Geometrie

WS 2010/11

1 Vorbemerkungen

Wahrscheinlich hätte ich nie Mathematik studiert, wenn es die Geometrie auf der Schule nicht gegeben hätte. An ihr habe ich gelernt, was ein Beweis ist. Es war einfach beeindruckend, dass man geometrische Aussagen, die keineswegs auf der Hand liegen, wie z.B. den Satz des Pythagoras aus „offensichtlichen“ Aussagen, wie den Kongruenzsätzen streng ableiten kann.

Hingegen hätte es mich kaum vom Hocker gerissen, letztere aus einer abstrakten Axiomatik abzuleiten.

Erst als ich studierte, hat mich folgende Frage interessiert:

1.1 Axiomatik. Ist es möglich, „die“ Geometrie, axiomatisch zu begründen? D.h.: Kann man mit *undefinierten* Grundbegriffen „Punkt“, „Gerade“ („Ebene“) und gewissen, ebenfalls undefinierten – Relationen, etwa der „Inzidenz“ („Punkt A liegt auf Gerade g“) und einem System von „Axiomen“ beginnend, alle Sätze rein logisch ableitend gewinnen, ohne hier und dort eine „anschauliche Selbstverständlichkeit“ zu benutzen? Kann man also statt der Worte „Ebene, Gerade, Punkt“ die Worte „Tisch, Stuhl, Bierseidel“ verwenden? Hilbert hat um 1900 gezeigt, dass die prinzipiell möglich ist. Ein modernes Lehrbuch, das nach dieser Methode vorgeht, ist [Kunz]. Euklid hat dies 2250 Jahre zuvor nur unvollkommen geschafft, aber vielleicht auch gar nicht angestrebt.

Möglicherweise hat Euklid seine „axiomatische Methode“ anders verstanden. In dem Buch „Elementargeometrie“ von Paul Lorenzen wird gezeigt, wie man, ausgehend von einer gewissen philosophischen Grundhaltung, der „konstruktiven“ Herangehensweise, Geometrie präzise ohne Axiomatisierung betreiben kann. Dieses Buch ist im euklidischen Geiste geschrieben. Es ist sehr interessant. Allerdings scheint es mir nicht möglich, es direkt als Schulbuch zu gebrauchen, obwohl sein Verfasser dies glaubt. Ich will nicht verschweigen, dass ich auch mit dem Buch von Lorenzen so meine Schwierigkeiten habe. Keineswegs würde ich z.B. Hilberts „Grundlagen“ für ein „Zerrbild“ der Geometrie halten. Zudem werde ich das Gefühl nicht los, dass das Wort „Konstruktion“ für Lorenzen einfach als Wort, und nicht wegen der Sache für die es jeweils steht, einen Heiligenschein trägt. Für mich scheint das Wort „konstruktiv“ in dem Lorenzenschen „konstruktiven Aufbau der Aritmetik“ (den ich für viel besser halte als die Axiomatik nach Peano) etwas sehr viel anderes zu bedeuten als in geometrischen „Konstruktionen“.

Eine axiomatische Vorgehensweise im Sinne Hilberts ist in der 5., 6. Klasse (wohl überhaupt auf dem Gymnasium) wenig sinnvoll. Die Kinder müssten in einem Beweis von der anschaulichen Bedeutung von Punkten und Geraden abstrahieren. Ein solchens Vorgehen wäre auf der einen Seite eine Überforderung für die meisten Kinder und ließe auf der anderen Seite wahrscheinlich nur die Behandlung der simpelsten anschaulich fast „selbstverständlichen“ Sätze zu.

1.2 Wenn man mit Kreide einen Punkt auf die Tafel malt und betrachtet ihn anschließend mit einer Lupe, so sieht man keineswegs einen Punkt. Entsprechendes gilt für eine Gerade. Und die Tafelebene ist unter einem Mikroskop ein bizarres Gebirge.

Punkte, Geraden, Ebenen sind „ideale Gegenstände“, die durch Zeichnungen nur unvollkommen widergegeben werden. Sie sind allerdings keine subjektiven Phantastereien. Über diese Dinge lässt sich trefflich philosophieren.

Didaktisch scheint mir aber darin kein Problem zu liegen. Kinder gehen im Allgemeinen mit Punkten und (geraden) Strecken unbefangen richtig um und denken selten darüber nach, inwiefern das Papierblatt oder die Tafel, worauf sie zeichnen, ein Stück einer Ebene darstellt. Eine Gerade als eine ins „unendliche fortgesetzte“ Strecke zu begreifen macht ihnen etwas mehr Schwierigkeiten. Es genügt allerdings, sie im Laufe des Umgehens mit Geraden immer wieder geduldig darauf hinzuweisen. (Überhaupt ist Geduld eine der pädagogischen Haupttugenden!)

1.3 Abschweifung: Wenn nun Zeichnungen prinzipiell unvollkommen sind, soll man daraus schließen, es käme auf die Qualität ihrer Ausführung nicht an? Ich denke: Nein. Sorgfältiges Zeichnen hilft, Fehlschlüsse zu vermeiden. Außerdem schult es Auge und Hand, auch die Anschauung, und somit Fähigkeiten, die jedem Menschen, nicht nur Mathematikern zugute kommen.

Aufgabe der Lehrperson ist es, statt (nur) zu kritisieren, geduldig zu helfen. Anzustreben ist eine gelassene Sorgfalt, keine verkrampfte Pedanterie. Dies zu lehren, erscheint mir eher schwierig. (Ich weiß nicht, ob ich das könnte.) Es erscheint mir aber ein zentraler Punkt jeglicher Erziehung – und Selbsterziehung.

Wenn ein mathematisch uninteressiertes, aber zeichnerisch begabtes Kind durch das saubere Zeichnen geometrischer Figuren zu einer gewissen Freude an der Geometrie gelangt, ist das ein Gewinn. Natürlich ist es aber strengstens verboten, ein mathematisch begabtes, aber im Zeichnen ungeschicktes Kind durch übertriebenes Betonen des Wertes einer sauberen Zeichnung auch nur im Mindesten von der Mathematik abzuschrecken!

1.4 Parallelenaxiom. Im Geometrieunterricht wird ganz selbstverständlich „dieselbe“ Figur wie im Heft mit (etwa) der zehnfachen Vergrößerung an die Tafel gezeichnet. Und wir glauben, dass dabei geometrisch dasselbe passiert, dass z.B. sich zwei auf dieselbe Weise konstruierten Geraden sich in der Heftebene genau dann schneiden, wenn sie es in der Tafelebene tun. Das heißt aber, dass unserer Anschauung nach die Geometrie euklidisch ist, d.h. das Parallelenaxiom gilt; oder dass die Winkelsumme im Dreieck 2 Rechte (180^o) ist; oder dass ... .

Lorenzen begründet die Euklidizität der Geometrie wie folgt: Die Geometrie ist die Lehre von den geometrischen Konstruktionen. Wenn zwei Geometer unabhängig voneinander je 2 Punkte auf ihrem Blatt wählen (deren jeweilige Abstände nicht verglichen werden, also verschieden sein dürfen) und von ihnen ausgehend je eine geometrische Figur nach derselben Vorschrift konstruieren, muss dasselbe herauskommen, also z.B., wenn zwei Geraden sich bei dem einen Geometer schneiden, müssen die entsprechenden Geraden sich auch bei dem anderen schneiden. Sonst hat einer fehlerhaft gezeichnet. Dies bedeutet aber, dass die Geometrie euklidisch ist. Dazu muss man sagen, dass Lorenzen eine vorphysikalische Geometrie anstrebt, da eine Vermischung von Geometrie mit der Physik zu Zirkelschlüssen führt oder zumindest führen kann. (Bevor man Längen misst, sollte man wissen, was man darunter versteht!?!?)

Die euklidische Geometrie widerspricht auch (zumindest bis heute) **nicht** der physikalischen Erfahrung, es sei denn, man definierte eine Gerade als den Weg eines Photons.

Auf dem Gymnasium muss man natürlich mit der euklidischen Geometrie beginnen und kann allenfalls in der Oberstufe auf nichteuklidische Geometrien eingehen.

1.5 Die Geometrie ist aufs Engste mit den Zahlen verbunden. Zunächst kann man aus einer gegebenen Strecke ihr n-faches für jede natürliche Zahl n konstruieren. Da man aber keine Elementar-Länge kennt, derart, dass jede Strecke (bis auf „Kongruenz“) ein natürliches Vielfaches einer (sehr kleinen) Einheitsstrecke wäre, kommt man mit den natürlichen Zahlen zur Beschreibung von Streckenlängen nicht aus. (Natürlich darf man nicht ausschließen, dass es – physikalisch gesehen – Elementarlängen geben könnte.)

Jede Streckenlänge kann aber durch ein (nichtnegatives) rationales Vielfaches einer Längeneinheit beliebig genau beschrieben werden. Der Praktiker wird sich damit begnügen. Je nach Präzisionsanforderung reicht ihm zum Beispiel bei einem Bau die Genauigkeit bis auf einen cm. D.h. er kann mit Brüchen deren Nenner 100 ist, die Längen in einem Haus bezüglich der Maßeinheit Meter hinreichend genau beschreiben.

Aber die Theoretiker wissen seit etwa 2500 Jahren, dass die Länge der Diagonale in einem Quadrat, dessen Seitenlänge 1 Einheit ist, kein rationales Vielfaches der Einheit ist. Wir Mathematiker dürfen uns nicht mit dem genannten praktischen Standpunkt zufrieden geben. Wer, wenn nicht wir sind schließlich für derlei theoretische Aspekte zuständig. (Analog dazu: Natürlich braucht nicht jeder Abiturient Latein zu können. Aber es wäre doch eine Verarmung unserer Gesellschaft, wenn keiner mehr etwas vom Lateinischen wüsste.)

1.6 Auch wenn man in der Schule einen axiomatischen Aufbau der Geometrie nicht vornehmen kann, sollte ein zukünftiger Lehrer zumindest wissen, dass es einen solchen gibt, und auf Schülerfragen auch Literatur dazu angeben können.

Es gibt aber noch einen weiteren möglichen Aufbau der Geometrie, bei dem man alle Argumente in den Beweisen anschauungsfrei durchführen kann. Man identifiziert den Raum mit dem $\mathbb{R}^3$, definiert Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen (oder durch Gleichungssysteme), den Abstand der Punkte $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ durch $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ und Winkel mit Hilfe des Skalarproduktes und des Arcuscosinus. Für dieses gibt es eine anschauliche Motivation. Anschließend befindet man sich auf sicherem Boden.

Dies macht man im Allgemeinen auf der Uni so. Insbesondere habe ich manchmal in der räumlichen Geometrie den Wunsch nach dieser Art Präzision.

2 Strecken und Winkel

2.1 Strecken sind einfacher zu verstehen als Geraden. Im Grunde kann man keine Gerade zeichnen, immer nur Strecken. (Hier sei das grundsätzliche Problem ausgeblendet, dass jede gezeichnete Strecke immer zu breit ist.)

Vielleicht sollte man auch mit dem Begriff der Strecke anfangen und **Geraden** als das definieren, was herauskommt, wenn man Strecken in beiden Richtungen unbegrenzt verlängert. (Das ist natürlich auch nur gedanklich m“glich, indem man Begrenzungen unbeachtet lässt.)

Wichtig sind auch die **Strahlen**, auch als **Halbgerade** bezeichnet, die jeweils einen **Anfangspunkt** (den man auch **Endpunkt** nennen darf) haben und in eine Richtung unbegrenzt sind.

Die **Länge** einer Strecke kann man messen. Das ist den Kindern bekannt.

Auf einem Strahl kann man von dem Anfangspunkt aus eine Strecke beliebiger Länge aus abtragen.

Es ist interessant, dass Euklid hierfür eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal angibt, die nur solche Kreise zu zeichnen erlaubt, von denen der Mittelpunkt und ein Randpunkt gegeben ist. Die Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, von dem der Mittelpunkt und an einer anderen Stelle der Ebene der Radius durch eine Strecke gegeben ist, kann Euklid auf die vorgenannte Aufgabe zurückführen. In Lorenzens Buch wird eine Konstruktion angegeben, die aus mehreren „Klappungen“ (Spiegelungen) um Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende besteht.

Was steckt dahinter? L. will eine von Experimenten unabhängige Definition von Streckenlänge geben.

Es spricht nichts dagegen, dass man es im S1-Unterricht mit dem Maßstab auf dem Lineal macht. Dass dies überhaupt geht, ist eine Erfahrungstatsache, die für Lineale, die von hier bis zum Mond reichen, oder solche, die von hier bis zum Mond transportiert wurden, vielleicht nicht erfüllt ist.

2.2 Als Kind wird man sich vielleicht damit begnügen, Strecken auf den Millimeter genau zu messen. Aber das reicht natürlich nicht aus. Für den Naturwissenschaftler nicht, der viel kleinere Abstände messen will. Für den Mathematiker sicher auch nicht, der z.B. wissen will, wie lang eine Strecke ist, die auf das dreifache verlängert eine Strecke von 5cm ergibt.

Wenn man also die Länge einer Strecke als das a-fache einer vorher gewählten Stecke (etwa 1cm) angeben will, benötigt man zumindest die (nichtnegativen) rationalen Zahlen. Aber bekanntlich reichen diese nicht aus. Denn schon die Länge der Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 cm bzw. inch ist $\sqrt{2}$ cm bzw. inch lang. Man weiß aber, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

M.E. ist die Motivation, über die rationalen Zahlen hinauszugehen, stärker durch die Geometrie als durch die Arithmetik gegeben. Ich persönlich könnte eher darauf verzichten, die Existenz einer Zahl zu fordern, deren Quadrat 2 ist, als der Diagonale eines Einheitsquadrats ein Maß zuzuschreiben.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, reelle Zahlen einzuführen. Wir behandeln sie in dieser Vorlesung als sog. Dedekindsche Schnitte. Wir wollen exmplarisch $\sqrt{2}$ als solchen beschreiben. Wenn es auch keine rationale Zahl α mit $\alpha^2 = 2$ gibt, so kann man doch für jede nichtnegative rationale Zahl α leicht nachprüfen, ob $\alpha^2 < 2$ oder ob $\alpha^2 > 2$ ist. Die Menge $\mathbb{Q}_+$ der nichtnegativen rationalen Zahlen zerfällt also in die beiden Mengen A, B, wobei $A := \{\alpha \in \mathbb{Q}_+ \mid \alpha^2 < 2\}$ und $B := \{\alpha \in \mathbb{Q}_+ \mid \alpha^2 > 2\}$ ist. Für diese beiden Mengen zeigt man leicht:

$$(1) A \cup B = \mathbb{Q}_+$$

$$(2) a \in A, b \in B \Longrightarrow a < b$$

$$(3) B \neq \emptyset$$

$$(4)\ B \text{ besitzt (in } \mathbb{Q}) \text{ kein kleinstes Element.}$$

Ein Paar von Mengen, das obige vier Eigenschaften hat, heißt ein Dedekindscher Schnitt. Jeden solchen betrachtet man als reelle Zahl. Der speziell hier angegebene Dedekindsche Schnitt **ist** eben die reelle Zahl $\sqrt{2}$. Zwei Dedekindsche Schnitte A, B und A', B' bezeichnen definitionsgemäß genau dann dieselbe reelle Zahl, wenn $A = A'$ und $B = B'$ ist.

Remarks 2.3 a) In der Geometrie liegt es nahe, zunächst nur nichtnegative ganze, rationale und reelle Zahlen einzuführen. (Auch im Schulunterricht geht man häufig so vor. Zumindest führt man in der Regel die nichtnegativen rationalen Zahlen vor den negativen ganzen Zahlen ein.) Die Einführung von Koordinaten erzwingt dann die Einführung der negativen Zahlen.

Man kann natürlich Dedekindsche Schnitte auch für ganz $\mathbb{Q}$ betrachten. Als erste Eigenschaft fordert man dann $A \cup B = \mathbb{Q}$, zusätzlich zur dritten muss man dann noch $A \neq \emptyset$ fordern.

b) Die Unsymmetrie der letzten Eigenschaft aus Abschnitt 2.2 liegt an folgendem. Man möchte die rationalen Zahlen auch als Dedekindsche Schnitte, also als reelle Zahlen auffassen. Der Dedekindsche Schnitt, der die rationale Zahl $\alpha \geq 0$ beschreibt, ist durch $A = \{a \in \mathbb{Q}_+ \mid a \leq \alpha\}$ und $B = \{b \in \mathbb{Q}_+ \mid b > \alpha\}$ gegeben.

Beschreibt man $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ durch das Mengenpaar (A', B') mit
$A = \{a \in \mathbb{Q}_+ \mid a < \alpha\}$ und $B = \{a \in \mathbb{Q}_+ \mid a \geq \alpha\}$,
so gilt statt der letzten Eigenschaft die Eigenschaft:

$$A \text{ besitzt kein größtes Element.}$$

Wenn man die letzte Forderung ganz fallen lässt, wird jede rationale Zahl durch zwei Mengenpaare gegeben.

c) Es gibt noch andere Möglichkeiten, reelle Zahlen einzuführen, die alle ihre Vor- und Nachteile haben. Zur Definition der Dedekindschen Schnitte braucht man keinen Grenzwertbegriff. Man kann sie vielleicht in einem Leistungskurs erwähnen. Immerhin!

Wie man mit Dedekindschen Schnitten rechnet, wird später in der Vorlesung angegeben.

2.4 Mögliche Aufgaben für Schulkinder: Die Längen gewisser Strecken messen, z.B. Länge und Breite einer Heftseite, eines Schreibblattes. Zwei DIN A5-Blätter bedecken genau ein DIN A4-Blatt. Die Länge (bzw. Breite) eines A5-Blattes ist die Breite (bzw. halbe Länge) eines A4-Blattes.

