 und -1 scheint man mit Tartaglias Formel gar nicht zu finden)

Dies sollte weniger ein Grund zur Resignation sein, als einer dafür, Quadratwurzeln aus negativen Zahlen einen Sinn zu geben. Umso mehr, als in Tartaglias Formel solche merkwürdigen Ausdrücke häufig genug auftreten, nämlich immer gerade dann, wenn die Gleichung drei verschiedene reelle Lösungen hat.

**Komplexe Zahlen:** Die Mathematiker erfanden zu den reellen Zahlen eine neue Zahl dazu, die „i“ genannt wurde und die merkwürdige Eigenschaft  $i^2 = -1$  hat, und betrachteten als neue, sogenannte komplexe Zahlen die Ausdrücke der Gestalt  $a + bi$  mit reellen Zahlen  $a, b$ . (Zunächst sprach man von imaginären, d.h. eingebildeten Zahlen. Daher auch der Buchstabe i. Da man teilweise unter imaginären Zahlen nur solche der Form  $bi$  mit reellem  $b$  verstand, kam man auf den Namen „komplexe Zahl“ für eine Summe aus einer reellen und einer (rein) imaginären Zahl.)

So wie man die reellen Zahlen als Punkte auf einer Geraden auffassen kann, so fasst man die komplexen Zahlen als Punkte in einer Ebene auf, die komplexe Zahl  $a + bi$  bekommt die (rechtwinkligen) Koordinaten  $(a, b)$ . Es ist auch nützlich, sich die Zahl  $a + bi$  als den Vektor vorzustellen, der von  $(0, 0)$  nach  $(a, b)$  geht.

Mit komplexen Zahlen wird gerechnet wie gewohnt, allerdings unter der Bedingung, dass immer  $i^2 = -1$  sei. Also etwa

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

was geometrisch der Vektoraddition entspricht,

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i,$$

(Vorsichtige Leute – wie ich z.B. – werden allerdings zunächst die komplexe Zahl  $a + bi$  als Paar  $(a, b)$  reeller Zahlen  $a, b$  schreiben und dann  $(a_1, b_1)(a_2, b_2) := (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$  und  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$  **definieren**, um dann wirklich **beweisen** zu können, dass alle gewohnten Rechenregeln gelten.)

Die Zahlen  $0 = 0 + 0i$  und  $1 = 1 + 0i$  behalten ihre bekannten Eigenschaften. Man kann natürlich subtrahieren und sogar dividieren. Nämlich für  $a + bi \neq 0$  gilt

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

(Beachten Sie, dass für  $a + bi \neq 0$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  auch  $a^2 + b^2 \neq 0$  ist.)

Als spezielles Beispiel rechnen wir  $(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ , also  $(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^2 = \frac{1}{2}(2i) = i$ , mithin  $(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^4 = i^2 = -1$ . Im Bereich der komplexen Zahlen ist also  $-1$  nicht nur ein Quadrat, sondern auch eine 4. Potenz (übrigens – wie wir unten sehen werden – auch eine 6., 8. usw.). Wir bleiben bei diesem Beispiel und setzen abkürzend  $v := \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ . Dann ist  $v^3 = v^2v = iv = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ,  $v^5 = v^4v = -v$ ,  $v^6 = v^4v^2 = -i$ ,  $v^7 = v^4v^3 = -v^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$  und schließlich  $v^8 = (v^4)^2 = (-1)^2 = 1$ . Dann wiederholen sich die Werte der Potenzen, also  $v^9 = v^8v = v$ ,  $v^{10} = v^8v^2 = v^2 = i$ ,  $v^{11} = v^8v^3 = v^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$  usw. Für jede beliebige (ganze) Potenz  $v^k$  gilt offenbar  $(v^k)^8 = (v^8)^k = 1^k = 1$ . D.h. wir haben insgesamt 8 verschiedene Zahlen gefunden, deren 8. Potenz 1 ergibt, nämlich  $1, v, v^2, \dots, v^7$ .

Ein weiteres Beispiel. Setze  $w := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Dann ist  $w^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  und  $w^3 = ww^2 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$ . Weiter erhält man  $w^4 = w^3w = -w$ ,  $w^5 = w^3w^2 = -w^2$  und  $w^6 = w^3w^3 = (-1)(-1) = 1$ . Wie oben wiederholen sich jetzt die Potenzen:  $w^7 = w^1$ ,  $w^8 = w^2$  usw. Ebenso sieht man, dass für jede ganze Potenz  $w^k$  von  $w$  gilt:  $(w^k)^6 = 1$ . Es gibt also (mindestens) 6 verschiedene komplexe Zahlen, die die Gleichung  $x^6 = 1$  erfüllen.

**Zur geometrischen Deutung der Multiplikation.** Sei  $c = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  eine komplexe Zahl. Ihr (Absolut-)Betrag wird definiert als  $|c| := \sqrt{a^2 + b^2}$ , d.h. als Länge des entsprechenden Vektors (Pythagoras). Sei  $c \neq 0$ , d.h.  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ . Der Vektor  $c$  hat zum Vektor  $1 = 1 + 0i$  einen (orientierten) Winkel, den man als Argument von  $c$  bezeichnet. (Das Argument ist im Grunde nur bis auf Addition eines Vielfachen von  $2\pi$  definiert.) Ist  $\varphi$  das Argument von  $c$ , so gilt offenbar

$$c = |c|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ d.h. } a = |c| \cos \varphi, \quad b = |c| \sin \varphi.$$

Für zwei von 0 verschiedene komplexe Zahlen  $c_1, c_2$  mit den Argumenten  $\varphi_1, \varphi_2$  erhalten wir mit Hilfe der Additionstheoreme des Sinus und des Cosinus

$$c_1 c_2 = |c_1| |c_2| \left( \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \right) = |c_1| |c_2| \left( \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right)$$

D.h. der Betrag des Produktes ist das Produkt der Beträge und das Argument des Produktes ist die Summe der Argumente der Faktoren. Es folgt z.B.

$$c^n = |c|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Dies gilt für jede positive ganze Zahl  $n$  (und, wie man sich leicht überlegt, auch für jede ganze Zahl  $n$ ).

Sei  $c \neq 0$  eine komplexe Zahl mit dem Argument  $\varphi$  und  $d := \sqrt[n]{|c|} (\cos(\varphi/n) + i \sin(\varphi/n))$  ( $n > 0$ ) so gilt offenbar  $d^n = c$ . D.h. man kann aus jeder komplexen Zahl für jede natürliche Zahl  $n > 0$  eine  $n$ -te Wurzel ziehen.

Allerdings ist das Wurzelziehen nicht eindeutig: Es gibt genau  $n$  verschiedene komplexe Zahlen  $d$  mit  $d^n = c$ , wenn nicht gerade  $c = 0$  ist. Das mag man im Zusammenhang mit der Vieldeutigkeit des

Arguments einer komplexen Zahl sehen: Es ist  $\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + i \sin(\varphi + k \cdot 2\pi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$  für jede ganze Zahl  $k$ . Also ist jede komplexe Zahl  $d_k := \sqrt[n]{|c|}(\cos(\varphi/n + k \cdot 2\pi/n) + i \sin(\varphi/n + k \cdot 2\pi/n))$  eine  $n$ -te Wurzel aus  $c$ , d.h.  $d_k^n = c$ . Die Zahlen  $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$  sind untereinander verschieden, aber danach wiederholen sie sich:  $d_n = d_0, d_{n+1} = d_1, \dots$

Insbesondere gibt es  $n$  verschiedene komplexe Zahlen  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ , die alle die Gleichung  $z^n = 1$  erfüllen. Eine von ihnen ist 1, alle haben den Betrag 1, d.h. sie befinden sich auf dem Einheitskreis. Sie bilden offenbar die Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Ecks. Von dieser Tatsache ist Gauß ausgegangen, als es ihm kurz vor 1800 gelang, ein regelmäßiges 17-Eck allein mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Von der Tatsache ausgehend, dass man im Bereich der komplexen Zahlen beliebige Wurzeln ziehen kann, lässt sich auch der „Fundamentalsatz der Algebra“ beweisen:

Jedes Polynom  $z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n$  mit komplexen Koeffizienten  $c_j$  hat (mindestens) eine komplexe Nullstelle. (Diesen Satz hat Gauß als erster vollständig bewiesen.)

(N.B. Dass ein Polynom vom Grad  $n$  höchstens  $n$  Nullstellen hat, ist ebenfalls ein richtiger und wichtiger – übrigens für beliebige Körper gültiger – Satz, der aber fast trivial zu beweisen ist und nicht als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet werden sollte! Wieder ein Beispiel dafür, wie unzuverlässig der ‘Brockhaus’ in Bezug auf die Mathematik ist.)

Vielleicht machen diese wenigen Beispiele schon deutlich, dass sich dem Mathematiker mit der Entdeckung/Erfindung der komplexen Zahlen ein „weites Feld“ öffnet, und er sich durch Beharren auf den reellen Zahlen viele Möglichkeiten verbauen würde. Als einzelnes Beispiel sei genannt, dass manche Sätze über die Verteilung der Primzahlen sich am besten mit Hilfe der komplexen Zahlen beweisen lassen. (Im Anhang finden Sie eine Ausführung über die komplexe  $e$ -Funktion.)

Wer nun glaubt, komplexe Zahlen seien lediglich den Mathematikern zunütze, ist auf dem Holzweg: Keine Elektrotechnik und keine Quantentheorie ohne komplexe Zahlen.

## Anhang

**Zu Tartaglias Formel:** Wenn man sie im Komplexen anwenden will, hat es mit mehrdeutigen Wurzel zu tun. Mit den Quadratwurzeln ist es einfach: Mit  $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$  sei willkürlich eine der beiden möglichen Wurzeln bezeichnet;  $-\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$  ist dann automatisch die andere. Jeder der beiden Summanden in Tartaglias Formel ist nun eine kubische Wurzel mit 3 möglichen Werten. So hat man insgesamt 9 mögliche Kombinationen. Es gibt nun eine Regel, welche 3 Kombinationen die Nullstellen des kubischen Polynoms ergeben. Hierauf will ich nicht genauer eingehen und verweise stattdessen auf das Buch „Kubische und biquadratische Gleichungen“ von Heinrich Dörrie (Leibniz Verlag München 1948).