(Nach Einführung der Wurzelrechnung kann man die Aufgabe stellen: Wie ist das Seitenverhältnis beim DIN An-Format – wenn es für alle n dasselbe sein soll?)

2.5 Kreis. Welche Figur beschreibt die Punkte, die von einem gegebenen Punkt A alle denselben Abstand r haben? Wie, mit welchen Hilfsmitteln kann man diese Figur konstruieren? Man stelle diese Frage den Kindern, ehe man den Zirkel als praktisches Instrument erläutert.

Dann kann man die Frage stellen, wie man zeichnerisch die Punkte findet, die vom Punkt A den Abstand b und vom Punkt B den Abstand a haben sollen.

Sei c der Abstand von A und B. Für welche a, b gibt es solche Punkte? Denken Sie genau darüber nach, ehe Sie diese Frage an die Schulkinder stellen. Die Ungleichung $a \geq c - b$ reicht nicht!

Dass es höchstens 2 derartige Punkte (und im Fall $c - b < a < c + b$ genau 2 solche) gibt, ist anschaulich klar, wird aber bei Euklid *bewiesen.* (In der „analytischen Geometrie“ lässt es sich leicht mit algebraischen Mitteln zeigen.)

Dies bedeutet den bekannten Kongruenzsatz, dass ein Dreieck „bis auf Kongruenz“ bereits eindeutig durch die Längen der drei Seiten gegeben ist.

Dies hat auch mechanische Bedeutung: Wenn man drei Holzlatten an den Enden drehbar zusammenfügt, so entsteht ein starres Lattendreieck. Vielleicht sollte man an Stelle des euklidischen Beweises diesen mechanischen Beweis im Schulunterricht bringen. Das ist natürlich philosophisch fragwürdig.

Macht man dasselbe mit 4 Latten, so sieht man, dass für Vierecke ein entsprechender Satz nicht gilt!

2.6 Winkelmessung. Diese ist ziemlich subtil. Bei zwei sich schneidenden Geraden treten 2 Winkel auf, die sich zu einem **gestreckten Winkel** ergänzen. Man könnte etwa als Schnittwinkel den kleineren der beiden definieren. Das würde allerdings zu folgendem Phänomen führen: Dreht man eine der Geraden gegenüber der anderen, so wächst zunächst der Winkel, um dann wieder kleiner zu werden – oder umgekehrt.

Deshalb definiere man Winkel zwischen zwei Strahlen (Halbgeraden) mit gemeinsamem Endpunkt. Auch hier hat man zunächst zwei Winkel, die sich zu einem **Vollwinkel** ergänzen. Deshalb sollte man (wie im [L-S]) einen Winkel zu einem Paar von Strahlen mit gemeinsamem Endpunkt definieren – wo ja einer der beiden Strahlen als erster ausgezeichnet ist.

Von dem ersten Strahl aus misst man den Winkel gegen den Uhrzeigersinn zum zweiten Strahl. Bei Übereinstimmung der beiden Strahlen hat man allerdings die Wahl zwischen einem Nullwinkel und einem Vollwinkel. Dass man gegen den Uhrzeigersinn wandert, ist lediglich eine Konvention und nicht denknotwendig.

(Übrigens setzt das Reden vom Uhrzeigersinn voraus, das man von einer festgelegten Seite auf die Ebene sieht. Stellt man sich die Ebene als durchsichtig im Raum vor und bevorzugt keine Seite, auf sie zu sehen, so hat es keinen Sinn, von links- und rechts-herum zu sprechen.)

Traditioneller Weise teilt man den Vollwinkel in 360 Grade ein. Das ist natürlich eine Konvention. Genausogut könnte man ihn in 400 (Neugrade) oder 1000 Grade einteilen. Trotzdem ist die Winkelmessung grundsätzlich etwas anderes als die Streckenmessung, da der Vollwinkel ein kanonisches Maß, eine kanonische Einheit ist. Kanonische Längeneinheiten hingegen gibt es in der euklidischen Geometrie nicht. Physiker nennen das Maß eines Winkels dimensionslos.

Für die Bedürfnisse der Analysis ist es das Sinnvollste, Winkel im Bogenmaß zu messen. Das liegt aber für Schulkinder der S1 keineswegs nahe. Außerdem bracht man dazu das Wissen oder den Glauben, dass man Kreislinienabschnitten eine Länge zuordnen kann.

2.7 Orthogonalität. Ein **rechter** Winkel ist ein „halber“ gestreckter Winkel. Ist einer der vier (nicht überstumpfen) Winkel, der am Schnittpunkt zweier Geraden auftritt ein Rechter, so auch die anderen drei – wie man sofort nachrechnet. Bei dieser Betrachtungsweise setzt man voraus, dass sich Winkel „geometrisch addieren“. Das ist mathematisch-philosophisch etwas problematisch. Ich glaube nicht, dass es Kindern Probleme bereitet.

Man sagt, dass sich zwei Geraden **senkrecht** – auch **orthogonal** oder **rechtwinklig** schneiden, wenn die Schnittwinkel rechte Winkel sind.

Zu jeder Geraden a und jedem Punkt A gibt es genau eine Gerade b durch A, die senkrecht auf a steht. (Dabei darf A auf oder außerhalb a liegen.) Die Gerade b kann man mit dem Geodreieck finden und zeichnen.

Damit kann man den Abstand zwischen A und a definieren, nämlich als Streckenlänge $\overline{AS}$ wo S der Schnittpunkt von a mit der Orthogonalen zu a durch A ist. Kinder haben manchmal Schwierigkeiten, diesen Abstand zu messen, wenn man die Gerade a zeichnerisch durch eine Strecke repräsentiert, auf der S nicht liegt.

2.8 Parallelität. Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie entweder übereinstimmen oder keinen gemeinsamen Punkt **(Schnittpunkt)** haben.

Ich schlage vor, das sog. **Parallelenaxiom** (stärker als nötig) wie folgt zu formulieren:

Verschiedene Geraden a, b sind genau dann parallel, wenn die **Gegenwinkel** α, β, die wie in folgender Zeichnung sich bei einem Schnitt mit einer dritten Geraden ergeben, sich zu einem gestreckten Winkel ergänzen (addieren).

Es ist dann klar, dass es zu einer Geraden a und einem Punkt B genau eine Gerade b durch B gibt, die zu a parallel ist.

Man rechnet auch leicht nach, dass bei zwei Parallelen, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, sogenannte **Stufenwinkel** gleichgroß sind.

3 Natürliche Zahlen

3.1 Die natürlichen Zahlen sind $0, 1, 2, 3, \ldots$, insgesamt unendlich viele, so dass man sie nicht alle hinschreiben kann. (Übrigens gibt es unter Mathematikern einen erbitterten Streit darüber, ob man die 0 wirklich zu ihnen rechnen soll. Ich jedenfalls tue das und setze es hiermit für diesen Kurs fest.)

Die Menge (=Gesamtheit) der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, also

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Mit $\mathbb{N}_1$ bezeichne ich die Menge der natürlichen Zahlen $\neq 0$ also $\mathbb{N}_1 := \{1, 2, 3, \ldots\}$. (Wenn man will, kann man auch $\mathbb{N}_2 := \{2, 3, 4, \ldots\}$ definieren, usw.)

3.2 Sie wissen, wie man natürliche Zahlen addiert und multipliziert. Wahrscheinlich kennen Sie auch folgende Gesetze für diese „Verknüpfungen"

$$(1) \left\{ \begin{array}{lll} m + n = n + m & mn = nm & \text{Kommutativität} \\ k + (m + n) = (k + m) + n & k(mn) = (km)n & \text{Assoziativität} \\ k(m + n) = km + kn & & \text{Distributivität} \end{array} \right.$$

(In der letzten Gleichung ist natürlich die Konvention „Punktrechnung geht vor Strichrechnung" anzuwenden; d.h. $km + kn := (km) + (kn)$.) Beachten Sie, dass das Distributivitätsgesetz die Addition und die Multiplikation vollkommen unterschiedlich behandelt. (Die Ausdrücke $k+mn$ und $(k + m)(k + n)$ haben fast immer verschiedene Werte!)

Übrigens hielt ich als abc-Schütze die Kommutativität der Multiplikation natürlicher Zahlen keinesfalls für selbstverständlich. Erst das Beispiel der Apfelsinen, die in einer Kiste in 4 (waagerechten) Reihen à 5 Stück, d.h. aber auch in 5 ('senkrechten') Reihen à 4 Stück angeordnet waren, machten mir das Kommutativitätsgesetz für die Multiplikation augenfällig.

Die Zahlen 0 und 1 spielen für die Addition, bzw. Multiplikation eine Sonderrolle:

$$(2) \quad 0 + n = n \ , \quad 1n = n$$

Man nennt die 0 ein **neutrales Element** für die Addition und die 1 ein solches für die Multiplikation.

3.3 Für *natürliche* Zahlen a, b gelten folgende beiden Regeln

$$a + b = 0 \Longrightarrow a = b = 0$$

(dies stimmt für die ganzen Zahlen, die auch negativ sein können, nicht mehr)

$$ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$$

(Die stimmt auch im Bereich aller ganzen Zahlen.)

3.4 Man kann die natürlichen Zahlen der Größe nach vergleichen: Man schreibt $m \leq n$, wenn es eine natürliche Zahl k mit $m + k = n$ gibt. Man sagt in diesem Fall: „m (ist) kleiner (oder) gleich n."

Die Relation '$<$' wird dann folgendermaßen definiert:

$$m < n \iff m \leq n \text{ und } m \neq n$$

Die Relation '$\leq$' genügt neben der Regel „$0 \leq n$ für alle natürlichen Zahlen n" den folgenden Gesetzen:

$$(4) \begin{cases} k \leq m, m \leq n \Longrightarrow k \leq n & \text{Transitivität} \\ n \leq n & \text{Reflexivität} \\ m \leq n, n \leq m \Longrightarrow m = n & \text{Antisymmetrie} \\ m \leq n \text{ oder } n \leq m & \text{Totalität} \end{cases}$$

Was folgt daraus für '$\geq$' (was Sie richtig definieren müssen)? Man kann folgende Regeln ableiten:

$$(5) \quad k \leq m < n \Longrightarrow k < n \;; \quad \text{und} \quad k < m, m \leq n \Longrightarrow k < n$$

Bezüglich der Addition und Multiplikation gilt für $\leq$:

$$(6) \begin{cases} m \leq n & \Longrightarrow k + m \leq k + n \\ m \leq n & \Longrightarrow km \leq kn \end{cases}$$

Welche Regeln gelten für '$<$'?

Andererseits ist es sehr wohl möglich, von Zahlen der angegebenen Größenordnung in wenigen Sekunden oder Minuten festzustellen, ob sie prim sind – ohne eine Faktorzerlegung im negativen Falle angeben zu können.

Auf Grund dieser Diskrepanz ist es möglich, Texte nach einem öffentlich gemachten Schlüssel zu verschlüsseln, die man ohne eine zusätzliche Information nicht mehr enschlüsseln kann.

3.5 Ein sehr mächtiges Beweismittel für Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen gelten ist die vollständige Induktion.

Sei $\mathcal{A}(x)$ eine Aussage über natürliche Zahlen x mit folgenden beiden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{A}(0)$ ist richtig,

(ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\mathcal{A}(n+1)$ aus $\mathcal{A}(n)$.

Dann gilt $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Denn angenommen, ich soll $\mathcal{A}(m)$ für ein festes m beweisen.
Wegen (i) gilt die Aussage $\mathcal{A}(0)$. Wegen (ii) folgt hieraus $\mathcal{A}(1)$; wieder wegen (ii) folgt $\mathcal{A}(2)$; wieder wegen (ii) folgt $\mathcal{A}(3)$; und so weiter, bis ich bei $\mathcal{A}(m)$ angelangt bin.

Statt für alle n direkt $\mathcal{A}(n)$ zu zeigen, muss man nur für alle n die bedingte Aussage $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ zeigen. Und das ist häufig einfacher.

Der Name 'Vollständige Induktion' kommt folgendermaßen zustande: Ein Gesetz durch Induktion zu begründen, heißt, es aus Einzelfällen abzuleiten. So müssen es die Naturwissenschaftler tun. Vollständige Induktion bedeutet, ein Gesetz zu beweisen, indem man es für *jeden* Einzelfall zeigt. (Allerdings lässt man das Wort 'vollständig' aus Faulheit meist weg.)

3.6 Wenn man mit diesem Prinzip eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ nur für alle diejenigen natürlichen Zahlen zeigen will, die $\geq$ einer gewissen Zahl k sind (etwa weil $\mathcal{A}(n)$ für $n < k$ keinen Sinn hat), so kann man das o.a. Induktionsprinzip auf die Aussage $\mathcal{B}(x) := \mathcal{A}(x+k)$ anwenden. D.h. man zeigt zunächst $\mathcal{A}(k)$ und dann die Implikation $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ für alle $n \geq k$

3.7 Mit Hilfe vollständiger Induktion lässt sich auch folgendes **Minimalprinzip** beweisen

Ist M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$, so besitzt M ein kleinstes Element, d.h. es gibt ein $k \in M$ mit $k \leq m$ für alle $m \in M$.

(Eine Menge M heißt **nichtleer**, wenn es mindestens ein $m \in M$ gibt.)

Ein Beweis des Minimalprinzips mit Hilfe vollständiger Induktion (der nicht vorgetragen wird) geht so:

Die Aussage $\mathcal{A}(n)$ ist die folgende:

Wenn in M ein Element $m \leq n$ existiert, so besitzt M ein kleinstes Element.

Offenbar ist das Minimalprinzip äquivalent damit, dass $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Der Induktionsanfang bedeutet:

Besitzt M ein Element $m \leq 0$, so hat M ein kleinstes Element.

Dies ist aber richtig. Denn da 0 das kleinste Element von $\mathbb{N}$ ist, muss es zu M gehören und ist dann offenbar das kleinste Element von M.

Jetzt müssen wir $\mathcal{A}(n+1)$ aus $\mathcal{A}(n)$ folgern.

Sei also M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, die ein Element $\leq n+1$ enthält. Enthält sie ein Element $\leq n$, so besitzt sie nach Induktionsvoraussetzung ein kleinstes Element. Enthält sie aber kein solches, so muss $n+1$ ihr kleinstes Element sein.

Mit Hilfe des Minimalpinzips wollen wir zwei Sätze über Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen zeigen, die allerdings von den meisten für selbstverständlich gehalten werden. Was 'Teiler' etc. bedeutet, sei als bekannt vorausgesetzt.

Definition 3.8 *Eine* **Primzahl** *ist eine ganze Zahl $p > 1$ die außer 1 und p keine weiteren natürlichen Zahlen als Teiler hat.*

(Im Bereich aller ganzen Zahlen sind auch -1 und $-p$ noch Teiler von p.) Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, ...

Proposition 3.9 *Jede ganze Zahl $n > 1$ ist ein Produkt von Primzahlen.*

Dabei versteht man eine Primzahl als Produkt eines einzigen Faktors. Wenn man will, kann man die 1 als Produkt von 0 Faktoren auffassen. Der Satz wäre dann sogar für alle $n \geq 1$ richtig.

Proof: Angenommen, die Behauptung wäre falsch, d.h. die Menge derjenigen $n > 1$, die kein Produkt von Primzahlen sind, wäre nicht leer. Nach dem Minimalprinzip hätte sie ein kleinstes Element m. Dieses kann keine Primzahl sein, da eine solche als Produkt von Primzahlen (mit 1 Faktor) gilt. Also gibt es einen Teiler d von m mit $1 < d < m$. D.h. es gibt ein $e \in \mathbb{N}$ mit $m = de$. Für e gilt gleichfalls $1 < e < m$. Da m die kleinste ganze Zahl > 1 ist, die nicht in Primfaktoren zerlegbar ist, müssen die kleineren d, e in Primfaktoren zerlegbar sein, etwa

$$d = p_1 \cdots p_r \ , \quad e = p'_1 \cdots p'_s$$

Also ist $m = de = p_1 \cdots p_r p'_1 \cdots p'_s$ doch in Primfaktoren zerlegbar. Widerspruch. $\square$

Remark 3.10 Aus diesem Beweis, den ich bewusst auf recht abstrakte Weise geführt habe, kann man nicht erkennen, wie man eine Primfaktorzerlegung einer ganzen Zahl $n > 1$ effektiv herstellen kann. Dies ist aber prinzipiell möglich. Durch systematisches Durchprobieren der Zahlen 2,3,4,... findet man nämlich die kleinste ganze Zahl p mit $2 \leq p \leq n$, die ein Teiler von n ist. p ist prim; denn jeder Teiler ≥ 1 von p wäre $\leq p$ und ein Teiler von n.

Dann macht man dasselbe mit $\frac{n}{p}$, wenn noch $p \neq n$ ist. Usw.

Diese Methode ist allerdings schon für Zahlen n, die im Dezimalsytem einige 100 Stellen haben, mit den besten Computern in vernünftiger Zeit nicht mehr ausführbar. Es gibt zwar ein paar Tricks, schneller voranzukommen. Aber die vermindern nur unwesentlich das Problem. (Man weiß allerdings, dass sogenannte Quantencomputer, wenn es sie denn je geben wird, dies Problem besser lösen könnten.)

Andererseits ist es sehr wohl möglich, von Zahlen der angegebenen Größenordnung in wenigen Sekunden oder Minuten festzustellen, ob sie prim sind – ohne eine Faktorzerlegung im negativen Falle angeben zu können.

Auf Grund dieser Diskrepanz ist es möglich, Texte nach einem öffentlich gemachten Schlüssel zu verschlüsseln, die man ohne eine zusätzliche Information nicht mehr enschlüsseln kann.

Mag man die Möglichkeit einer Primfaktorzerlegung noch für selbstverständlich halten, so scheint mir dies für die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung nicht mehr so zu sein. Ist es z.B. wirklich so selbstverständlich, dass $17^n \neq 19^m$ für alle natürlichen $n, m \geq 1$ ist?