**Die komplexe  $e$ -Funktion:** Für  $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ , setzt man  $e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ . Dies ist keineswegs willkürlich. Denn für die so definierte Funktion gilt

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (*)$$

d.h. die aus dem Reellen bekannte Potenzreihenentwicklung gilt auch im Komplexen. Ferner erhält man auch für komplexe  $z_1, z_2$  die Formel  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ . Die komplexe  $e$ -Funktion bildet die reelle Achse  $\{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b = 0\}$  (bijektiv) auf die positive reelle Halbachse und die imaginäre Achse  $\{a + bi \mid a = 0, b \in \mathbb{R}\}$  (surjektiv) auf die Einheitskreislinie  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1\}$  ab.

Wenn man den Zielbereich der Funktion  $\exp$  (mit  $\exp(z) = e^z$ ) auf  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$  einschränkt, so ist die Abbildung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  surjektiv, aber nicht injektiv. Für jedes  $z \in \mathbb{Z}$  gilt, dass die  $z + 2n\pi i$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  dasselbe Bild unter  $\exp$  haben.

Man kann die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  auch definieren, indem man zunächst die Funktion  $e^z$  auch für komplexe  $z$  durch (\*) definiert und dann

$$\sin t := (e^{ti}) \text{ und } \cos t := (e^{-ti})$$

für reelle  $t$  definiert. Um dies geometrisch interpretieren zu können, zeigt man, dass die Abbildung  $t \mapsto e^{ti}$  als Bewegung des Punktes  $e^{ti}$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  eine Kreisbewegung mit der konstanten Kreisgeschwindigkeit 1 ist.

## 19 Determinante, Volumen, Vektorprodukt

Wir legen in der Ebene einen Ursprung  $P$  fest und identifizieren die Vektoren der Ebene mit ihren Punkten auf die bekannte Weise: Einem Vektor  $v$ , der durch  $\vec{PA}$  dargestellt sei, wird der Punkt  $A$  zugeordnet. Umgekehrt wird einem Punkt  $A$  der Vektor  $\vec{PA}$  zugeordnet.

### 19.1 Determinante und das Volumen eines Parallelotops

Seien  $v_1, v_2$  Vektoren, so ist die Menge der Punkte die den Vektoren  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$  mit  $\lambda_j \in [0, 1]$  (dem Einheitsintervall) entsprechen, eine Parallelogrammfläche,

Die Größe dieser Parallelogrammfläche sei mit  $\text{Vol}(v_1, v_2)$  bezeichnet.

Sei  $(e_1, e_2)$  eine Orthonormalbasis des Vektorraumes der Ebene und  $v_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2$ .

**Proposition 19.1** *Unter den o.a. Voraussetzungen gilt*

$$\text{Vol}(v_1, v_2) = |\det(v_1, v_2)| = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right|$$

**Proof:** Wir erinnern uns an gewisse Eigenschaften der Determinante:

1.  $\det(v_1, v_2) = 0 \iff v_1, v_2$  linear abhängig. Offenbar gilt aber auch  $\text{Vol}(v_1, v_2) = 0 \iff v_1, v_2$  lin. abh.

2.  $\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab$ . Offenbar gilt aber auch  $\text{Vol}(ae_1, be_2) = |ab|$ .

3. Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn die Matrix speziell elementar umgeformt wird. D.h.  $\det(v_1, v_2) = \det(v_1 + \mu v_2, v_2) = \det(v_1, v_2 + \nu v_1)$ . Man sieht aber, dass auch  $\text{Vol}(v_1, v_2) = \text{Vol}(v_1 + \mu v_2, v_2) = \text{Vol}(v_1, v_2 + \nu v_1)$  gilt. (Eine spezielle elementare Spaltenumformung einer Matrix besteht darin, dass man eine Spalte durch Addition eines Vielfachen einer anderen Spalte verändert.)

Da man jede nichtsinguläre Matrix durch spezielle elementare Spalten-Umformungen auf Diagonalgestalt bringen kann, ist der Satz bewiesen.  $\square$

### 19.2 Im Raum gilt das Analoge:

Seien  $v_1, v_2, v_3$  Vektoren, die man sich mit Anfangspunkt  $P$  denkt, so beschreiben die Vektoren der Form  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$  mit  $\lambda_j \in [0, 1]$  einen (geometrischen) Körper, der aus einem Quader durch 'Scherung' entsteht, ein sogenanntes Spat (auch Parallelotop oder Parallelepipid). Sein Volumen sei mit  $\text{Vol}(v_1, v_2, v_3)$  bezeichnet.

Analog zum 2-dimensionalen Fall gilt:

1.  $\det(v_1, v_2, v_3) = 0 \iff v_1, v_2, v_3$  lin. abh.  $\iff \text{Vol}(v_1, v_2, v_3) = 0$ .

2.  $|\det(a_{11}e_1, a_{22}e_2, a_{33}e_3)| = |a_{11}a_{22}a_{33}| = \text{Vol}(a_{11}e_1, a_{22}e_2, a_{33}e_3)$  (Volumen eines Quaders).