Proposition 3.11 *Die Zerlegung einer ganzen Zahl > 1 in Primfaktoren ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.*

Proof: (Zermelo) Wir führen den Beweis indirekt. D.h. wir nehmen an, die Menge M der natürlichen Zahlen ≥ 2, die auf mehrere Weisen in Primfaktoren zerlegbar ist, sei nicht leer, und leiten daraus einen Widerspruch ab. Nach dem Minimalprinzip hat M ein kleinstes Element a. Wir werden im Widerspruch hierzu zeigen, dass es noch ein kleineres $b \in M$ gibt.

Da a zu M gehört, hat a zwei verschiedene Zerlegungen in Primfaktoren:

$$a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s.$$

Es gilt $r, s > 1$, und es ist $p_i \neq q_j$ für alle i, j, da man sonst kürzen könnte und auf diese Weise ein kleineres Element in M fände. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $q_1 < p_1$ ist. Beachte, dass $q_1 \nmid p_1 - q_1$ gilt. Wenn man also $p_1 - q_1$ in irreduzible Faktoren zerlegt, kann keiner von diesen q_1 sein.

Die Zahl

$$b := (p_1 - q_1)p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = a - q_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1(q_2 \cdot \ldots \cdot q_s - p_2 \cdot \ldots \cdot p_r)$$

besitzt zwei verschiedene Zerlegungen in irreduzible Faktoren. Indem man nämlich die jeweiligen Klammerausdrücke in irreduzible Faktoren zerlegt, erhält man einerseits eine solche in der q_1 nicht vorkommt, andererseits eine solche, in der q_1 sehr wohl vorkommt. (Das stimmt auch noch, wenn $p_1 - q_1 = 1$ ist.)

Ferner ist b echt kleiner als a (und größer als 1) im Widerspruch zur minimalen Wahl von a. Dies ist ein Widerspruch, den wir aus der Annahme hergeleitet haben, dass es überhaupt natürliche Zahlen (> 1) gibt, die auf wesentlich verschiedene Arten in Primfaktoren zerlegbar sind. Diese Annahme kann also nicht stimmen. □

Proposition 3.12 *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Proof: (EUKLID) Zu gegebenen endlich vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ finden wir eine weitere. Denn jeder Primfaktor von $p_1 \cdots p_n + 1$ ist von allen $p_1, \ldots, p_n$ verschieden. $\square$

Das heißt nicht, dass $p_1 \cdots p_n + 1$ immer selbst prim wäre. Z.B. ist

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509.$$

(**Aufgabe:** Aus dem Namen Zermelo mache man ein beschwingtes Wort, indem man je drei Buchstaben zu Anfang und am Ende hinzufügt!)

3.13 Es stellt sich die Frage, wie man die grundlegenden Gesetze des Rechnens mit natürlichen Zahlen beweisen soll. Neben einer „konstruktiven“ Möglichkeit wie man sie in meiner Einladung zur Zahlentheorie findet, gibt es die axiomatische Methode. Man beschreibt nach Peano die Menge $\mathbb{N}$ durch folgende Gegebenheiten:

(1) Es gibt in $\mathbb{N}$ ein spezielles Element, das mit 0 bezeichnet sei.

(2) Es gibt eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n'$ mit folgenden Eigenschaften:
a) $n' = m' \Longrightarrow n = m$;
b) $n' \neq 0$, was auch immer $n \in \mathbb{N}$ sei;
c) das Induktionsaxiom, wo $n + 1$ durch n' ersetzt sei (s.o.).

(Mit n' ist $n + 1$ gemeint. Aber zunächst ist die Addition ja noch nicht definiert.)

Man definiert dann die Addition „induktiv“ durch
$m + 0 = m$ und $m + n' = (m + n)'$.
(Unmittelbar aus dieser Definition folgt z.B. $n + 0' = n'$. Man definiert $1 := 0'$.)

Ist die Addition bereits definiert, so definiert man die Multiplikation durch
$m \cdot 0 = 0$ und $m \cdot n' = (m \cdot n) + m$.
(Unmittelbar aus dieser Definition kann man z.B. $m \cdot 0' = m$ folgern!)

Man kann dann die o.a. Gesetze für das Rechnen mit natürlichen Zahlen mit einiger Mühe ableiten. Sie können sich ja daran versuchen. (Dabei ist die Reihenfolge des Vorgehens nicht unwichtig, wenn man einigermaßen schnell vorankommen will.)

3.14 Hat man einen (geometrischen) Strahl und eine Einheitslänge gewählt, so kann man auf dem Strahl die natürlichen Zahlen durch Punkte repräsentieren. Wie?

4 Brüche, rationale Zahlen

4.1 Während das Rechnen mit ganzen Zahlen den allermeisten Studierenden keine Probleme bereitet, scheint das für das Rechnen mit Brüchen bereits nicht mehr zu stimmen. Habe ich doch z.B. in einer Staatsexamensklausur die

$$\textbf{absurde Unregel} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

lesen müssen, obgleich doch jeder, der mit dem Bruch $\frac{1}{2}$ irgendeine vernünftige Vorstellung verbindet, immer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

rechnen würde.

Ohne Kommentar zitiere ich: „Die Fähigkeit, eine Bruchrechenaufgabe zu lösen, war anscheinend ein gutes Qualitätsmerkmal, auf den Erfolg im Mathematikstudium zu schließen.“ (Johann Sjuts in DMV mitteilungen 12-2/2004.)

4.2 Anschauliche Vorstellung einer rationalen Zahl

Die rationale Zahl $\dfrac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$ kann man folgendermaßen auf der Zahlengeraden konstruieren: Man teile Strecke von 0 nach 1 in n gleichgroße Teilstrecken. Eine solche trage man dann m-mal von 0 aus nach rechts auf der Zahlengeraden ab, wenn $m \geq 0$ ist. Ist $m < 0$, d.h. $-m > 0$, so trage man sie $(-m)$-mal nach links ab.

Man sieht, dass man den Punkt m/n auch konstruieren kann, indem man die Strecke von 0 bis m in n gleiche Teilstrecken teilt und eine solche Teilstrecke von 0 an in die Richtung von m abträgt.

4.3 Bekanntlich kann man dieselbe rationale Zahl auf viele verschiedene Arten schreiben, z.B.

$$\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

Man kann ‘erweitern’ und ‘kürzen’. Man kann sich überlegen, dass es aufs selbe hinausläuft, ob man ein 15-tel der Einheitstrecke 9-mal, oder ein 10-tel der Einheitstrecke 6-mal von 0 aus (nach rechts) abträgt.

Am elegantesten definiert man die Gleichheit von Brüchen durch

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \ :\Longleftrightarrow \quad ab' = a'b \ .$$

Diese Definition ist äquivalent dazu, dass $\frac{a}{b}$ durch Erweitern und/oder Kürzen zu $\frac{a'}{b'}$ wird:

Wenn z.B. $\frac{a'}{b'}$ aus $\frac{a}{b}$ durch Erweitern mit c, d.h. $\frac{a}{b}$ aus $\frac{a'}{b'}$ durch Kürzen durch c hervorgeht, folgt $ab' = a(bc) = (ac)b = a'b$. Ist umgekehrt $ab' = a'b$, dann entsteht $\frac{a'}{b'}$ aus $\frac{a}{b}$ durch Erweitern und Kürzen, wie folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'} = \frac{a'b}{bb'} = \frac{a'}{b'}$$

Ferner setzen wir fest

$$\frac{m}{1} = m \ .$$

Auf diese Weise wird $\mathbb{Z}$ zu einer Teilmenge von $\mathbb{Q}$, der Menge der rationalen Zahlen.

4.4 Addition: Haben zwei Brüche den gleichen Nenner, so ist ihre Summe einfach zu definieren:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n} := \frac{m+m'}{n}$$

Dies entspricht der Addition von Strecken auf der Zahlengeraden – oder der Subtraktion, wenn etwa $m \geq 0, m' < 0$ ist. Sind die Nenner nicht (notwendig) gleich, so kann man sie durch Erweitern gleich machen, also z.B. rechnen

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn'}{nn'} + \frac{m'n}{nn'} = \frac{mn'+m'n}{nn'} \ ,$$

(Will man bei der Addition mit möglichst kleinen Zahlen rechnen, so nimmt man als gemeinsamen Nenner das kleinste gemeinsame Vielfache von n, n' statt nn'. Für allgemeine Überlegungen ist es allerdings meist naheliegend, die o.a. Formel zu verwenden.)

Man sieht, dass sich Nenner und Zähler bei der Addition sehr **verschieden** verhalten! Wenn $m, n, n' > 0$ sind, **gilt immer:**

$$\frac{m}{n} + \frac{m}{n'} = \frac{m(n'+n)}{nn'} \neq \frac{m}{n+n'}, \quad \text{aber} \quad \frac{n}{m} + \frac{n'}{m} = \frac{n+n'}{m}$$

Offenbar ist $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{n}$ für alle $n > 0$ ein neutrales Element bezüglich der Addition. Ferner gibt es ein additiv Inverses zu $\frac{m}{n}$, nämlich $\frac{-m}{n}$. Denn

$$\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{m-m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

Man darf also $\frac{-m}{n} = -\frac{m}{n}$ schreiben.

4.5 Multiplikation: Zunächst definieren wir $k \cdot \frac{m}{n}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Ist $k \geq 0$, so sei $k \cdot \frac{m}{n}$ die k-fache Summe von $\frac{m}{n}$ zu sich selbst, d.h.

$$k \cdot \frac{m}{n} := \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n} = \frac{km}{n}.$$

Dies muss man zwangsläufig so machen, wenn 1 ein neutrales Element für die Multiplikation bleiben und die Distributivität und Kommutativität der Multiplikation erhalten bleiben soll. Die Forderung, dass die Distributivität weiter gelte, erzwingt dann auch

$$(-k) \cdot \frac{m}{n} = -\frac{km}{n}, \text{ also } k \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{n} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \ .$$

Insbesondere ergibt unsere Definition (für $k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_1$)

$$k \cdot \frac{1}{r} = \frac{k}{r} \text{ und } r \cdot \frac{1}{r} = \frac{r}{r} = \frac{1}{1} = 1 \ .$$

Soll die Assoziativität der Multiplikation weiterhin gelten, so muss

$$\frac{m}{n} = 1 \cdot \frac{m}{n} = r \cdot (\frac{1}{r} \cdot \frac{m}{n})$$

sein. D.h., ist $\frac{1}{r} \cdot \frac{n}{m} = \frac{m'}{n'}$, so ist $\frac{rm'}{n'} = \frac{m}{n}$, also $rm'n = n'm$. d.h. $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{rn}$.

Wir definieren also

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{m}{n} := \frac{m}{rn}$$

und somit

$$\frac{k}{r} \cdot \frac{m}{n} := k \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{m}{n} = k \cdot \frac{m}{rn} = \frac{km}{rn}$$

Merke: Die Addition von Brüchen ist **komplizierter** als ihre Multiplikation!

Offensichtlich ist $1 = \frac{1}{1} = \frac{n}{n}$ für $n \neq 0$ das multiplikativ neutrale Element.

Beachte: Sind m, n, m', n' positive ganze Zahlen, so **gilt immer**

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} > \frac{m+m'}{n+n'} \text{ also } \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} \neq \frac{m+m'}{n+n'}$$

4.6 Es gibt auch ein geometrisches Argument dafür, die Multiplikation von Brüchen wie oben zu definieren. Man bestimme dazu den Fächeninhalt eines Rechteckes, dessen Seiten m/n, bzw. m'/n' lang sind.

4.7 In $\mathbb{Q}$ gibt es nicht nur additiv inverse Elemente, sondern zu jedem $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$ gibt es genau ein multiplikativ Inverses a^{-1}, nämlich

$$\text{Ist } a = \frac{m}{n}, \text{ so ist } a^{-1} = \frac{n}{m} \text{ (oder } = \frac{-n}{-m} \text{ falls } m < 0)$$

In $\mathbb{Q}$ kann man also die Gleichung $ax = b$ mit der Unbekannten x lösen, wenn $a \neq 0$ ist. Nämlich durch $x = ba^{-1}$

4.8 Das Rechnen mit rationalen Zahlen genügt denselben Gesetzen wie das mit den ganzen Zahlen. Es genügt sogar einem zusätzlichen Gesetz, nämlich dem der Existenz von **multiplikativ Inversen.** $\mathbb{Q}$ ist ein sogenannter **Körper**.

(Übrigens muss man bei der axiomatischen Definition eines Körpers folgendes bedenken: Eine Menge, die aus genau einem Element p besteht, für das $p + p = pp = p$ definiert ist, erfüllt alle o.a. Körperaxiome. Man will sie aber nicht als Körper gelten lassen. Man verlangt deshalb zusätzlich, dass in einem Körper $1 \neq 0$ ist, oder – äquivalent dazu – dass er aus mindestens 2 Elementen besteht. Es gibt einen nicht ganz unnützen Körper, der aus genau 2 Elementen besteht.)

Remark 4.9 Die Nullteilerfreiheit, und damit die Kürzungsregel gilt natürlich im Bereich der rationalen Zahlen auch. Offenbar gilt sie in jedem Körper. (Warum?)

4.10 Da sowohl bei der Multiplikation wie bei der Addition von Brüchen der Nenner (genauer: einer der möglichen Nenner) des Ergebnisses das Produkt der Nenner der Faktoren, bzw. der Summanden ist, gibt es echte Teilmengen von $\mathbb{Q}$, die $\mathbb{Z}$ echt umfassen, die gegen Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen sind, sogenannte **Unterringe** von $\mathbb{Q}$. Z.B. ist die Menge der Brüche, die sich mit einem ungeraden Nenner schreiben lassen, ein solcher Unterring. (Kann man in dieser Behauptung 'ungerade' durch 'gerade' ersetzen??? Diese Frage ist allerdings nicht wirklich gut gestellt. Denn offenbar kann man jeden Bruch durch Erweitern zu einem Bruch mit einem geraden Nenner machen.)

4.11 Anordnung: Wie vergleicht man Brüche der Größe nach? Nun, wenn zwei Brüche denselben positiven Nenner haben, ist die Sache einfach:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{m'}{n} \iff m \leq m' \ .$$

Ansonsten muss man die (als positiv vorausgesetzten!) Nenner gleich machen:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{m'}{n'} \iff \frac{mn'}{nn'} \leq \frac{m'n}{nn'} \iff mn' \leq m'n \ .$$

Z.B. sieht man: Ist $0 < n \leq n'$, so gilt $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n'}$. Die Regeln der Verträglichkeit der Anordnung mit Addition und Multiplikation bleiben erhalten. Das Induktionsprinzip und das Minimumprinzip gilt natürlich für die rationalen Zahlen nicht. Z.B. hat die Menge $M := \{a \in \mathbb{Q} \mid 0 < a\}$ die untere Schranke 0, aber kein kleinstes Element. Ist nämlich $a \in M$ beliebig (klein), so ist $2^{-1}a < a$ und $2^{-1}a \in M$.

Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen gibt es immer unendlich viele weitere rationale Zahlen.

4.12 Verallgemeinerung der Bruchschreibweise: Sei K ein beliebiger Körper. Für $a, b \in K, b \neq 0$ schreibt man dann

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}$$

Aus den Körpergesetzen leitet man dann leicht ab:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \ , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'} \ , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

letzteres, wenn auch $a \neq 0$ ist.

Remark 4.13 Auch für positive rationale Zahlen a, b, c, d **gilt immer**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}, \text{ also } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$$

4.14 Wenn man im Körper der rationalen Zahlen Brüche rationaler Zahlen bildet bekommt man 'Mehrfachbrüche', z.B.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} \ .$$

Man muss hier aufpassen, z.B.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \quad \text{und} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$$

voneinander **unterscheiden!** Berechnen Sie

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Ein Ausdruck der Form

$$\begin{array}{c} a \\ \hline b \\ \hline c \end{array}$$

hat **keinen Sinn!**

4.15 Standarddarstellung. Jede rationale Zahl kann als ein Bruch geschrieben werden, in welchem Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Primfaktor haben. Denn sonst kann man ja noch kürzen. Da bei jedem Kürzen (durch eine ganze Zahl > 1) Zähler und Nenner (dem Betrag nach) kleiner werden, muss der Kürzungsprozess nach dem Minimalprinzip irgendwann anhalten. (Übrigens gibt es eine Algorithmus – von Euklid –, der es erlaubt, den ggT von zwei Zahlen zu berechnen, ohne sie vorher in Primfaktoren zerlegt zu haben.)

Verlangt man noch – wie wir es bisher meist getan haben – dass der Nenner positiv ist, so ist die Darstellung einer rationalen Zahl als „gekürzter" Bruch eindeutig.

Beweis hierfür: Sei $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, wo beide Brüche gekürzt sind. Dann gilt $mn' = m'n$. Wir verwenden die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Ist p ein Primfaktor von m, genauer, ist p^k die höchste p-Potenz, die m teilt, so muss sie auch m' teilen, da nach Vorraussetzung p kein Teiler von n ist. Es folgt $m|m'$, und ebenso $m'|m$. Also $m = \pm m'$. Da nach Voraussetzung $n, n' > 0$ ist, müssen auch die Vorzeichen von m und m' übereinstimmen.

Ebenso folgt $n = n'$. –

5 Grenzwerte und reelle Zahlen

5.1 Du kennst jetzt den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und weißt auch, wie man seine Elemente als Punkte auf der Zahlengerade auffassen kann – nachdem man die Punkte 0 und 1 festgelegt hat. Der Körper $\mathbb{Q}$ besitzt außer seiner arithmetischen (oder algebraischen) Struktur, d.h. den Rechenarten, noch eine Anordnungsstruktur. Diese wird durch die Relation '$\leq$' gegeben. Wenn man, wie üblich die Zahlengerade waagerecht zeichnet und dabei den Punkt 1 rechts von der 0 legt, so bedeutet $a \leq b$, dass der Punkt a links von b liegt oder mit ihm übereinstimmt.