3. Weder das Volumen noch die Determinante von  $(v_1, v_2, v_3)$  ändert sich bei speziellen elementaren Spalten-Umformungen.

Deshalb gilt auch im 3-dimensionalen Fall:

$$\text{Vol}(v_1, v_2, v_3) = |\det(v_1, v_2, v_3)|.$$

**Remark 19.3** Im Höherdimensionalen kann man analoge Betrachtungen anstellen.

**19.4** Der Betrag der Determinante ist also ein Volumen. Was aber bedeutet das Vorzeichen?

**ORIENTIERUNG.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum ( $n > 0$ ). Sei  $\mathcal{B}$  die Menge aller Basen von  $V$  und  $E := (e_1, \dots, e_n)$  eine von diesen.  $\mathcal{B}$  zerfällt in zwei Klassen  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$ : Die Klasse  $\mathcal{B}_1$  derjenigen Basen  $B$ , deren Übergangsmatrix von  $E$  eine positive Determinante hat und die Klasse  $\mathcal{B}_2$  derjenigen, deren Übergangsmatrix von  $E$  eine negative Determinante hat. Zwei Basen  $B, B'$  gehören genau dann zur gleichen Klasse, wenn die Übergangsmatrix von  $B$  zu  $B'$  eine positive Determinante hat.

Man kann auch – bei entsprechender Definition – zeigen, dass man Basen der gleichen Klasse ‘stetig ineinander überführen’ kann, Basen verschiedener Klassen jedoch nicht.

**Definition 19.5** *Unter einer Orientierung von  $V$  versteht man die Auswahl einer der beiden Klassen  $\mathcal{B}_1$  oder  $\mathcal{B}_2$ . In Bezug auf eine gegebene Klasse  $\mathcal{B}_i$  kann man dann von der Orientierung einer beliebigen Basis reden: positiv oder negativ.*

**Remark 19.6** Eine Orientierung wird also durch die Angabe einer Basis gegeben, da diese die Klasse bestimmt, in der sie liegt.

**19.7** Ist nun  $v_1, \dots, v_n$  ein System von Vektoren, so beschreibt  $\det(v_1, \dots, v_n)$  nicht nur das Volumen des von  $v_1, \dots, v_n$  aufgespannten Parallelotops, sondern – im Falle, dass dieses Volumen von 0 verschieden ist – die Orientierung von  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  in Bezug auf die gewählte ON-Basis  $e_1, \dots, e_n$ . Beachte dass z.B.  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  und  $(v_2, v_1, \dots, v_n)$  zwar dasselbe Parallelotop aufspannen, aber verschiedene Orientierung haben.

## 19.2 Vektorprodukt

**19.8** Im Raum sei eine Einheitslänge vorgegeben. Im zugehörigen Vektorraum  $V$  sei eine Orthonormalbasis  $e_1, e_2, e_3$  gegeben, die eine Orientierung des Raumes bestimmt. Seien  $u, v$ , ferner  $w$  Vektoren in  $V$ . Bezüglich der angegebenen Basis sei

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

**Definition 19.9** *Wir definieren das Vektorprodukt von  $u$  mit  $v$  durch*

$$[u, v] := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

**19.10** Dieses Produkt ist nicht kommutativ:  $[u, v] = -[v, u]$ . Und wir werden später sehen, dass es auch nicht assoziativ ist. Hingegen ist es bilinear, da die Determinante multilinear, also für  $n = 2$  bilinear ist. Ferner ist  $[u, v]$  genau dann 0, wenn  $u, v$  lin. unabh. ist.

Mit dem Ziel der geometrischen Deutung des Vektorprodukts machen wir folgende Rechnung:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle [u, v], w \rangle$$

Entwicklung nach der 3. Spalte.

Setzen wir  $w = u$ , bzw.  $w = v$ , so erhalten wir  $\langle [u, v], u \rangle = \langle [u, v], v \rangle = 0$ , da die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Spalten 0 ist. Das bedeutet:  $[u, v]$  steht sowohl auf  $u$  als auch auf  $v$  senkrecht.

Setzt man  $w = [u, v]$  so erhält man: Das von  $[u, v], u, v$  aufgespannte Parallelotop hat das Volumen  $\langle [u, v], [u, v] \rangle = |[u, v]|^2$ . Aus geometrischen Gründen ist dieses Volumen auch gleich

begincenter Grundfläche =

Fläche des von  $u, v$  aufgespannten Paralleogramms mal Länge von  $[u, v]$

Hieraus folgt:  $[u, v]$  ist derjenige Vektor, der senkrecht auf  $u$  und  $v$  steht, dessen Länge gleich der Fläche des von  $u, v$  aufgespannten Parallelogramm ist, und – wenn er von 0 verschieden ist – die Eigenschaft hat, dass  $[u, v], u, v$  die vorgegebene Orientierung von  $V$  liefert.

**Remark 19.11** In der Physik ist das Vektorprodukt von großer Wichtigkeit. Ist z.B.  $u$  der Geschwindigkeitsvektor eines (einfach) geladenen Teilchens, z.B. eines Elektrons,  $v$  der Feldvektor eines Magnetfeldes in dem Punkt, wo das Teilchen sich gerade aufhält, so ist  $\pm[u, v]$  (bei angepassten Maßeinheiten) die Kraft (samt Richtung), die das magnetische Feld auf das Teilchen ausübt. Das Vorzeichen richtet sich nach der Orientierung des Raumes und dem Vorzeichen der Ladung.