Die Relation '$\leq$' hat folgende Eigenschaften:

$a \leq a$ (Reflexivität)
$a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (Tansitivität)
$a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$ (Antisymmetrie)
für je zwei Zahlen a, b gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$
$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (Totalität)
$0 \leq c,\ a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$ (Monotonie der Addition, bzw. Multiplikation)

Definition. Ein [**angeordneter Körper, ist ein Körper mit einer Relation '$\leq$', derart, dass obige Eigenschaften erfüllt sind.**

Die Relation '$<$' ist durch '$a < b \iff a \leq b, a \neq b$ definiert. Was $a \geq b$ und $a > b$ dann bedeuten sollen, ist Dir sicher klar.

Man kann sich überlegen, dass in jedem angeordneten Körper ein Teilkörper liegt, der so aussieht, wie $\mathbb{Q}$. Wir wollen daher im Folgenden einfach annehmen, dass $\mathbb{Q}$ als Teilkörper in den betrachteten angeordneten Körpern liegt.

Zur axiomatischen Definition der reellen Zahlen benötigen wir ein Axiom, das für den Körper $\mathbb{Q}$ erfüllt ist:

Definition: **Ein archimedisch angordneter Körper K ist ein angeordneter Körper, derart dass zu Elementen $a, b \in K$ mit $a, b > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na \geq b$ existiert. (Nach Annahme liegt ja $\mathbb{Q}$, also auch $\mathbb{N}$ in dem Körper.)**

$\mathbb{Q}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper. Sind nämlich m_1, m_2, n_1, n_3 natürliche Zahlen $\neq 0$, so ist

$$(m_1 n_2 \frac{m_1}{n_1} \geq \frac{m_2}{n_2}$$

5.2 Die ganzen Zahlen liegen auf der Zahlengerade voneinander isoliert. Anders die rationalen Zahlen. Zwischen ihnen liegen keine 'offensichtlichen' Lücken. Zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen noch unendlich viele weitere. Man könnte vermuten, die rationalen Zahlen füllten die Zahlengerade aus.

ABER

betrachte die Funktion x^2 auf dem Bereich der rationalen Zahlen ≥ 0. Wenn Du sie zeichnest, erhältst Du eine schöne Kurve.

Bild

Gibt es eine rationale Zahl x – d.h. einen Punkt auf der x-Achse, für die $x^2 = 5$ ist – d.h. der dem Punkt 5 auf der y-Achse entspricht? Wir wissen, dass die Antwort 'nein' lautet. Und das ist natürlich nicht die einzige Ausnahme. Gewisse Lücken scheinen doch zwischen den rationalen Zahlen zu liegen, mögen sie auch ‘unendlich klein’ sein.

Wir wissen auch, dass die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ im Bereich der rationalen Zahlen keinen (Grenz-)Wert hat, obwohl die Folge ihrer Partialsummen monoton wächst und nach oben beschränkt ist.

BILD

Ganz offenbar hat der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen seine Defizite. Wir wollen einen größeren angeordneten Körper $\mathbb{R}$, den Körper der reellen Zahlen axiomatisch einführen und auch ein wenig dazu sagen, wie man ihn konstruiert.

5.3 ABSOLUTBETRAG. Sei K ein angeordneter Körper. Der **Abstand** zweier seiner Elemente a und b ist $a-b$ oder $b-a$ je nachdem, welches Element das größere ist. Mit Hilfe des sogenannten **Absolutbetrages** kann man den Abstand einfach in der Form $|a-b|$ schreiben.

Definition 5.4 *Sei a ein Element eines geordneten Körpers, so definieren wir den* **Absolutbetrag** – *auch kurz* **Betrag** – $|a|$ *von a als die größere der beiden Zahlen $a, -a$.*

EIGENSCHAFTEN: $|a| \geq 0$. $\quad |a| = 0 \iff a = 0$, $\quad |a+b| \leq |a| + |b|$. $\quad |ab| = |a| \cdot |b|$.

Sei $\varepsilon > 0$, dann bedeutet $|a-b| < \varepsilon$ dasselbe wie $a-\varepsilon < b < a+\varepsilon$ (und natürlich auch dasselbe wie $b-\varepsilon < a < b+\varepsilon$).

5.5 Wir wollen im Folgenden definieren, was wir unter einem Grenzwert einer (unendlichen) Folge $(a_n) = (a_n)_n = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ verstehen wollen. Vielleicht hast Du ja schon ein gewisses Gefühl dafür, dass etwa die Folge $(\frac{1}{n+1})$ den Grenzwert 0 bzw. die Folge $\frac{n}{n+1}$ den Grenzwert 1 hat.

Man muss sich fragen, ob notwendiger Weise der Begriff „Grenzwert“ ein vager Begriff ist, ob man etwa von jedem Mathematiker verlangen muss, dass ihm intuitiv klar ist, dass die genannten Folgen die genannten Grenzwerte haben – oder ob man dies präzise fassen kann.

Was heißt: ‘Schließlich liegen die Glieder der Folge (a_n) beliebig nahe bei a’?

Nun, die folgende Definition ist präzis; aber Du musst Dir schon ordentlich Mühe geben, sie zu verstehen.

Definition 5.6 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem archimedisch angeordneten Körper und a ein Element dessselben. Man sagt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe den* **Grenzwert** *oder* **Limes** *a, oder auch* **konvergiert gegen** *a, wenn es zu jedem rationalen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.*

Um dies etwas anders zu formulieren, definieren wir zunächst den Begriff ε-Umgebung einer Zahl a.

Definition 5.7 *Sei $\varepsilon > 0$ ein Element eines angeordneter Körpers K. Die ε-Umgebung von a in besteht aus den Elementen $b \in K$ mit $|b-a| < \varepsilon$.*

Obige Definition des Grenzwertes besagt dann:
$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff$ jede ε-Umgebung mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ von a – und sei $\varepsilon > 0$ noch so klein – enthält, bis auf endlich viele n alle a_n.

Examples 5.8 Jetzt wollen wir uns Beispiele für Konvergenz, aber auch für Nichtkonvergenz überlegen.

a) Die Folge $(1/n), n \geq 1$, also die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ konvergiert in einem achimedisch angeordneten Körper gegen 0, ebenso die Folge $(2^{-n}), n \geq 0$, d.h. die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$.

Sei nämlich $\varepsilon = k/m$ mit ganzen $k, m > 0$. Dann ist $\frac{1}{m} \leq \varepsilon$. Ist nun $N = m+1$, so ist $\frac{1}{n} < \frac{1}{m} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Die Folge $2^0,\ 2^1,\ 2^2, \ldots$ besteht aus ganzen Zahlen und hat die Eigenschaft $2^n < 2^{n+1}$. Mit Induktion beweist man $2^n > n$ für ganze $n \geq 1$. Folglich ist $2^{-n} < \frac{1}{n}$. Die Konvergenz folgt dann leicht.

b) Die Folge $((-2)^{-n}), n \geq 0$, also die Folge $(+1, -\frac{1}{2}, +$

Aufgabe: Sei $|q| < 1$. Zeige $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. (Man kann die Bernoullische Ungleichung benutzen.)

c) Betrachte die Folge $((-1)^n + 2^{-n}), n \in \mathbb{N}$. Sie nähert sich sozusagen den Zahlen -1 und 1. (Genauer nähert sich die 'Hälfte' der Folgenglieder der 1, die andere 'Hälfte' der -1.) Diese sind keine Grenzwerte im Sinne obiger Definition, sondern sogenannte **Häufungspunkte**. Obwohl diese nicht unwichtig sind, will ich hier auf ihre Definition verzichten.

d) Die Folge $(n^{(-1)^n}), n \geq 1$ verhält sich nicht viel anders. Sie hat außer dem 'Häufungspunkt' 0 noch den 'uneigentlichen Häufungspunkt' ∞. Auch diese ist nicht konvergent, d.h. hat keinen Grenzwert.

e) Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wo a_n folgendermaßen definiert sei:

$$a_n := \begin{cases} (n+2)^{-1} & \text{für gerade } n \\ n^{-1} & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

d.h. die Folge $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots)$ Diese Folge nähert sich der 0 wie die Echternacher Springprozession. D.h. in jedem 2. Schritt weicht sie wieder etwas zurück. Trotzdem konvergiert sie gegen 0 im Sinne unserer Definition. (Beweis?) Nach meiner Meinung wäre es auch sehr engherzig, wollte man eine solche Folge nicht als eine Folge mit dem Grenzwert 0 ansehen.

f) Die Folge $(1 + \frac{1}{n})$ hat zwar die Eigenschaft, dass ihre Glieder immer kleiner werden, trotzdem geht sie nicht gegen 0, sondern gegen 1,

g) Schließlich hat eine 'konstante' Folge, in der alle Glieder untereinander gleich sind, also ein Folge der Form $(a, a, a, \ldots)$ den Grenzwert a.

Frage: Ist folgende Aussage äquivalent dazu, dass eine Folge (a_n) den Grenzwert 0 hat?

„Vom Vorzeichen abgesehen ist jedes Folgenglied kleiner als das vorangehende.“

☐ Ja ☐ Nein

(Beachte die Beispiele e) und f).

5.9 Körper der reellen Zahlen. Der Körper der reellen Zahlen, hat vor dem Körper der rationalen Zahlen den Vorzug, dass in ihm die Folgen, 'die eigentlich konvergieren sollten', auch wirklich konvergieren.

Die Folgen, 'die eigentlich konvergieren sollten, sind die sogenannten 'Cauchy-Folgen'. Während die Glieder einer konvergenten Folge 'schließlich beliebig nahe bei einer Zahl' liegen, liegen die Glieder einer Cauchy-Folge 'schließlich beliebig nahe beieinander'. Genauer

Definition 5.10 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem rationalen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$ gilt.*

Jede konvergente Folge in einem archimedisch angeordneten Körper ist eine Cauchy-Folge.

Examples 5.11 a) Die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ hat die Partialsummen

$$s_0 = \frac{1}{0!} = 1,\ s-.1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2,\ s_2 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2,5,\ \ldots,\ s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!},\ \ldots$$

Man erhält für $1 \leq k < l$ leicht die Abschätzung (Ungleichung) (vgl. Abschnitt **??**, Beispiel 2 b))

$$s_l - s_k = \frac{1}{(k+1)!} + \cdots + \frac{1}{l!} \leq \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} < \frac{1}{k+1}$$

Mithin ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, aufgefasst al Folge ihrer Partialsummen eine Cauchy-Folge.

b) Die harmonische Reihe, als Folge aufgefasst, ist keine Cauchy-Folge. Zeige dazu: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ schließlich jede Schranke überschreitet, so muss auch $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n}$ dies tun.

c) Die Folgen (a_n) mit $a_n = n$, bzw. $a_n = (-1)^n$ sind keine Cauchy-Folgen.

d) Sei $m, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ ein unendlicher Dezimalbruch mit $m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Wir interpretieren ihn als Folge der abbrechenden Dezimalbrüche $a_0 = m,\ a_1 = m, \alpha_1,\ a_2 = m, \alpha_1\alpha_2,\ \ldots$. Sei $m \leq n$. Dann ist $a_n - a_m \leq 10^{-n}$. also die genannte Folge eine Cauchy-Folge.

e) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{Q}$ konvergente Folge rationaler Zahlen, so ist sie eine Cauchy-Folge. Sei nämlich a ihr Limes und $\varepsilon > 0$ rational. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n > N$. Für $m, n > N$ gilt dann $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$.

5.12 Man kann nun den Körper der reellen Zahlen axiomatisch als archimedisch angeordneten Körper definieren, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

Man kann nachweisen, dass es 'im Wesentlichen' nur einen solchen Körper gibt. D.h., sind R, R' zwei solche Körper, so gibt es eine Beziehung $a \leftrightarrow a'$ zwischen den Elementen $a \in R$ und $a' \in R'$, so dass diese Beziehung jedem $a \in R$ genau ein $a' \in R'$ zuordnet *und umgekehrt*, und dass $a + b \leftrightarrow a' + b',\ ab \leftrightarrow a'b'$, sowie $a \leq b \iff a' \leq b'$ aus $a \leftrightarrow a',\ b \leftrightarrow b'$ folgt.

5.13 Nun ist es aber keineswegs klar, dass es so einen Körper der reellen Zahlen wirklich gibt.

Ein anschauliches Argument wäre, dass sich eine Cauchy-Folge auf der Zahlengeraden ja 'augenscheinlich zu einem Punkt zusammenzieht'.

Ich denke, Du wirst ein solches 'anschauliches' Argument doch mit sehr skptischen Augen betrachten.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, den Körper der reellen Zahlen zu konstruieren. eine wollen wir hier vorstellen.

Sie besitzt eine gewisse Analogie zur Konstruktion der rationalen Zahlen. Da man eine ganze Zahl nur selten durch eine andere ganze Zahl im Bereich der ganzen Zahlen dividieren kann, drückt man das virtuelle Ergebnis der Division von m durch n einfach als $\frac{m}{n}$, d.h als das Zahlenpaar (m, n) aus. Dabei muss man allerdings $\frac{m}{n}$ und $fracm'n'$ als zueinander gleich betrachten, wenn die virtuellen Divisionsergebnisse $m : n$ und $m' : n'$ sinnvollerweise als gleich anzusehen sind.

So kann man auch bei der Konstruktion von $\mathbb{R}$ vorgehen. Cauchy-Folgen rationaler Zahlen konvergieren nur selten im Bereich der rationalen Zahlen. Deshalb wird man die reellen Zahlen einfach als Cauchy-Folgen rationaler Zahlen ansehen. Dabei stellen zwei Cauchy-Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}]}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen genau dann dieselbe reelle Zahl dar, wenn diese beiden Folgen gegen denselben virtuellen Grenzwert konvergieren, d.h. wenn die Folge der Differenzen $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfoge ist (d.h. gegen 0 konvergiert.

5.14 Nun ist natürlich eine Menge zu tun. Um die Addition zu definieren, musst Du etwa zeigen: Wenn (a_n) und (a'_n) sich nur um eine Nullfolge unterscheiden, so tun dies auch $(a_n + b_n)$ und $a'_n + b_n)$. Entsprechendes ist für die Multiplikation zu tun, und da auch etwas schwieriger. Ist (a_n) eine Cauchy-, aber keine Nullfolge, so muss man zeigen, dass $a_n = 0$ nur für endlich viele n gilt, damit man ein mltiplikativ Inverses bilden kann. Die Anordnung auf $\mathbb{R}$ ist zu definieren.

6 Dedekindsche Schnitte

Wir wollen hier die reellen Zahlen ≥ 0 als Dedekindsche Schnitte einführen. In der elementaren Geometrie hat man *zunächst* keinen Anlass, negative Zahlen einzuführen. Deshalb betrachten wir *zunächst* nur die nichtnegativen rationalen und reellen Zahlen. (Dies hat auch Vorteile bei der Definition der Multiplikation reeller Zahlen.) Die Menge $\{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ der nichtnegativen rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}_+$ bezeichnet.

Definition 6.1 *Ein* **Dedekindscher Schnitt** *ist ein Paar* (A, B) *von Teilmengen von* $\mathbb{Q}_+$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $B \neq \emptyset$;

(ii) $A \cup B = \mathbb{Q}_+$;

(iii) für alle $a \in A,\ b \in B$ *ist* $a < b$;

(iv) B *besitzt kein kleinstes Element.*

Remarks 6.2 Wegen (iii) und (iv) ist A durch B bestimmt. Theoretisch bräuchte man also A überhaupt nicht. Ich finde es aber ein bißchen anschaaulicher, mit B immer auch A zu betrachten.

a) Wir definieren die reellen Zahlen als die Dedekindschen Schnitte. Jede *rationale* Zahl ρ definiert einen D. Schnitt wie folgt: $A := \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq \rho\}$, $B := \{b \in \mathbb{Q} \mid b > \rho\}$. Insofern wird $\mathbb{Q}_+$ als Teilmenge von $\mathbb{R}_+$ dargestellt. Die irrationalen Zahlen sind die Schnitte (A, B), wo auch A kein größtes Element hat.

Die Zahl $\sqrt{2}$, die wir z.B. als reelle Zahl überhaupt erst kreieren wollen, wird durch folgenden D. Schnitt (A, B) gegeben: $A := \{a \in \mathbb{Q}_+ \mid a^2 < 2\}$, $B := \{b \in \mathbb{Q}_+ \mid b^2 \geq 2\}$.

b) Die Forderung (iv) in obiger Definition wird gestellt, damit verschiedene D. Schnitte immer verschiedene reelle Zahlen definieren. Sonst könnte man eine rationale Zahl ρ, anders als oben, auch durch das Paar $A' := \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq \rho\}$, $B' := \{b \in \mathbb{Q} \mid b > \rho\}$ beschreiben. Wenn man akzeptiert, dass gewisse Zahlen (nämlich die rationalen) auf zwei Weisen durch einen D. Schnitt gegeben werden, kann man auf (iv) verzichten. (Übrigens folgt aus (iv), dass $0 \in A$ ist.) Die durch (iv) erzwungene Unsymmetrie verkompliziert etwas die Konstruktion sowohl des additiv wie des multiplikativ Inversen.

c) Man kann einem unendlichen nichtnegativen Dezimalbruch, der nicht notwendig periodisch ist, aber möglicherweise auf lauter Nullen ausgeht, einen Dedekindschen Schnitt auf folgende Weise zuordnen:

Sei a_n derjenige endliche Dezimalbruch, der entsteht, indem man einen unendlichen Dezimalbruch a nach der n-ten Nachkomma-Stelle abbricht. Definiere zunächst $B' := \{q \in \mathbb{Q}_+ \mid q > a_n \text{ für alle } n\}$. Besitzt B' kein kleinstes Element, so setze $B = B'$. Besitzt B' das kleinste Element b, so setze $B = B' - \{b\}$. Dann setze $A := \mathbb{Q}_+ - B$. Dann ist (A, B) der Dedekindsche Schnitt der a „darstellt".

d) Umgekehrt kann man einem Dedekindschen Schnitt (A, B) einen unendlichen Dezimalbruch auf folgende Weise zuordnen. Sei a_0 die größte natürliche Zahl, die in A existiert. (Beachte, dass $0 \in A$ und A nach oben beschränkt ist, etwa durch ein beliebiges Element aus B.) Dann sei a_1 die größte unter den Zahlen der Form $n/10$ in A mit $n \in \mathbb{N}$, dann sei a_2 die größte unter den Zahlen der Form $n/10^2$ in A mit $n \in \mathbb{N}$, usw. Offenbar ist $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die Folge der abgebrochenen Dezimalbrüche eines unendlichen Dezimalbruches.

6.3 Seien (A, B), (A', B') Dedekindsche Schnitte.

$(A, B) \leq (A', B')$ wird durch $A \subset A'$, d.h. $B \supset B'$ definiert.

Die Addition wird wie folgt definiert:

$$(A, B) + (A', B') := (\mathbb{Q}_+ - (B + B'), B + B'),,$$

wo $B + B' := \{b + b' \mid b \in B, b' \in B'\}$ definiert ist und $\mathbb{Q}_+ - (B + B')$ die Mengendifferenz bedeutet.

Man prüft leicht nach, dass $(\mathbb{Q}_+ - (B + B'), B + B')$ wieder ein D. Schnitt ist. Die rationale Zahl 0, d.h. der ihr entsprechende Schnitt bleibt das neutrale Element der Addition.

6.4 Die Multiplikation wird definiert durch:

$$(A, B) \cdot (A', B') := (\mathbb{Q} - BB', BB')$$

Hier sei $BB' := \{bb' \mid b \in B, b' \in B'\}$

Das multiplikative Inverse eines irrationalen Schnittes (A, B) ist dann $(B^{-1}, \mathbb{Q}_+ - B^{-1}$, wo $B^{-1} := \{b^{-1} \mid b \in B\}$ sei. Das multiplikativ Inverse des zu einer rationalen Zahl $a > 0$ gehörenden Schnittes ist der Schnitt, der zu a^{-1} gehört.

Die Rechenregeln, d.h. die Körperaxiome mit Ausnahme der Existenz der additiv Inversen für die durch D. Schnitte definierten nichtnegativen reellen Zahlen nachzuprüfen ist zeitaufwendig und nicht in allen Punkten trivial.

Remarks 6.5 Sicher haben Sie bemerkt, dass gerade die Dedekindschen Schnitte, (A, B), wo A ein größtes Element besitzt, die also zu rationalen Zahlen gehören, besondere Schwierigkeiten machen. Deshalb ist vielleicht eine andere Definition Dedekindscher Schnitte besser. Etwa so:

$B \neq \emptyset$; $\quad a \in A, b \in B \Longrightarrow a < b$;
A besitzt kein größtes und B kein kleinstes Element;
$\mathbb{Q}_+ = A \cup B$ oder $\mathbb{Q}_+ = A \cup \{c\} \cup B$, mit einem $c \in \mathbb{Q}_+$, wofür $a < c < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

Aber da die Summe oder das Produkt zweier irrationaler Schnitte rational sein kann, bekommt man immer Schwierigkeiten. Im Schulunterricht wird es nicht möglich sein, eine Einführung der reellen Zahlen zu geben, die sowohl leicht verständlich als auch sachlich korrekt ist. Dabei will ich von den Einwänden der Intuitionisten einmal ganz absehen. Naheliegend ist es natürlich, reelle Zahlen als unendliche Dezimalbrüche einzuführen. Aber versuchen sie mal, Summe und Produkt zweier solcher zu definieren.

Ein geometrisch denkender Mensch stellt sich eine reelle Zahl als Punkt auf der Zahlengerade vor, den man durch rationale Zahlen beliebig genau approximieren kann. Man kann die Rechenoperationen durch geometrische Konstruktionen definieren! (Wie?)

7 Symmetrien

Es spricht manches dafür, das Studium der ebenen Geometrie mit dem Begriff der (Klapp-)Symmetrie zu beginnen. Die folgende „Definition“ ist keine schulmäßige Definition. D.h. sie kann nicht alles auf bereits bekannte Begriffe zurückführen. Irgendwo muss man schließlich anfangen. Es gibt keine Theorie, die allein mit schulmäßigen Definitionen auskommt.

Definition 7.1 *Eine Figur (Menge) F in der Ebene heißt* **symmetrisch zur (Symmetrie-)Achse** *g (wobei g eine Gerade sei) wenn sie bei Klappung um diese Gerade mit sich zur Deckung kommt.*

Man drückt dies auch so aus: g ist eine Symmetrieachse von F.

Was eine **Klappung** ist, muss man praktisch erlernen.

Beispiel: Sei F ein Quadrat. Zu F gibt es 4 Symmetrieachsen, nämlich zwei die durch je zwei diagonal gegenüber liegenden Eckpunkte gehen und zwei, die durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten gehen.

7.2 F bestehe aus genau zwei Punkten A und B. Die Gerade, die durch beide Punkte geht, ist sicher eine Symmetrieachse von F. Aber es gibt noch eine weitere, nämlich die sogenannte **Mittelsenkrechte** der Strecke AB.

Bei einer Klappung bleiben Abstände von Punkten dieselben. Wenn man will, kann man dies zur schulmäßigen Definition dafür nutzen, wann man zwei Strecken (in einer Ebene) gleichlang nennt, nämlich dann, wenn die beiden Strecken durch eine endliche Folge von Klappungen zur Deckung gebracht werden können.

7.3 Zu zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt gibt es eine Symmetrieachse, die „Winkelhalbierende“.

7.4 Zeichnet man um einen Punkt P auf einer Geraden g einen „Halbkreis“ auf einer Seite der Geraden, d.h. die Menge der Punkte, die auf der einen Seite der Geraden liegen und von P einen gegebenen festen Abstand r haben, so ist das Bild dieses Halbkreises bei einer Klappung um g wieder ein Halbkreis mit dem Radius r. Man bekommt somit aus dem ursprünglichen Halbkreis und seinem Bild unter der Klappung zusammen einen Vollkreis mit dem Radius r um P.

8 Dreiecke, Kongruenzsätze

8.1 Ein **Dreieck** wird durch drei Punkte A, B, C in der Ebene gegeben. Dieses Dreieck wird mit ABC bezeichnet. In der Regel verlangt man noch, dass die Punkte A, B, C nicht auf einer Geraden liegen. Wenn A, B, C auf einer Geraden liegen, heißt das Dreieck **ausgeartet**. In dieser Vorlesung wird ein Dreieck in der Regel als nicht ausgeartet vorausgesetzt.

Häufig wird unter einem Dreieck auch die Figur verstanden, die aus den drei Verbindungsstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, den sogenannten Seiten von ABC besteht. So wollen wir es auch immer zeichnen.

Mit a bezeichnet man die Länge der Seite $\overline{BC}$, mit b die der Seite $\overline{CA}$, mit c die der Seite $\overline{AB}$ bezeichnet.

In den Eckpunkten hat man (Innen)Winkel α, β, γ; α bei A, usw.

Proposition 8.2 *Für die drei Innenwinkel α, β, γ gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.*

Aus der Größe zweier Winkel kann man also die des dritten errechnen, auch zeichnerisch bestimmen.

Proof: Man ziehe durch C die Parallele zur Seite AB und erkennt dann das am Punkt C die drei Winkel entstehen, die sich zu einem gestreckten Winkel ergänzen. □

8.3 Persönliche Bemerkung. Dies war der erste mathematische Beweis, den ich in meinem Leben kennengelernt habe. Die Möglichkeit, dass man so allgemeine Sätze beweisen kann, hat mich zutiefst fasziniert und mein Leben bestimmt.

Definition 8.4 *Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen kongruent, wenn gilt:*

$$a = a', \; b = b', \; c = c', \; \alpha = \alpha', \; \beta = \beta', \; \gamma = \gamma'$$

ist. Dabei sind a', b' usw. vernünftig definiert.

Hier sind die Dreiecke als Tripel der Punkte aufgefasst. D.h. es kommt auf die Reihenfolge an. Ist z.B. $a = b', \; b = c', \; c = a', \; \alpha = \beta', \; \beta = \gamma', \; \gamma = \alpha'$, so sagt man ABC sei kongruent zu $B'C'A'$.

Vielleicht ist es besser, zunächst Bewegungen als Verkettungen von Klappungen zu definieren und anschließend Kongruenz dadurch, dass man das Tripel ABC durch eine Bewegung in das Tripel $A'B'C'$ überführen kann. Didaktisch gesehen, scheint mir das eher zweifelhaft.

8.5 Da zwei Winkel in einem Dreieck den dritten bestimmen, kann man in der Definition der Kongruenz z.B. die Gleichung $\gamma = \gamma'$ weglassen.

Dass man – mit gewissen Kautelen – nur drei Gleichheiten braucht, um auf Kongruenz zu schließen, ist der Inhalt der sogenannten Kongruenzsätze.

Proposition 8.6 Kongruenzsatz SSS. *Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind kongruent, wenn nur $a = a', \; b = b'$ und $c = c'$ ist.*

Der BEWEIS besteht darin, dass man zeigt, es lässt sich bis auf Kongruenz höchstens ein Dreieck mit drei gegebenen Seitenlängen a, b, c konstruieren. ($a, b, c > 0$ sei vorausgesetzt.)

Man fängt an, Punkte A, B mit dem Abstand c zu wählen. Alle Punkte, die von A den Abstand b haben, liegen auf dem Kreis K um (den Mittelpunkt) A mit (dem) Radius b. Diejenigen, die von B den Abstand a haben, auf dem Kreis K' um B mit Radius a.

Die Schnittpunkte von K und K' sind nun alle Möglichkeiten, den Punkt C so zu wählen, dass die Seiten, die gegebenen Längen haben.

Ist $a + b > c$ und $c > |a - b|$, so schneiden sich K und K' in genau zwei Punkten C, C', die symmetrisch zur Geraden durch A, B liegen. Die beiden Dreiecke ABC und ABC' sind aus Symmetriegründen kongruent.

(Ist $a + b = c$ oder $c = |a - b|$, so ist das entstehende Dreieck ausgeartet. Ist sogar $a + b < c$ oder $c < |a - b|$, so gibt es kein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c.)

Remark 8.7 Die o.a. Aussage über die Schnittpunkte zweier Kreise wird von Euklid in I7 bewiesen. Im Schulunterricht darf man sie für anschaulich klar halten. (Oder?)

Auch wird eine Art Homogenität der Ebene angenommen, die besagt: Macht man an einer Stelle einer Ebene eine Konstruktion und dieselbe Konstruktion an einer anderen Stelle, möglicherweise sogar in einer anderen Ebene, so erhält man kongruente Figuren. Dieses scheint in der Regel einem Kind nicht fraglich.

Euklid geht in I8 folgendermaßen vor: Er „legt“ das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'B'C'$ so dass A auf A' und B auf B' zu liegen kommt und C' auf die Seite der Geraden (Halbebene) auf der C liegt. Dann benutzt er, dass er in I7 bereits gezeigt hat, dass dann C mit C' zusammenfallen muss.

Will man diese Argumente in einer strengen Axiomatik benutzen, so muss man „Bewegungen“ als Abbildungen der Ebene in sich einführen und Axiome über solche bereitstellen.

Interessant ist auch der Zusammenhang mit einem mechanischen Phänomen: Wenn man drei Stäbe an ihren Enden **drehbar** verbindet, entsteht ein starres Dreieck. (Das ist nicht mehr so bei vier Stäben, die ein Viereck bilden.) Vielleicht ist dies ein guter Zugang zum Konruenzsatz SSS für Schulkinder. S.o.

Die folgenden beiden Kongruenzsätze werden wie obiger durch die Eindeutigkeit der Konstruktion „bewiesen“, d.h. sinnfällig gemacht.

Proposition 8.8 Kongruenzsatz SWS. *Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind kongruent, wenn $a = a',\ \gamma = \gamma',\ b = b'$ gilt.*

Proposition 8.9 Kongruenzsatz WSW. *...., wenn $\alpha = \alpha',\ c = c',\ \beta = \beta'$ gilt.*

Da die Größen zweier Dreieckswinkel die des dritten bestimmen, folgt hieraus sofort:

Corollary 8.10 Kongruenzsatz SWW. *...., wenn $c = c',\ \beta = \beta',\ \alpha = \alpha'$ gilt.*

Vorsicht: Man darf die beiden letzten Sätze **nicht** wie folgt zusammenfassen: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn je eine Seite und je zwei Winkel gleichgroß sind. **Warum nicht? Beispiel?**

Wenn man ein Dreieck aus zwei Seiten und einem Winkel konstruieren will, der nicht zwischen den beiden Seiten liegt, hat man häufig zwei Lösungen.

Glücklicherweise kann man diese gut voneinander unterscheiden.

Proposition 8.11 Kongruenzsatz SSW. *Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind kongruent, wenn $a = a',\ b = b',\ \alpha = \alpha'$ und zusätzlich β, β' beide spitze oder beide stumpfe oder beide rechte Winkel sind.*

Natürlich reicht in letztem Fall, dass einer der Winkel β, β' ein Rechter ist.

Ist ein Dreieckswinkel stumpf oder ein rechter, so sind die beiden anderen spitz. (Warum?) Deshalb:

Corollary 8.12 *Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind kongruent, wenn $a = a',\ b = b',\ \alpha = \alpha' > 90^o$ gilt.*

Ich muss gestehen, dass wir hier eigentlich nichts bewiesen haben. Aber von diesem Vorrat an „einsichtigen“ Kongruenzsätzen ausgehend, kann man die klassischen Sätze über geradlinige Figuren beweisen und noch mehr.

9 Gleichschenklige Dreiecke

Proposition 9.1 *Für ein Dreieck ABC gilt folgende Äquivalenz:*

$$a = b \iff \alpha = \beta \ .$$

Proof: Ist $a = b$, so ist wegen des Kongruenzsatzes SSS das Dreieck ABC zum Dreieck BAC kongruent. Also ist $\alpha = \beta$.

Ist $\alpha = \beta$, so ist wegen des Kongruenzsatzes WSW das Dreieck ABC kongruent zum Dreieck BAC. Also ist $a = b$ □

9.2 Eine weitere Beweismöglichkeit geht so:

Man beweist die Äquivalenz mit der Existenz einer Symmetrieachse für das Dreieck.

Angenommen $a = b$. Sei s die Winkelhalbierende von γ, d.h. die Symmetrieachse des Strahlenpaares $C \mapsto A, C \mapsto B$. Die Klappung an dieser Achse bilde A auf A' ab. Da der Strahl $C \mapsto A$ auf den Strahl $C \mapsto B$ abgebildet wird und $l(CB) = l(CA) = l(CA')$ ist, gilt $A' = B$. Das Dreieck ABC ist deshalb symmetrisch zu sich selbst bezüglich s, wobei die Klappung C festhält und A mit B vertauscht. Deshalb sind die beiden Dreieckswinkel bei A und B einander gleich.

Sei umgekehrt $\alpha = \beta$. Sei jetzt s die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Wegen $\alpha = \beta$ geht bei der Klappung um s die Gerade AC in die Gerade BC über, also auch ihr gemeinsamer Punkt C in einen gemeinsamen Punkt C'. Da aber zwei verschiedene Geraden nur einen gemeinsamen Punkt haben, bleibt C bei der Klappung um s fest, liegt also auf s. Wir haben dieselbe Situation wie oben, dürfen mithin auf $l(CA) = l(CB)$ schließen.

Definition 9.3 *Ein Dreieck, das die genannten äquivalenten Eigenschaften besitzt, heißt* **gleichschenklig**. *Die Seite AB heißt seine Basis, die Seiten CA und CB seine Schenkel, der Punkt C seine Spitze, die Winkel α und β seine Basiswinkel, γ der Spitzenwinkel. (Man benutzt diese Bezeichnungen auch dann, wenn γ stumpf ist.)*

Corollary 9.4 *In einem Dreieck sind genau dann die drei Seiten untereinander gleich, wenn die drei Winkel es sind.*

Definition 9.5 *In diesem Fall heißt das Dreieck* **gleichseitig** *oder auch* **regelmäßig**.

9.6 Aus 6 untereinander kongruenten gleichseitigen Dreiecken kann man ein regelmäßiges Sechseck auf folgende Weise zusammenbauen: **Skizze.**

(Dabei heißt ein Sechseck regelmäßig wenn sowohl alle seine Seiten, als auch alle seine Winkel untereinander gleich groß sind.)

Der den sechs Dreiecken gemeiname Eckpunkt M ist der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius gleich einer Seite des Sechsecks ist und der durch alle Eckpunkte des Sechsecks geht. Man kann also mit dem Zirkel leicht die sechs Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks konstruieren:

Man schlägt einen Kreis mit Radius r, wählt auf ihm einen Punkt, schlägt um diesen wieder einen Kreis mit demselben Radius r, wiederholt dies um einen der Schnittpunkte der beiden Kreise usw.

9.7 Die allgemeine Frage, was man wie mit mehr oder weniger Hilfsmitteln konstruieren kann, benutzt durchaus gelegentlich tiefere mathematische Theorien, z.B. die Körpertheorie der Algebra. (Hier bedeutet „Körper“ keinen geometrischen Gegenstand.)

Hier wollen wir sehen, wie man einen Winkel mit Hilfe der sogenannten **Einschiebung** dritteln kann:

(Unter $\angle AMB$ versteht man die Größe des Winkels zwischen zwei Strahlen mit dem gemeinsamen Anfangspunkt M, die durch A bzw. B gehen.)