## 20 Kegelschnitte

**20.1 ELLIPSE.** Mittels der Methode der Dandelinschen Kugeln sieht man, dass eine Ellipse die Menge der Punkte in der Ebene ist deren Abstandssumme von zwei gegebenen Punkten, den sogenannten **Brennpunkten** eine Konstante ist.

Die Ebene sei mit einem orthonormalen Koordinatensystem versehen. Wir betrachten die beiden Punkte  $(-e, 0)$ ,  $(e, 0)$ , wo  $e > 0$  sei. Diese Punkte heißen auch die **Brennpunkte**. Die Abstandssumme jedes Ellipsenpunktes zu den beiden Brennpunkten sei  $2a$ . Da eine Ellipse nicht leer ist, muss  $a \geq e$  sein. Im Falle  $a = e$  ergibt sich als Menge die Strecke  $\overline{(-e, 0)(e, 0)}$ ; das ist auch keine Ellipse. Also ist bei einer Ellipse  $a > e$ .

Die Punkte der Ellipse auf der  $x$ -Achse sind  $(-a, 0)$  und  $(a, 0)$ . Es gibt genau zwei Ellipsenpunkte auf der  $y$ -Achse. Diese sind in Bezug auf die  $x$ -Achse symmetrisch, etwa  $(-b, 0)$ ,  $(b, 0)$  mit  $b > 0$ . Offenbar gilt  $b^2 + e^2 = a^2$ .

Die Ellipsenpunkte sind diejenigen, deren Koordinaten  $(x, y)$  die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a, \text{ d.h.}$$

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = -\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + 2a$$

Es ist  $0 \leq e < a$ . Die Ellipsenpunkte  $(x, y)$  erfüllen zudem die Bedingungen  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$ . Unter diesen Nebenbedingungen sind beide Seiten letzterer Gleichung  $\geq 0$  sind. Also ist sie unter diesen Bedingungen äquivalent zu der, wo beide Seiten quadriert sind:

$$(x-e)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+e)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

Dies ist äquivalent zu

$$4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 4a^2 + (x+e)^2 - (x-e)^2 \text{ d.h.}$$

$$a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = a^2 + ex$$

Unter obigen Nebenbedingungen sind wieder beide Seiten dieser Gleichung positiv. Also ist sie unter diesen Bedingungen äquivalent zu

$$a^2(x^2 + 2ex + e^2 + y^2) = a^4 + e^2x^2 + 2a^2ex \text{ d.h.}$$

$$a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 + e^2x^2 \text{ d.h.}$$

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

Indem man schließlich  $a^2 - e^2$  durch  $b^2$  ersetzt und durch  $a^2b^2$  dividiert, erhält man schließlich die bekannte Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (*)$$

Ein Punkt  $(x, y)$  liegt somit genau dann auf der Ellipse, wenn er die Gleichung  $(*)$  und die Bedingungen  $|x|, |y| < a$  erfüllt. Alle reellen Zahlenpaare  $(x, y)$ , die  $(*)$  (mit  $0 < b < a$ ) erfüllen, erfüllen aber auch die Ungleichungen  $|x|, |y| < a$ . Also beschreibt bereits die Gleichung  $(*)$  die Ellipse.

Wenn man die Gleichung  $(*)$  in der Form

$$x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2 = a^2$$

schreibt, sieht man, dass die Ellipse aus einem Kreis mit Radius  $a$  durch Stauchung mit dem Faktor  $b/a$  in  $y$ -Richtung hervorgeht.

**20.2 HYPERBEL.** Mittels der Methode der Dandelinschen Kugeln sieht man, dass eine Hyperbel die Menge der Punkte in der Ebene ist deren Abstandsdifferenz von zwei gegebenen Punkten, den **Brennpunkten**, dem Betrage nach eine Konstante ist.

Die Ebene sei mit einem orthonormalen Koordinatensystem versehen, wobei  $(-e, 0)$ ,  $(e, 0)$  mit  $e > 0$  die beiden Brennpunkte seien. Die Abstandsdifferenz sei betragsmäßig gleich  $2a$ . Da eine Hyperbel nicht leer ist, muss  $a \leq e$  sein. Im Falle  $a = e$  ergibt sich als Menge die Vereinigung zweier Strahlen  $\{(x, 0) \mid |x| \geq e\}$ , auch keine Hyperbel. Also ist bei einer Hyperbel  $a < e$ .

Die Punkte der Hyperbel auf der  $x$ -Achse sind  $(-a, 0)$  und  $(a, 0)$ . Wir setzen  $b := \sqrt{e^2 - a^2}$ .