Vom Mittelpunkt M eines Kreises mit Radius r zeichnen wir den zu drittelnden Winkel $\alpha = \angle A'MA$, wo A, A' auf dem Kreis liegen. Verlängere $A'M$ Über M hinaus. Auf einem Lineal markiere zwei Punkte B und C im Abstand r. Dann schiebe das Lineal so, dass es einerseits durch A läuft, der Punkt B auf dem Kreis liegt und der Punkt C auf der Geraden $A'M$. (Dieses Vorgehen heißt Einschiebung.) Man erhält folgende Figur:

Ich behaupte, dass der Winkel $\gamma = \angle A'CA$ ein Drittel so groß ist wie α.

Das Dreieck CBM ist gleichschenklig, da die Strecke CB nach Konstruktion die Länge r hat. Deshalb ist $\angle BMC = \gamma$. Ferner hat der Außenwinkel bei B das Maß 2γ. Da das Dreieck AMB ebenfalls gleichschenklig ist, gilt für $\beta := \angle AMB$ die Gleichung $\beta + 4\gamma = 180^o$. Ebenso gilt die Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$. Durch Subtraktion ergibt sich $\alpha - 3\gamma = 0$.

9.8 Die verwendete Methode geht über die so genannten „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“ hinaus. Bei diesen darf man Geraden nur so konstruieren, dass man sie durch 2 bereits konstruierte Punkte zieht.

Mit algebraischen Methoden kann man zeigen, dass man einen „allgemeinen“ Winkel (und auch konkrete Winkel, wie den von 60^o) nicht mit dieser eng gefassten Methode dritteln kann.

Mir ist es ein Rätsel, warum es immer wieder Menschen gibt, die das trotzdem versuchen – obwohl es, wie oben gesehen, eine durchaus geometrische Methode dazu gibt.

9.9 Mit Zirkel und Lineal (im engen Sinne) kann man je ein regelmäßiges 3-, 4-, 5-, 6-, 8-, 10-, 12-, 15-, 16-Eck konstruieren, ja sogar ein regelmäßiges 17-Eck. Ein regelmäßiges 9-Eck kann man so nicht, aber nach Obigem mit Hilfe der Einschiebung konstruieren. Das gilt übrigens auch für das 7-Eck, aber nicht mehr für das 11-Eck.

Oben haben wir zwei einfache Einsichten verwendet:
1. Jedes Dreieck aus dem Mittelpunkt und zwei Randpunkten eines Kreises ist gleichschenklig.
2.Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß wie ein Basiswinkel.
Das benutzen wir auch zum Beweis folgenden Satzes:

Proposition 9.10 *Seien $A, B.C$ verschiedene Punkte auf dem Rand eines Kreises und M dessen Mittelpunkt. Ferner mögen M und C auf der gleichen Seite der Geraden AB liegen. Im Extremfall darf M auf der Geraden AB liegen. Dann ist $\angle AMB$ doppelt so groß wie $\angle ACB$.*

Insbesondere sind alle Winkel $\angle ACB$ gleich groß, wenn A, B festgehalten werden und C auf dem Teil der Kreislinie läuft, der auf der gleichen Seite wie M bezüglich der Geraden AB liegt.

Proof: Spezialfall: M liege auf der Geraden AC (oder BC). Dann folgt die Behauptung direkt aus den o.a. Bemerkungen 1. und 2. Denn BMC ist gleichschenklig mit der Spitze M, also $\angle AMB = 2 \cdot \angle MCB$.

Ansonsten betrachten wir zwei Fälle:

1) M liegt innerhalb des Dreiecks ABC. Dann ziehen wir als Hilfslinie die Gerade MC. Diese schneide den Kreis in $P \neq C$. Nach dem Spezialfall ist sowohl $\angle AMP = 2 \cdot \angle ACM$ und $\angle BMP = 2 \cdot \angle BCM$. Durch Addition erhält man die Behauptung.

2) M liege außerhalb des Dreiecks ABC, oBdA wie in der Zeichnung. Wieder ziehen wir die Gerade MC als Hilfslinie, welche den Kreis in $P \neq C$ schneide. Wieder erhält man auf Grund des Spezialfalles $\angle BMP = 2 \cdot \angle BCM$ und $\angle AMP = 2 \cdot \angle ACM$. Diesmal erhält man die Behauptung durch Subtraktion. □

Liegt speziell M auf AB so erhält man den Satz von Thales:

Corollary 9.11 *Seien A, B die Enden eines Halbkreises und $C \neq A, B$ ein Punkt der Halbkreislinie, so ist $\angle ACB = 90^o$.*

Remarks 9.12 a) Wenn C und M auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen, so gilt für den Winkel $\angle BCA$ ein entsprechender Satz in Bezug auf den überstumpfen Winkel $\angle BMA$.

b) Der zweite Teil des Satzes 9.10 hat auch eine gültige Umkehrung: *Sind C, C' Punkte auf derselben Seite der Geraden AB mit $\angle ACB = \angle AC'B$ und liegt C auf dem Kreis k durch A, B, so liegt C' auf demselben Kreis k.*

Der Beweis sei dem Leser überlassen.

10 Der Strahlensatz

Definition 10.1 *Ein Parallelogramm ist ein Viereck, dessen jeweils gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind. ($AB||DC$ und $BC||AD$.)*

Proposition 10.2 *Für ein 'richtiges' Viereck $ABCD$ (dessen Seiten sich als* Strecken *nur in den vier Eckpunkten schneiden) sind äquivalent: (i) $ABCD$ ist ein Parallelogramm;*
(ii) die jeweils gegenüber liegenden Winkel sind gleichgroß ($\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$);
(iii) die jeweils gegenüberliegenden Seiten sind gleich groß: ($l(AB) = l(CD)$ und $l(BC) = l(AD)$;
(iv) die Diagonalen schneiden einander in ihren Mittelpunkten.

Proof: (i) und (ii) sind äquivalent auf Grund der Beziehungen zwischen Schnittwinkeln und Parallelität.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Die Dreiecke ABC und CDA sind nach WSW kongruent, da sie die Seite CA gemeinsam haben und die entsprechenden Winkel als Wechselwinkel an Parallelen gleich groß sind.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Hier gilt die Kongruenz der Dreiecke nach SSS.

Der Beweis von '(iv) $\Rightarrow$ (iii)' und '(i) und (iii) $\Rightarrow$ (iv)' sei dem Leser überlassen. $\square$

Proposition 10.3 *Sei ABC ein Dreieck und $n > 0$ ganz. Verlängere die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ über B bzw. C hinaus zu $\overline{AB'}$, bzw. $\overline{AC'}$, so dass $C'D'||CD$ gilt und $l(AB') = n \cdot l(AB)$ ist. Dann ist $l(B'C') = n \cdot l(BC)$.*

Proof: Induktion nach n, wobei der Fall $n = 1$ trivial ist. Sei $l(AB') = n \cdot l(AB)$ und B'' auf der Geraden AB', so dass B' zwischen A und B'' liegt und $l(AB'') = (n+1) \cdot l(AB)$. Ferner sei C'' auf der Geraden AC, so dass $B''C''||BC$ ist. Ziehe durch C' die Parallele zu AB. Diese schneide $B''C''$ in D. Dann ist $l(C'D) = l(B'B'') = l(AB)$. Es folgt, dass ABC und $B'DC''$ kongruent sind. Da $l(B''D) = l(B'C') = n \cdot l(BC)$ ist, gilt $l(B''C'') = (n+1) \cdot l(BC)$. $\square$

10.4 Aufgabe: Teilen Sie eine beliebige Strecke in n gleiche Teile.

Corollary 10.5 *Seien g, h Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt A. Ferner seien k, l zueinander parallele Geraden, die g in B', B'' und h in C', C'' schneiden. Dann gilt $l(B''C'')/l(B'C') = l(AB'')/l(AB')$.*

Proof: Ist das Verhältnis $l(AB'')/l(AB') = m/n$ rational, so folgt die Behauptung aus obigem Satz, indem man B auf der Strecke $\overline{AB'}$ so wählt, dass $l(AB) = l(AB')/n$ ist und C der Schnittpunkt von der zu k parallelen Geraden durch B mit h ist.

Der Fall eines irrationalen Verhältnisses wird behandelt, indem man reelle Zahlen als Dedekindsche Schnitte betrachtet. Dazu hat man folgendes zu zeigen: *Ist $l(AB'')/l(AB') < m/n$, (bzw. $l(AB'')/l(AB') > m/n$), so ist auch $l(B''C'')/l(B'C') < m/n$, (bzw. $l(B''C'')/l(B'C') > m/n$.*

Sei D auf dem Strahl AB, so dass $l(AD) = \frac{m}{n} \cdot l(AB')$ und E auf dem Strahl AC, so dass $DE||BC$. Dann sieht man leicht, dass $l(DE) > l(B''C'')$ ist. Nach dem bereits bewiesenen Fall ist aber $l(DE) = \frac{m}{n} \cdot l(B'C')$.

Den Fall der anderen Ungleichung behandelt man analog. $\square$

Corollary 10.6 *Unter den Bedingungen des Satzes gilt auch $l(AB'')/l(AB') = l(AC'')/l(AC')$.*

Corollary 10.7 *Seien g, h Geraden, die durch 4 parallele Geraden k_1, k_2, k_3, k_4 in A_1, A_2, A_3, A_4 auf g und B_1, B_2, B_3, B_4 auf h geschnitten werden. Dann gilt $l(A_1A_2)/l(A_3A_4) = l(B_1B_2)/l(B_3B_4)$.*

Hierzu gibt es eine Umkehrung:

Proposition 10.8 *Seien g, h Strahlen, die durch 4 verschiedene Geraden k_1, k_2, k_3, k_4 in A_1, A_2, A_3, A_4 auf g und B_1, B_2, B_3, B_4 auf h geschnitten werden. Die Geraden k_1, k_2, k_3 seien parallel. Ferner gelte $l(A_1A_2)/l(A_3A_4) = l(B_1B_2)/l(B_3B_4)$. Dann ist auch k_4 zu k_1 parallel.*

Proposition 10.9 *Sei ABC ein Dreieck. Die Winkelhalbierende durch C schneide die Seite $\overline{AB}$ in Q. Dann gilt*

$$l(AQ) : l(BQ) = l(AC) : l(BC).$$

Proof: Verlängere die Seite $\overline{AC}$ über C hinaus bis zu einem Punkt D, so, dass $l(CD) = l(CB)$ ist. Dann ist BCD ein gleichschenkliges Dreieck.

Da γein Außenwinkel an der Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks ist, gilt $\delta = \gamma/2$ für den Basiswinkel $\delta := \angle(ADB)$. Wegen der Gleichheit der Stufenwinkel ist also $BD||QC$.

Die Aussage des Satzes folgt nach dem Strahlensatz, da $l(BC) = l(DC)$ ist. □

Proposition 10.10 *Seien ABC, A', B', C' Dreiecke. Dann sind äquivalent:*
(I) $\alpha = \alpha', \ \beta = \beta', \ \gamma = \gamma'$;
(ii) $a/a' = b/b' = c/c'$;
(iii) $a/b = a'/b', \ a/c = a'/c'$.

In (i) genügen natürlich zwei der Gleichheiten.

Proof: (ii) $\iff$ (iii) kann man mit elementarem Rechnen einsehen.

(i)$\Rightarrow$(ii): Lege die beiden Dreiecke so (Kongruenzabbildung), dass $C = C'$ und A' auf dem Strahl von C aus durch A liegt. Da $\gamma = \gamma'$ ist, liegt auch B' auf dem Strahl von C aus durch B. Da $\alpha = \alpha'$ ist, sind die Geraden AB und $A'B'$ zueinander parallel. Dann folgt (ii) mit Hilfe des Strahlensatzes.

(ii)$\Rightarrow$(i): Lege die beiden Dreiecke so (Kongruenzabbildung), dass $C = C'$ und A' auf dem Strahl von C aus durch A liegt. Wähle dann B'' auf dem Strahl von C durch B so, dass $A'B''$ zu AB parallel ist. Dann gilt nach dem Stahlensatz $l(A'B'')/l(AB) = c'/c$. Es folgt $l(A'B'') = c' = l(A'B')$. Ebenso folgt $lB''C) = a'$. Deshalb gilt $A'B''C' \cong A'B'C'$. Es folgt die Gleichheit der entsprechenden Winkel. □

11 Merkwürdige Punkte des Dreiecks

Diesen altmodischen Namen habe ich noch auf der Schule gelernt. Heute wird man eher von zentralen Punkten im Dreieck reden. Wir werden hier die folgenden zentralen Punkte betrachten: Den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, den der Winkelhalbierenden, den der Seitenhalbierenden, den der Höhen. In einem gleichschenkligen Dreieck liegt jeder dieser Punkte auf der Symmetrieachse, in einem gleichseitigen Dreieck fallen sie mithin zusammen. In allen Fällen muss man zeigen, dass sich drei Geraden in einem Punkt schneiden. Es gibt weitere Punkte, die man mit Recht als 'des Merkens würdig' bezeichnen kann, z.B. den Mittelpunkt des Feuerbachkreises, den wir später kennenlernen werden.

11.1 Mit Hilfe der Kongruenzsätze zeigt man, dass ein Punkt genau dann von zwei gegebenen Punkten A und B den gleichen Abstand hat, wenn er auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegt.

Ausführlicher: Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, also $l(AM) = l(BM)$, und P liege auf der Geraden g, die senkrecht auf AB steht und durch M geht. Dann ist $l(MP) = l(MP)$, $(APM) = (BPM)$ und $l(AM) = l(BM)$, also $AMP \cong BMP$ gemäß Kongruenzsatz SWS. Mithin ist $l(PA) = l(PB)$.

Sei umgekehrt P von A und B gleichweit entfernt und M der Fußpunkt des Lotes von P auf AB. Dann gilt $l(PM) = l(PM)$, $l(PA) = l(PB), (PMA) = (PMB) = 90^o$. Nach SSW mit einem Winkel $\geq 90^o$ ist $AMB \cong BMP$, also $l(MA) = l(MB)$.

Entsprechend zeigt man, dass ein Punkt von zwei Strahlen, die von einem Punkt ausgehen und einen Winkel von weniger als 180^o einschließen genau dann zwei gleichlange Lote auf diese Strahlen hat, wenn er auf der Winkelhalbierenden liegt.

Liege P auf der Winkelhalbierenden und seien A. B die Fußpunkte der Lote von P auf die Schenkel des Winkels. Dann ist $l(CP) = l(CP)$, $(PCA) = (PCB)$, $(PAC) = (PBC)$. Dann ist $APC \cong BCP$ gemäß SWW, also $l(AP) = l(BP)$.

Sei umgekehrt P von den beiden Schenkeln gleichweit entfernt und seien A, B die Fußpunkte der Lote von P auf die beiden Schenkel. Dann ist $l(PA) = l(PB)$, $(PAC) = (PBC) = 90^o$, $l(PC) = l(PC)$, also $APC \cong BCP$ nach SSW und somit $(PCA) = (PCB)$.

11.2 Umkreismittelpunkt. Sei U der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$. Dann ist $l(AU) = l(BU)$ und $l(BU) = l(CU)$, also $l(AU) = l(CU)$. Somit liegt U auch auf der Mittelsenkrechten von $\overline{CA}$. Also schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt. Und dieser hat zu allen Eckpunkten denselben Abstand; dieser sei r. Der Kreis um U mit Radius r geht also durch alle drei Eckpunkte. Es gibt aber auch keinen anderen Kreis durch alle drei Eckpunkte. Denn dessen Mittelpunkt muss auf den Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ liegen. Diese sind aber ungleich und nicht parallel, da ABC nicht ausgeartet ist.

Der Umkreismittelpunkt kann außerhalb des Dreiecks liegen.

FRAGE: Angenommen, Sie haben einen Kreis etwa durch Umfahren eines kreisrunden Tellers gezeichnet, kennen also nicht seinen Mittelpunkt. Wie finden Sie diesen?

11.3 Inkreismittelpunkt. Da die Winkelhalbierende eines Strahlenpaares aus den Punkten besteht, die zu beiden Strahlen gleichen Abstand haben, schneiden sich die Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks in einem Punkt, dem Punkt der von allen drei Seiten gleichen Abstand hat. Er ist der Mittelpunkt des Kreises, der alle drei Seiten eines Dreiecks von innen berührt.

Der Inkreismittelpunkt liegt im Inneren des Dreiecks.

Analog gibt es auch drei so genannte Ankreise.

11.4 Schwerpunkt. Die Seitenhalbierende der Seite $\overline{BC}$ ist die Gerade durch A und den Mittelpunkt M_a der Seite $\overline{BC}$. Analog seien die anderen Bezeichnungen gewählt.

Sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden von $\overline{BC}$ und der Seitenhalbierenden von $\overline{CA}$. Die Gerade M_aM_b ist nach der Umkehrung des Strahlensatzes parallel zu AB. Und nach dem Strahlensatz, angewandt auf die Seiten CA, CB, ist $l(AB) = 2l(M_aM_b)$. Wiederum nach dem Strahlensatz, diesmal angewandt auf die beiden Seitenhalbierenden, sieht man $l(SA) = 2l(M_aS)$ (und $l(SB) = 2l(M_bS)$). Ist S' der Schnittpunkt von CM_c mit AM_a, so muss analog $l(S'A) = 2l(M_aS')$ gelten. Daraus folgt $S = S'$. Die Seitenhalbierende von $\overline{BC}$ geht also auch durch S.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt in seinem Inneren.

11.5 Die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks bilden wieder ein Dreieck, das sogenannte **Mittendreieck**. Dieses hat die gleichen Winkel wie das Ausgangsdreieck. (Genauer ist jeweils ein Winkel des Ausgangsdreieck gleichgroß dem Winkel in der Mitte der gegenüberliegenden Seite.) Entsprechende Seiten des Ausgangsdreiecks und des Mittendreiecks sind parallel. Jede Seite des Ausgangsdreiecks ist doppelt so lang wie die entsprechende Seite des Mittendreiecks.

11.6 Fällt man von A, bzw. B aus die Lote auf die Seitenhalbierende s_c von $\overline{AB}$ mit den Fußpunkten A', bzw. B', so erhält man zwei nach WWS kongruente rechtwinklige Dreiecke $AA'M_c$, bzw. $BB'M_c$. Man erkennt, dass A und B von s_c gleichen Abstand haben. Da entsprechendes für die anderen Seitenhalbierenden gilt, sieht man, dass S der Schwerpunkt der dreipunktigen Menge $\{A, B, C\}$ ist.

Ebenso sieht man, dass jede Seitenhalbierende die Dreieckfläche in gleichgroße Dreiecksflächen aufteilt. Darüberhinaus gilt folgendes: Schneidet man die Dreiecksfläche durch die beiden Parallelen zu einer Seitenhalbierenden die von dieser denselben Abstand r haben, so sind die beiden Schnittstrecken gleichlang nach dem Strahlensatz. Daraus folgt, dass S auch der Schwerpunkt der Dreiecksfäche ist. Im Allgemeinen ist S aber nicht der Schwerpunkt des Dreieckumfangs.

11.7 Das Doppeldreieck. Zieht man durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks die Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten, so erhält man ein Dreieck, das sogenannte Doppeldreieck, dessen Seiten doppelt so lang sind wie die des Ausgangsdreiecks. Das Ausgangsdreieck ist das Mittendreieck des Doppeldreiecks. Dies sieht man, indem man die entstehenden vier kleinen Dreiecke als untereinander kongruent erweist.

11.8 Der Höhenschnittpunkt. Die Höhen eines Dreiecks ABC sind die Lote der Eckpunkte auf die gegenüberliegende Seite. Dabei kann der Fußpunkt ein es solchen Lotes außerhalb des Dreiecks liegen. Offenbar sind die Höhen eines Dreiecks die Mittelsenkrechten seines Doppeldreiecks, schneiden sich also in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt (auch **Orthozentrum** genannt).

Remark 11.9 Im Raum betrachte man anstelle eines Dreiecks ein **Tetraeder**, das durch 4 Punkte gegeben wird, die nicht in einer Ebene liegen. In einem Tetraeder schneiden sich die Höhen nicht immer in einem Punkt.

Hingegen gibt es Analoga zum Umkreis- und Inkreis-Mittelpunkt und zum Schwerpunkt.

12 Vektoren, Skalarprodukt

Vektoren Unter einem **Vektor** kann man durchaus verschiedene Dinge verstehen, die allerdings miteinander etwas zu tun haben:

a) Ein **Pfeil**, d.h. eine **gerichtete Strecke** in der Ebene oder im Raum. (Eine gerichtete Strecke ist eine Strecke, deren Endpunkte man nicht als gleichberechtigt ansieht, sondern einen als **Anfangspunkt**, den anderer als **Zielpunkt** bezeichnet. Am einfachsten sollte man einen Pfeil als Punktepaar auffassen.)

b) Die **Klasse** aller der Pfeile, die aus einem gegebenen Pfeil durch Parallelverschiebeung hervorgeht.

b') Nachdem ein Ursprungspunkt O festgelegt ist, ein Pfeil, dessen Anfangspunkt O ist.

c) Ein Paar (a_1, a_2) oder ein Tripel (a_1, a_2, a_3) oder, allgemeiner, ein sogenanntes n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ reeller Zahlen (allgemeiner Elemente eines Körpers).

d) Ein Element eines Vektorraumes.

12.1 Wir beginnen mit 'geometrischen' Vektoren gemäß b). Man hat zwei Möglichkeiten:

1) Man fixiert einen Punkt O im Raum (oder der Ebene) und betrachtet als Vektoren nur gerichtete Strecken, deren Anfangspunkt O ist. Ist die gerichtete Strecke ausgeartet in dem Sinne, dass O auch ihr Endpunkt ist, so ist der entsprechende Vektor der Nullvektor.

2) Man betrachtet als Vektoren beliebige gerichtete Strecken, nennt aber zwei solche 'gleich', wenn sie durch Parallelverschieben auseinander hervorgehen. Äquivalent dazu kann man einen Vektor als die ganze Klasse (Gesamtheit) derjenigen gerichteteten Strecken ansehen, die aus einer solchen durch Parallelverschiebung hervorgehen.

Der Zusammenhang zwischen 1) und 2) entsteht dadurch, dass es bei fixiertem O zu jeder gerichteten Strecke (a, b) genau eine parallelverschobene gerichtete Strecke gibt, derenAnfangspunkt O ist. (Man hat, nach Wahl von O genau ein Element einer Klasse untereinander parallelverschobener Strecken ausgezeichnet. Ein solches Element nennt man auch einen Vertreter oder Repräsentanten der Klasse.)

Definition 12.2 *a) Ein* **Vektor** *(im Raum oder in der Ebene) ist eine „gerichtete Strecke $\vec{AB}$“, man kann auch sagen einfach ein Paar von Punkten (A, B), (wo (A, B) von (B, A) unterschieden wird) wobei zwei solche gerichtete Strecken $\vec{AB}$, $\vec{A'B'}$ als gleiche Vektoren angesehen werden, wenn sie durch Parallelverschiebung ineinander übergehen. Genau genommen ist ein Vektor also eine Äquivalenzklasse gerichteter Strecken bezüglich folgender Äquivalenzrelation*

$$\vec{AB} \sim \vec{A'B'} \iff \vec{A'B'} \text{ geht durch Parallelverschiebung aus } \vec{AB} \text{ hervor.}$$

Wir betrachten auch den **Nullvektor***, der durch $\vec{AA}$ gegeben ist, wo A ein beliebiger Punkt sein darf.*

b) Die Summe $v + w$ zweier Vektoren wird so definiert: v sei durch $\vec{AB}$ gegeben. Dann kann man w durch eine gerichtete Strecke der Form $\vec{BC}$ geben. Die Summe $v + w$ wird dann durch $\vec{AC}$ beschrieben.

12.3 Wenn man einen 'Ursprungspunkt' O festlegt , kann man sich zur Beschreibung aller Vektoren darauf beschränken, nur Punktepaare OB zu betrachten. Eine beliebige gerichtete Strecke $\vec{AB}$ kann man so parallel verschieben, dass A in den Punkt O geschoben wird. Dann wird $\vec{AB}$ zu der gerichteten Strecke $\vec{OB'}$, die den gleichen Vektor bestimmt. Nach Festlegung von O wird $\vec{OB'}$ durch den Endpunkt B' bestimmt. Man hat also eine Bijektion der Menge der Punkte in der Ebene (dem Raum) zur Menge der Vektoren in der Ebene (dem Raum), die allerdings von dem gewählten Ursprungspunkt O abhängt. Dem Nullvektor wird dabei der Punkt O zugeordnet.

Für Vektoren im Raum oder in einer Ebene kann man die Wohldefiniertheit obiger Konstruktionen zeigen. Wir sprechen gelegentlich von geometrischen Vektoren, wenn wir den Unterschied zu den Elementen eines beliebigen („abstrakten“) Vektorraumes betonen wollen.

12.4 Man kann leicht folgende Gesetze zeigen:

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

$$v + w = w + v$$

$$0 + v = v + 0 = v$$

Darüber hinaus gibt es zu jedem Vektor v ein **additiv Inverses**, geschrieben $-v$ mit der Eigenschaft $v + (-v) = (-v) + v = 0$. Wird nämlich v durch $\vec{AB}$ gegeben, so $-v$ durch $\vec{BA}$.

Das ganze gilt natürlich nicht nur für die Vektoren im Raum oder einer Ebene, sondern natürlich auch für Vektoren in einer Geraden! Man wähle auf einer solchen einen Punkt, den man 0 nennt und betrachtet nur Punktepaare $\vec{0B}$. Diese repräsentieren alle Vektoren der Gerade. Man wähle einen von 0 verschiedenen Punkt 1 auf der Geraden. Dann kann man die Vektoren die „von 0 in Richtung 1 gehen“ mit den nichtnegativen reellen Zahlen identifizieren, wie wir bereits wissen. Wenn man jetzt alle Vektoren in der Geraden betrachtet, so bilden diese bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe, in der jedes Element eine nichtnegative reelle Zahl oder deren additiv Inverses repräsentiert. Es liegt also nahe die additive Gruppe aller reellen Zahlen als die Punkte auf der Geraden anzusehen (auf der die Punkte 0 und 1 festgelegt sind).

12.5 Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und der Vektor v (im Raum, einer Ebene oder einer Geraden) durch $\vec{AB}$ gegeben, so sei λv durch $\vec{AB'}$ gegeben, wobei B' auf der Geraden AB liegt, $l(AB') = |\lambda| l(AB)$ und B' auf derselben Seite von A wie B liegt, wenn $\lambda > 0$ ist, und auf der anderen Seite, wenn $\lambda < 0$ ist. Ist $A = B$ oder $\lambda = 0$ so sei λv der Nullvektor.

Man zeigt leicht, dass folgende Regeln gelten:

$$1v = v, \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu w\ .$$

Wendet man diese Multiplikation einer reellen Zahl auf die Vektoren in der Zahlengeraden an, die zu den Punkten der Zahlengeraden, also den reellen Zahlen korrespondieren, so bekommt man die Multiplikation im Bereich aller reeller Zahlen. Nach dieser Definition ist trivialer Weise $(-\lambda)(-\mu) = \mu$.

12.6 Fixiere einen Ursprungspunkt O. Seien im Raum B_1, B_2, B_3 Punkte, die nicht zusammen mit P in einer Ebene liegen, und seien $b_i := \vec{PB_i}$ die entsprechenden Vektoren, dann kann man geometrisch leicht zeigen, dass (b_1, b_2, b_3) eine Basis des Vektor-Raumes aller Vektoren des Raumes ist. D.h. jeder Vektor lässt sich auf eindeutige Weise in der Form $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$ schreiben. Jeder Vektor des Raumes lässt sich also – nach Wahl der $b_1, b_2.b_3$ – eindeutig durch ein Tripel von reellen Zahlen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ beschreiben. So lässt sich dann natürlich jeder Punkt des Raumes – nach Wahl eines Ursprungs P und einer Vektorraumbasis – durch ein Tripel von

Zahlen beschreiben. (Für die Ebene hat man natürlich eine Basis aus 2 Vektoren, und für die Gerade ...??)

Das Tripel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ist kann man natürlich auch als Koordinatentripel des entsprechenden Punktes auffassen. Dazu wählt man als Koordinatenursprung den Ursprungspunkt O, die Koordinatenachsen als die drei Geraden durch $O; B_i$ mit $i = 1, 2, 3$ und die Punkte B_i als 'Einheitspunkte' auf den Achsen.

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to V_3$, die durch $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$ definiert wird, ist bijektiv und offenbar ein $\mathbb{R}$-linear, also ein Isomorphismus.

Naheliegend ist natürlich, dass man eine Einheitslänge auszeichnet und alle b_i von dieser Länge und aufeinander senkrecht stehend wählt. Auf solche **Orthonormalbasen** kann man sich natürlich für die Schule beschränken.

Proposition 12.7 *Die Zuordnung $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \mapsto \lambda_1 b_1$ ist $\mathbb{R}$-linear.*

12.8 Zusammen mit einem Ursprungspunkt entspricht einer Basis in dem Vektorraum des Raumes (bzw.) der Ebene ein Koordinatensystem wie folgt:

BILD!

12.9 Skalarprodukt. Sei eine Einheitslänge festgelegt.

Für geometrische Vektoren v, w im Raum definiert man ihr Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$, wie folgt: Wähle die gerichteten Strecken, die v, w repräsentieren, so, dass sie einen gemeinsamen Anfangspunkt O haben. $v = \vec{OA}, w = \vec{OB}$.

Fall 1: $v \neq 0$. Identifiziere die Gerade g durch O, A mit $\mathbb{R}$, natürlich so, dass O der Null entspricht und die Verbindungsstrecke von 0 zu 1 die Länge 1 habe und 1 auf derselben Seite von O liegt wie A.

Sei B' (bzw. w') die orthogonale Projektion von B (bzw. w) auf die Gerade durch g. Dann sei

$$\langle v, w\rangle := A \cdot B'$$

wobei A und B vermöge der Identifizierung von g mit $\mathbb{R}$ als Zahlen aufgefasst werden.

Dies kann man auch so formulieren: $\langle v, w\rangle := \pm|v| \cdot |w'|$, wobei $|v|, |w'|$ die jeweiligen Längen bezeichnen und das Vorzeichen ein $+$ ist, wenn die beiden Vektoren v, w' in die gleiche Richtung zeigen, hingegen ein $-$ ist, wenn sie in entgegengesetzte Richtung zeigen.

Man braucht also, um das geometrische Skalarprodukt zu definieren, eine Längeneinheit und den Begriff des rechten Winkels.

Fall 2: Sei $v = 0$. Dann kann man g als beliebige Gerade durch O und den Punkt 1 auf ihr auf einer der beiden Seiten beliebig wählen. Immer kommt als Ergebnis 0 heraus.

(Wenn man allgemein die Winkelmessung beherrscht und die Cosinus-Funktion kennt, kann man auch definieren:

$$\langle v, w\rangle := |v||w| \cos\alpha\,,$$

wo α den von v, w eingeschlossenen Winkel bezeichnet. (Beachte, dass $\cos\alpha = \cos(-\alpha) = \cos(360^o - \alpha)$ ist, und deshalb keine Schwierigkeit mit der Definition der Winkelgröße auftritt.))

Wie man es auch macht, ist es leicht, folgende Gesetze zu beweisen:

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \tag{1}$$
$$\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \tag{2}$$
$$\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle \tag{3}$$
$$\langle v, w\rangle = 0 \iff v\perp w \tag{4}$$
$$\langle v, v\rangle = |v|^2 \tag{5}$$

Dabei bedeutet $v\perp w$, dass v auf w im geometrischen Sinne senkrecht steht, oder einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist.

Proof: 1. Ist v' bzw. A' die orthogonale Projektion von v bzw. A auf die Gerade OB, so ist $OB'B \sim OA'A$ also $l(OA)l(OB') = l(OB)l(OA')$. Damit folgt $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$.

2. , 3. Die orthogonale Projektion des Vektorraumes V auf eine Zahlengerade ist linear.

Dies kann man mit Satz 12.7 einsehen, indem man b_1 als Einheitsvektor in Richtung von v wählt und zu einer orthogonalen Basis ergänzt. Der Rest ist trivial. □

12.10 Nun wähle man im Raum eine Basis b_1, b_2, b_3 mit $|b_i| = 1$ und $b_1\perp b_2\perp b_3\perp b_1$. Dann gilt

$$\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$$

also

$$\langle \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3\rangle = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3$$

Hieraus folgt die positive Definitheit des Skalarproduktes.

Es folgt auch der Satz des Pythagoras:

Theorem 12.11 $|\lambda b_1 + \mu b_2|^2 = \lambda^2 + \mu^2$.

Dies ist nicht tautologisch, da ich das Skalarprodukt der Vektoren $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$ und $\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$ nicht etwa als $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3$ *definiert* habe, sondern dies aus einer geometrischen Definition gefolgert habe!

Proposition 12.12 (Euklid) *Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C und D der Fußpunkt der C-Höhe, d.h. des Lotes von C auf AB. Da α und β spitz sind, liegt P zwischen A und B. Sei $s := l(AP)$, $t := l(BP)$, $h := l(CP)$. Dann gilt $st = h^2$, $sc = b^2$ und $tc = a^2$.*

Proof: Aus dem Satz des Pythagoras, angewendet auf drei Dreiecke folgt:

$$(s+t)^2 = a^2 + b^2,\ a^2 = t^2 + h^2,\ b^2 = s^2 + h^2$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$s^2 + 2st + t^2 = t^2 + h^2 + s^2 + h^2, \text{ also } st = h^2.$$

Ferner rechnet man

$$sc = s^2 + st = s^2 + h^2 = b^2.$$

Die letzte Behauptung ergibt sich entsprechend. □

Für später zeigen wir noch

Proposition 12.13 *Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C und einem spitzen Spitzenwinkel. Sei ferner F der Fußpunkt des Lotes von A auf BC und $s = l(BF)$. Dann gilt $c^2 = 2as$.*

Proof: Sei h_c die Länge der Höhe von A aus. Wende den Pythagoras auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABF und ACF an:

$$s^2 + h_a^2 = c^2, \qquad (a-s)^2 + h_a^2 = a^2$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$a^2 - 2as + s^2 + h_a^2 = a^2 \ .$$

Wenn wir hierin $s^2 + h_a^2$ gemäß der ersten Gleichung durch c^2 ersetzen, erhalten wir

$$a^2 - 2as + c^2 = a^2 \ ,$$

woraus die behauptete Gleichung unmittelbar folgt. $\square$

13 Der Satz von Ceva und ein weiterer zentraler Punkt im Dreieck

13.1 VORBEMERKUNGEN: Betrachte die Elemente des $\mathbb{R}^3$ sowohl als Vektoren, wie als Punkte. Nämlich Nach Wahl eines Ursprungs O sei jeder Vektor durch ein Punktepaar $\vec{OA}$ mit dem Anfangspunkt O gegeben. Jedem solchen Punktepaar ist eindeutig sein Endpunkt zugeordnet. Nach Wahl einer Basis (b_1, b_2, b_3)

Theorem 13.2 *Auf den Seiten des Dreiecks ABC seien Punkte A', B', C' wie in folgende Skizze gewählt, die mit keinen der Punkte A, B, C zusammenfallen. Die Teilstrecken haben die in der Skizze angegebenen Längen a_i, b_i, c_i, so dass $a_1 + a_2 = a$ usw. ist. Dann gilt: Die Geraden AA', BB', CC' schneiden sich genau dann in einem gemeinsamen Punkt, wenn*

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1 \quad \textit{ist.}$$

BILD!