Die Punkte des 'linken' Hyperbelastes ( $x < 0$ ) sind diejenigen, deren Koordinaten  $(x, y)$  die folgende Gleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2} &= 2a, \text{ d.h.} \\ \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + 2a \end{aligned}$$

(Wenn man in dieser Gleichung  $e$  mit  $-e$  vertauscht, beschreibt sie die Punkte des rechten Hyperbelastes.) da beide Seiten dieser Gleichung  $\geq 0$  sind, ist sie äquivalent zu der, wo beide Seiten quadriert sind:

$$(x-e)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+e)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

Diese ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} &= (x-e)^2 - (x+e)^2 - 4a^2 \text{ d.h.} \\ a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} &= -a^2 - ex \quad (**) \end{aligned}$$

Wieder kann man neben o.a. Gleichung noch Nebenbedingungen angeben: Für die Punkte  $(x, y)$  auf dem linken Hyperbelast gilt  $x \leq -a$ , also die rechte Seite nichtnegativ. Die linke Seite ist ohnehin positiv. Somit ist die letzte Gleichung für Punkte auf dem linken Hyperbelast äquivalent zur folgenden.

$$\begin{aligned} a^2(x^2 + 2ex + e^2 + y^2) &= a^4 + e^2x^2 + 2a^2ex \text{ d.h.} \\ a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2 &= a^4 + e^2x^2 \text{ d.h.} \\ (e^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(e^2 - a^2) \end{aligned}$$

Indem man schließlich  $e^2 - a^2$  durch  $b^2$  ersetzt und durch  $a^2b^2$  dividiert, erhält man schließlich die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zusammen mit der Nebenbedingung  $x \leq -a$  für den linken Hyperbelast. Für den rechten Hyperbelast muss man  $e$  überall durch  $-e$  ersetzen und hat die Nebenbedingung  $x \geq a$ . Die rechte Seite von  $(**)$  ist dann  $-a^2 + ex$ . Dies ist positiv für  $x \geq a$ . Also ergibt sich für den rechten Hyperbelast dieselbe Gleichung, da  $(-e)^2 = e^2$  ist, aber mit der Nebenbedingung  $x \geq a$ . Aus der Gleichung folgt  $x^2 \geq a^2$ , d.h.  $x \leq -a$  oder  $\geq a$ . Somit beschreibt die Gleichung die Vereinigung beider Äste der Hyperbel.

**20.3 PARABEL.** Mit der Methode der Dandelinschen Kugeln sieht man, dass eine Parabel die Menge der Punkte  $(x, y)$  die von einer Geraden (**Leitgerade**) und einem Punkt (**Brennpunkt**) denselben Abstand haben. Sei  $d > 0$  und  $x = -d$  die Leitgerade und  $(d, 0)$  der Brennpunkt.

Die Parabel mit dieser Leitgeraden und diesem Brennpunkt wird dann durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = x + d$$

Für Punkt auf der Parabel gilt die Zusatzbedingung  $x \geq 0$ . Setzen wir diese voraus, so sind beide Seiten dieser Gleichung positiv, und deshalb ist sie äquivalent zu

$$\begin{aligned} (x-d)^2 + y^2 &= (x+d)^2 \text{ d.h. } x^2 - 2dx + d^2 + y^2 = x^2 + 2dx + d^2 \text{ d.h.} \\ y^2 &= 4dx . \end{aligned}$$

Alle reellen  $(x, y)$ , die dieser Gleichung genügen, erfüllen die Zusatzbedingung. Also kann man sie weglassen.

## 21 Quaternionen

21.1 Sei

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$$

Man überlegt sich leicht:

- a)  $\mathbb{H}$  ist ein *nicht kommutativer* Unterring von  $M_2(\mathbb{C})$ .
- b) Für  $\alpha \in \mathbb{H}$  ist  $\det(\alpha) \geq 0$ .
- c) Gilt  $\alpha \in \mathbb{H} - \{0\}$ , so ist  $\det(\alpha) > 0$  und  $\alpha$  in  $\mathbb{H}$  invertierbar.

$\mathbb{H}$  ist ein sogenannter **Schiefkörper**, da in ihm alle Körperaxiome bis auf die Kommutativität der Multiplikation erfüllt sind. Er wird der **Quaternionenschiefkörper** genannt. Ein Element von  $\mathbb{H}$  heißt eine **Quaternion**.

21.2  $\mathbb{H}$  ist auf kanonische Weise ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Basis besteht aus folgenden 4 Elementen:

$$E := 1_2, \quad I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Man rechnet:  $I^2 = J^2 = K^2 = -E$ ,  $IJ = -JI = K$ ,  $JK = -KJ = I$ ,  $KI = -IK = J$ . Man hat einen injektiven Ringhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  vermöge  $a \mapsto aE$ . Wir fassen auf diese Weise  $\mathbb{R}$  als Teil(schief)körper von  $\mathbb{H}$  auf. Alle Elemente von  $\mathbb{R}$  sind mit jeder Quaternion vertauschbar.

Jede Quaternion lässt sich dann so schreiben:

$$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$$

wobei wir noch  $i, j, k$  anstelle von  $I, J, K$  geschrieben haben. Das war oben noch schlecht möglich. Wir definieren Real- und Imaginärteil von  $q$  durch

$$\operatorname{Re}(q) := a_0 \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(q) := (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

Ferner das Konjugierte und den Betrag:

$$\bar{q} := a_0 - a_1i - a_2j - a_3k, \quad |q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Natürlich ist  $\overline{q+r} = \bar{q} + \bar{r}$ . Für das Konjugierte eines Produktes erhält man (**Achtung!**)  $\overline{qr} = \bar{r}\bar{q}$ . Dies sieht man auch, wenn man bemerkt, dass das Konjugierte von  $q$ , wenn man  $q$  – wie oben – als Matrix auffasst, die konjugierte transponierte Matrix bedeutet.

Es folgt  $|qr| = \sqrt{qr\bar{q}\bar{r}} = \sqrt{qr\bar{r}\bar{q}} = \sqrt{q\bar{q}r\bar{r}} = |q||r|$ , da  $r\bar{r} \in \mathbb{R}$  und deshalb mit jeder Quaternion vertauschbar ist. (Wenn man  $q$  – wie oben – als Matrix  $Q$  auffasst, gilt  $|q|^2 = \det(Q)$ .)

Für das multiplikativ Inverse von  $q$  gilt offenbar  $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$ .

21.3 Seien  $q = a_1i + a_2j + a_3k$  und  $r = b_1i + b_2j + b_3k$  zwei „rein imaginäre“ Quaternionen, so errechnet man als ihr Produkt:

$$qr = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

Also ist

$$\operatorname{Re}(qr) = -\langle \operatorname{Im}(q), \operatorname{Im}(r) \rangle \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(qr) = [\operatorname{Im}(q), \operatorname{Im}(r)]$$

wo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Skalar- und  $[\cdot, \cdot]$  das Vektorprodukt im  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet. (Man erinnere sich, dass  $\operatorname{Im}(q) = (a_1, a_2, a_3)$  ist.)

**21.4** Wir suchen nach den Lösungen der Gleichung  $X^2 = -1$  in  $\mathbb{H}$ . Schreibe  $q = a_0 + q'$  mit  $a_0 = \operatorname{Re}(q)$ . Dann ist  $q^2 = a_0^2 - |q'|^2 + 2a_0q'$  (nach 2.3 und wegen  $a_0q' = q'a_0$ ). Ist nun  $q^2 = -1$ , so folgt  $a_0^2 - |q'|^2 = -1$  und  $a_0q' = 0$ . Also muss  $q' \neq 0$  sein, da  $a_0^2 \geq 0$ . Somit ist aber  $a_0 = 0$  und mithin  $|q'|^2 = 1$ . Da die Bedingungen  $a_0 = 0, |q'| = 1$  auch hinreichend sind, gilt:

**Proposition 21.5** *Die Nullstellen von  $X^2 + 1$  in  $\mathbb{H}$  sind die rein imaginären  $q$  vom Betrag 1. Diese entsprechen den Punkten auf der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$  (der rein imaginären Quaternionen).*

**21.6** Zu jeder rein imaginären Quaternion  $q$  vom Betrag 1 gibt es einen injektiven Schiefkörper-Homomorphismus

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}, \quad a + bi \mapsto a + bq, \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(Wenn man von einer solchen Einbettung verlangt, dass sie  $\mathbb{R}$ -linear oder zumindest stetig sei, so sind die angegebenen Homomorphismen auch die einzigen.)

Das Bild der o.a. Einbettung ist der von 1 und  $q$  erzeugte 2-dimensionale  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von  $\mathbb{H}$ . Dieser sei mit  $C_q$  bezeichnet.  $\mathbb{H}$  ist die Vereinigung aller dieser zu  $\mathbb{C}$  isomorphen Teilkörper.

Jede nicht reelle Quaternion liegt in genau einem solche Teilraum. Ist nämlich  $q = a_0 + q'$  mit  $a_0 = \operatorname{Re}(q)$ , so liegt  $q$  in dem von 1 und  $|q'|^{-1}q'$  aufgespannten reellen Teilraum. Die Potenzen von  $q$  liegen dann in demselben Teilraum, da dieser ein Teilkörper ist.

Wir suchen noch nach den Lösungen der Gleichung  $X^2 = p$  mit einem beliebigen  $p \in \mathbb{H}$ . Ist  $p = 0$ , hat man nur eine Lösung, nämlich 0.

Ist  $p$  eine reelle positive Zahl, so gibt es in jedem der genannten zu  $\mathbb{C}$  isomorphen Teilkörper  $C_q$  – d.h. aber in ganz  $\mathbb{H}$  – nur die beiden Lösungen  $\pm\sqrt{p} \in \mathbb{R}$ .

Ist  $p$  eine nicht reelle Quaternion, so liegt  $p$  in genau einem der  $C_q$  und die Gleichung  $X^2 = p$  hat nur in diesem Lösungen, und zwar genau zwei.

Ist aber  $p = -r$  reell und negativ, so hat die Gleichung in jedem der komplexen Teilkörper  $C_q$  zwei Lösungen, nämlich  $\pm\sqrt{r}q$ . Also hat  $X^2 = p$  für negative reelle  $p$  in  $\mathbb{H}$  unendlich viele Lösungen, ein gerechter Ausgleich dafür, dass sie in  $\mathbb{R}$  überhaupt keine Lösung hat.

**21.7** Ebenso sieht man leicht Folgendes: Die Gleichung  $X^n = p$  hat für  $n > 2$  unendlich viele Lösungen, wenn  $p$  reell  $\neq 0$  ist, und genau  $n$  Lösungen, wenn  $p$  nicht reell ist.

**21.8** Die Elemente

$$\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \in \mathbb{H}$$

bilden eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe von  $\mathbb{H}$ , die sogenannte Quaternionengruppe, die folgende Besonderheit hat: Sie ist nicht kommutativ, aber ihre sämtlichen Untergruppen sind Normalteiler.

**21.9** Man kann die Quaternionen benutzen, um eine Identität für das Vektorprodukt zu beweisen.

Sei  $A$  ein *nicht notwendig kommutativer* (aber assoziativer) Ring. Für  $a, b \in A$  definieren wir  $[a, b] := ab - ba$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = \\ & (ab - ba)c + c(ba - ab) + (bc - cb)a + a(cb - bc) + (ca - ac)b + b(ac - ca) = 0 \end{aligned}$$

Ist nun  $2 = 1 + 1$  in  $A$  invertierbar und definieren wir – leicht modifiziert –  $[a, b] := 2^{-1}(ab - ba)$ , so gilt natürlich die gleiche Identität.

Wir wenden dies auf rein imaginäre Quaternionen an, die ja in eindeutiger Korrespondenz zu den Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  stehen. Für solche  $q, r$  gilt:  $qr$  und  $rq$  haben denselben Realteil, aber additiv inverse Imaginärteile, nämlich die Vektorprodukte  $[\operatorname{Im}(q), \operatorname{Im}(r)]$ , bzw.  $[\operatorname{Im}(r), \operatorname{Im}(q)] = -[\operatorname{Im}(q), \operatorname{Im}(r)]$ . Es gilt also  $\operatorname{Re}(2^{-1}(qr - rq)) = 0$  und  $\operatorname{Im}(2^{-1}(qr - rq)) = [\operatorname{Im}(q), \operatorname{Im}(r)]$ . Somit erhält man für das Vektorprodukt  $[\cdot, \cdot]$  und Vektoren  $u, v, w$  im  $\mathbb{R}^3$  die sogenannte Jacobi-Identität:

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$$

## 22 Fragen zur Vorbereitung auf die Klausur

1. Wie kommen die Jahreszeiten, die Mondphasen, sowie Sonnen- und Mondfinsternisse zustande?
2. Was ist die Idee der Dedekindschen Schnitte?
3. Welche Kongruenzsätze gibt es? In welchem Fall muss eine Zusatzbedingung erfüllt sein?
4. Welche Winkelsumme hat ein überschneidungsfreies  $n$ -Eck?
5. Welche merkwürdigen Punkte des Dreiecks kennen Sie?
6. Welches Paar von Dreiecken wird in den Beweisen für 1. den Satz über den Schnittpunkt der Höhen, 2. den Satz über die Eulergerade, 3. den Satz über den Feuerbachkreis betrachtet?
7. Welche von diesen liegen immer auf der Eulergeraden eines nicht gleichseitigen Dreiecks?
8. Welche 9 Punkte liegen auf dem Feuerbachkreis?
9. Wo liegt der Mittelpunkt des Feuerbachkreises? (Er ist der Mittelpunkt einer gewissen Strecke.)
10. Wie lauten Sinus- und Cosinussatz für ein Dreieck?
11. Gegeben seien drei geeignete Grund-Größen (Winkel, Seitenlängen) eines Dreiecks. Wie kann man mit Hilfe des Sinus- oder Cosinus-Satzes die anderen bestimmen?
12. Welche Werte haben Sinus und Cosinus folgender Winkel:  $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ ?
13. Sei  $x$  einer der o.a. Winkel. Können Sie auch  $\sin(x + k\pi/2)$  und  $\cos(x + k\pi/2)$  für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  bestimmen?
14. Das Entsprechende für den Tangens!
15. Wie lauten die Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus?
16. Leiten Sie aus diesen das Additionstheorem des Tangens ab. (Es ergibt sich ein rationaler Ausdruck in  $\tan \alpha, \tan \beta$ .)
17. Wie sind  $\arcsin, \arccos, \arctan$  definiert?
18. Bestimmen Sie den Arcus-Sinus, und den Arcus-Cosinus folgender Zahlen, sowohl im Bogenmaß als auch im Gradmaß:  $0, \pm(1/2), \pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{3}/2$ .
19. Können Sie analog zur letzten Aufgabe den Arcus-Tangens für gewisse Zahlen leicht angeben?
20. Geben Sie drei charakteristische Unterschiede zwischen dem Vektorprodukt und dem Skalarprodukt zweier Raumvektoren an! Welche Eigenschaft haben sie gemeinsam?
21. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen dem Cosinussatz, dem Satz des Pythagoras und dem Skalarprodukt?
22. Wie groß sind das Volumen und die Oberfläche einer Kugel vom Radius  $r$ ?
23. Sei  $z \in \mathbb{C}^*$  als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene gegeben. Konstruieren Sie geometrisch den Punkt  $z^{-1}$ .
24. Bestimmen Sie die komplexen Nullstellen des Polynoms  $z^{10} - i$  mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen von Winkeln im Gradmaß.