Proof: Wir wählen ein (nicht notwendig orthogonales) Koordinatensystem wie folgt: C ist der Ursprung, CA die x-Achse, CB die y-Achse. Die Koordinaten seien auf beiden Achsen bezüglich derselben Längeneinheit gemessen, wie auch die a_i, b_i, c_i. Die Gerade AA' hat als Gleichung

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a_2} = 1, \quad \text{oder dazu äquivalent} \quad a_2 x + by = a_2 b$$

Entsprechend hat BB' als Gleichung:

$$ax + b_1 y = ab_1$$

Wir bestimmen die Koordinaten x_0, y_0 von C' mit Hilfe des Strahlensatzes

$$\frac{x_0}{b} = \frac{c_2}{c}, \text{ d.h. } x_0 = \frac{bc_2}{c}, \qquad \frac{y_0}{a} = \frac{c_1}{c}, \text{ d.h. } y_0 = \frac{ac_1}{c} \ .$$

Die Gerade CC' hat somit als Geradengleichung

$$ac_1 x - bc_2 y = 0$$

Die drei Geraden haben also genau dann einen Punkt gemeinsam, wenn das LGS

$$\begin{array}{rcrcc} a_2 x & + & by & = & a_2 b \\ ax & + & b_1 y & = & ab_1 \\ ac_1 x & - & bc_2 y & = & 0 \end{array}$$

eine eindeutige Lösung hat. Da je zwei der Geraden genau einen gemeinsamen Punkt haben, hat die eingeschränkte Koeffizientenmatrix den Rang 2 und das Gleichungssystem hat höchstens eine Lösung. Zur Existenz ist es also notwendig und hinreichend, dass

$$\det \begin{pmatrix} a_2 & b & a_2 b \\ a & b_1 & ab_1 \\ ac_1 & -bc_2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Nach der Leibniz-Formel (Sarrus) berechnet sich die Determinante zu

$$bab_1ac_1 - a_2babc_2 - a_2bb_1ac_1 + a_2ab_1bc_2 = ab(ab_1c_1 - a_2bc_2 - a_2b_1c_1 + a_2b_1c_2)$$

$$= ab((a - a_2)b_1c_1 - (b - b_1)a_2c_2) = (ab)(a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2) \ .$$

Letzter Ausdruck ist genau dann 0, wenn die im Satz genannte Bedingung erfüllt ist.

Corollary 13.3 *Sei ABC ein Dreieck. Zum Eckpunkt A sei auf der Seite BC derjenige Punkt A' gewählt, der zusammen mit A den Dreiecksumfang in zwei gleichlange Teile zerlegt. D.h. es soll $l(AB)+l(BA') = l(AC)+l(CA')$ gelten. Entsprechend seien B' zu B und C' zu C gewählt. Dann schneiden sich die Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkt.*

Proof: Sei s die halbe Summe der Seitenlängen. Mit obigen Bezeichnungen ist in dem betrachteten Fall: $a + b_1 = s = a + c_2$, folglich $b_1 = c_2$. Analog folgt $a_1 = b_2$ und $c_1 = a_2$. Somit gilt $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$. □

Remark 13.4 Es wäre zu schön, wenn man diesen Satz verallgemeinern könnte, wenn etwa bei jeder geshlossenen konvexen Kurve, diejenigen Geraden, die den Umfang einer solchen Kurve halbieren, sich in einem Punkt schneiden. Leider gilt dies nicht.

Beispiel. Betrachte in einem orthonormalen Koordinatensystem das Dreieck mit den Eckpunkten $C = (0,0), A = (0,4), B = (3,0)$. Hier ist $a = 3, b = 4, c = 5$, also $a + v = s = 6$, deshalb $v = 3$, entsprechend $b + u = 6$ und deshalb $u = 2$.

BILD!

Der o.a. Punkt ist also $F = (3 \cdot 2/6\ ,\ 4 \cdot 3/6) = (1,\ 2)$. Eine Gerade die den Dreiecksumfang halbiert, ist die durch den Punkt $(0,1)$ und den Punkt D, der die Hypothenuse $\overline{AB}$ im Verhältnis $3:2$ teilt. (D.h. $l(AD)/l(DB) = 3/2$.) Es gilt $D = \frac{2}{5} \cdot (0,4) + \frac{3}{5} \cdot (3,0) = (9/5\ ,\ 8/5)$. Ohne zu rechnen, sieht man, dass F deutlich außerhalb der Geraden durch $(0,1)$ und $(9/5\ ,\ 8/5)$ liegt.

14 Geometrie im Vektorraum, Abbildungen

Hier werden wir Geraden, Ebenen und den Raum als Mengen ihrer Punkte betrachten.

14.1 Wir fixieren im Raum, bzw. in der Ebene einen Ursprungs-Punkt O und identifizieren so den (dreidimensionalen) euklidischen Raum, bzw. die euklidische Ebene mit dem Vektorraum V_3 der Vektoren im Raum, bzw. V_2 derer in der Ebene. Jeder Punkt A wird mit dem Vektor $\vec{OA}$ identifiziert. Umgekehrt kann man jeden Vektor v eindeutig in der Form $v = \vec{OA}$ darstellen. Diesem wird dann der Punkt A zugeordnet.

14.2 Man überlegt sich leicht, dass die Geraden (im Raum oder in der Ebene) genau die Mengen der Form $\{w + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ sind, wo $v \neq 0$ und w feste Vektoren sind. (Natürlich sind weder v noch w durch die Gerade, die sie bestimmen, eindeutig gegeben.)

Entsprechend sind die Ebenen im Raum genau die Mengen der Form $\{w + sv_1 + tv_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$, wo v_1, v_2, w feste Vektoren sind und das Paar (v_1, v_2) linear unabhängig ist.

Man lernt in der Linearen Algebra, dass Ebenen und Geraden sich auch als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme beschreiben lassen. Genauer gilt das Folgende:

Sei V_3, bzw. V_2 der Vektorraum der Vektoren im Raum bzw. einer Ebene. Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $A\vec{x} = b$ ist eine Ebene, bzw. eine Gerade, wenn $A : V_3 \to \mathbb{R}$, bzw. $A : V_2 \to \mathbb{R}$ eine surjektive (d.h. von 0 verschiedene) lineare Abbildung und $b \in \mathbb{R}$ ist. Jede Ebene in V_3, bzw. Gerade in V_2 lässt sich so darstellen.

Die Geraden im Raum sind genau die Lösungsmengen von Gleichungen der Form $A\vec{x} = \vec{b}$, wo $A : V_3 \to \mathbb{R}^2$ eine surjektive lineare Abbildung und $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ ist.

Im Folgenden wollen wir verschiedene Arten von bijektiven Abbildungen $V_3 \to V_3$, bzw. $V_2 \to V_2$ betrachten. Mit V sei V_3 oder V_2 bezeichnet.

Definition 14.3 *Eine* **Parallelverschiebung** *ist eine Abbildung der Art $x \mapsto x+b$ mit festem $b \in V$.*

14.4 Fasst man V als euklidischen Raum oder Ebene auf, so ist eine Parallelverschiebung genau das, was man sich unter einer solchen im geometrischen Sinne vorstellt.

Eine Parallelverschiebung ist bijektiv, bildet Geraden auf Geraden (und gegebenenfalls Ebenen auf Ebenen) ab, erhält Längen und Winkelgrößen, ist also eine sogenannte Kongruenzabbildung.

Die Verkettung zweier Parallelverschiebungen ist wieder eine solche. Ist $f(x) = x+a,\ g(x) = x+b$, so ist $g\circ f(x) = x+a+b$. Das Inverse der Parallelverschiebung $f(x) = x+a$ ist $f^{-1}(x) = x-a$, also wieder eine solche.

Da eine lineare Abbildung $V \to V$ immer den Nullpunkt festlässt, ist die Parallelverschiebung $x \mapsto x+b$ genau dann linear genau dann, wenn $b = 0$, also die Parallelverschiebung die Identität ist.

Definition 14.5 *Eine* **affine Abbildung** *$V \to V$ ist eine Abbildung der Form $x \mapsto Ax + b$, wo $A : V \to V$ eine bijektive lineare Abbildung und $b \in V$ ist.*

Remarks 14.6 a) Die Verkettung affiner Abbildungen ist wieder eine solche. Ist $f(x) = Ax + a$, $g(x) = Bx+b$ so ist $g\circ f(x) = BAx+(Ba+b)$. Das Inverse der affinen Abbildung $f(x) = Ax+a$ ist $f^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}a$.

b) Eine affine Abbildung ist bijektiv, bildet Geraden auf Geraden (und gegebenenfalls Ebenen auf Ebenen) ab, erhält aber im Allgemeinen weder Längen noch Winkelgrößen, ist also keine sogenannte Kongruenzabbildung.

c) Im Gegenteil: Zu zwei nichtausgearteten Dreiecken ABC und $A'B'C'$ in der Ebene existiert eine affine Abbildung von $f : V_2 \to V_2$ mit $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$.

d) Es werden also auch keine Längenverhältnisse erhalten. Allerdings werden Längenverhältnisse von Strecken auf parallelen Geraden erhalten. Ebenso wird die Parallelität erhalten.

e) Kreise, allgemeiner Ellipsen werden auf Ellipsen, Hyperbeln auf Hyperbeln und Parabeln auf Parabeln abgebildet, wie wir vielleicht später sehen werden.

Remark 14.7 Mit Hilfe affiner Abbildungen kann man einen zweiten Beweis dafür erbringen, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Pukt schneiden. In einem gleichseitigen Dreieck sind die Höhen auch die Winkelhalbierenden, auch die Seitenhalbierenden, auch die Mittelsenkrechten. Dass sich diese drei Geraden in einem Punkt schneiden, folgt aus Symmetriegründen. Nach obigem werden unter einer affinen Abbildungen die drei Seitenhalbierenden wieder auf solche abgebildet. Ist also ABC ein beliebiges Dreieck und $A'B'C'$ gleichseitig und f eine affine Abbildung, die $A'B'C'$ auf ABC abbildet, so schneiden sich die drei Seitenhalbierenden von ABC in einem Punkt, weil die drei Seitenhalbierenden von $A'B'C'$ es tun.

Definition 14.8 *a) Eine* **orthogonale** *Abbildung $\varphi : V \to V$ ist eine solche, die das Skalarprodukt erhält, d.h. für welche $\langle\varphi(v), \varphi(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ gilt.*

b) Eine Kongruenzabbildung $V \to V$ ist eine von der Form $f(x) = \varphi(x) + b$, wo φ orthogonal und $b \in V$ ist.

Remarks 14.9 a) Eine orthogonale Abbildung erhält offenbar Längen und Winkel. Deshalb tut dies auch jede Kongruenzabbildung.

a') Eine orthogonale Abbildung ist offenbar injektiv. Da V endlichdimensional ist, ist sie also bijektiv. Dasselbe gilt für Kongruenzabbildungen.

b) Beispiele von Kongruenzabbildungen sind Spiegelungen an Ebenen, Geraden oder Punkten, auch Drehungen.

c) Die Kongruenzabbildungen bilden eine Gruppe. (Man kann zeigen, dass diese von den Spiegelungen an Ebenen (in V_3), an Geraden (in V_2), an Punkten (in V_1) erzeugt wird.)

Definition 14.10 *Eine* **Ähnlichkeitsabbildung** *ist eine Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(x) = \lambda f(x) + b$, wo f orthogonal, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ und $b \in V$ ist.*

Remarks 14.11 a) Eine Ähnlichkeitsabbildung erhält Winkel und Längenverhältnisse, aber im Allgemeinen (genauer, wenn $|\lambda| \neq 1$ ist) keine Längen. Sie ist bijektiv.

b) Ähnlichkeitsabbildungen bilden eine Gruppe.

15 Eulergerade und Feuerbachkreis

Sei ABC ein Dreieck. Das **Mittendreieck** dieses Dreiecks ist das Dreieck $A'B'C'$, wo A' der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und B' derjenige von $\overline{CA}$ und C' derjenige von $\overline{AB}$ ist.

BILD

Remarks 15.1 Mit obigen Bezeichnungen gilt:

a) $A'B'$ (bzw. $B'C'$, bzw. $C'A'$) ist parallel zu AB (bzw. BC, bzw. CA) und halb so lang.

b) Die seitenhalbierenden Geraden von ABC sind dieselben wie die von $A'B'C'$, wobei die Seitenhalbierende durch A von ABC auch durch A' geht, usw. Insbesondere haben ABC und $A'B'C'$ denselben Schwerpunkt S.
Dies folgt wie a) aus dem Strahlensatz und seiner Umkehrung.

BILD

c) Die Mittelsenkrechte von AB ist die Höhengerade von $A'B'C'$ durch C', usw. Also ist der Höhenschnittpunkt von $A'B'C'$ der Umkreismittelpunkt U von ABC.

d) Das Dreieck $A'B'C'$ entsteht aus dem Dreieck ABC durch Drehung um S um 180^o und Halbierung aller Abstände von S. Es handelt sich also hier um eine Ähnlichkeitsabbildung, d.h. eine Abbildung der Ebene auf sich, die ein Dreieck immer in ein ähnliches Dreieck abbildet. Wenn man also den Höhenschnittpunkt H von ABC am Punkt S spiegelt und einen Punkt K erhält, so ist der Höhenschnittpunkt H' von $A'B'C'$ der Mittelpunkt der Strecke SK. D.h H' liegt auf der Geraden HS auf der anderen Seite von S und ist von S halbsoweit entfernt wie H. Nach c) gilt aber $H' = U$.

BILD

Es folgt also

Proposition 15.2 (Euler) *In einem Dreieck ABC liegen Höhenschnittpunkt H, Schwerpunkt S und Umkreismittelpunkt U in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Für die Streckenlängen gilt $l(HS) : l(SU) = 2 : 1$. (Ist das Dreieck gleichseitig, fallen diese drei Punkte zusammen. Die Aussage des Satzes ist dann leer. Überlege Dir: Wenn in einem Dreieck der Umkreismittelpunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, ist das Dreieck gleichseitig.)*

Definition 15.3 *Die Gerade, auf welcher Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt eines nicht gleichseitigen Dreiecks liegen, heißt seine* **Eulergerade**.

Remarks 15.4 a) Ist ABC gleichschenklig (aber nicht gleichseitig), so ist die Symmetrieachse die Eulergerade.

b) Ist ABC rechtwinklig mit $\gamma = 90^o$, so ist die Seitenhalbierende s durch C die Eulergerade. Denn der Höhenschnittpunkt ist der Punkt C und der Schwerpunkt liegt auf s.

c) Sei ABC rechtwinklig, aber nicht gleichschenklig, so fallen die Eulergerade, d.h. die Seitenhalbierende durch C und die Winkelhalbierende w durch C nicht zusammen, da letztere die Seite $\overline{AB}$ im Verhaltnis $b/a \neq 1/1$ teilt. Da aber der Inkreismittelpunkt nicht der Schnittpunkt C von w und s sein kannliegt in diesem Fall der Inkreismittelpunkt *nicht* auf der Eulergeraden.

Remarks 15.5 Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

a) Sei M' der Umkreismittelpunkt von $A'B'C'$. Dann liegt M' auf der Geraden MS, d.h. der Eulergeraden, auf der M gegenüberliegenden Seite von S und ist halbsoweit von S entfernt wie M. Gemäß der 'berühmten' Identität $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ist er also der Mittelpunkt der Strecke MH. Durch M geht die Mittelsenkrechte von AB, d.h. die Senkrechte auf AB durch C', durch H geht die dazu parallele Höhe von ABC durch C. Der Kreis um M' durch A' geht also auch durch den Fußpunkt der Höhe durch C. Dieser Kreis, der **Feuerbachkreis** geht also durch die Seitenmittelpunkte und die Höhenfußpunkte von ABC.

b) Nun bringen wir die Gerade $C'M'$ mit der Höhengeraden von ABC durch C zum Schnitt, der von dem Fußpunkt der Höhe verschieden ist. Der Schnittpunkt heiße D. Die Dreiecke $M'MC'$ und $M'HD$ sind kongruent. Denn die Strecken $M'M$ und $M'H$ sind gleichlang, die Winkel bei M' sind gleichgroß, ebenso die bei H bzw. M. Folglich gilt $l(A'M) = l(DH)$. Da wir schon wissen, das die Strecke $\overline{C'M}$ halb so groß ist wie $\overline{CH}$ – sie korrespondieren bei der Mittendreieck-Korrespondenz – ist D der Mittelpunkt von $\overline{CH}$. Ferner folgt aus obiger Kongruenz $l(M'D) = l(M'C')$. Somit geht der Feuerbachkreis durch die Mittelpunkte der Strecken $\overline{CH}$, $\overline{AH}$ und $\overline{BH}$.

c) Ohne Beweis zitieren wir: Der Feuerbachkreis berührt den Inkreis und die Ankreise.

16 Trigonometrie

So elegant und anziehend auch die Idee ist, die trigonometrischen Funktionen über die komplexe Exponentialfunktion einzuführen, kann ich mir doch nicht vorstellen, das dies in der Sekundarstufe 1 möglich ist. Der Einführung über Winkel- und Seitenmessung am rechtwinkligen Dreieck kann ich auch nicht soviel abgewinnen. (Ein Grund ist z.B., dass der Sinus- und der Cosinus-Satz auch für Dreiecke mit einem stumpfen Winkel gelten und man den Sinus, bzw. Cosinus für stumpfe Winkel an einem rechtwinkligen Dreieck nicht definieren kann.)

Ich werde die Funktionen „sin" und „cos" am Einheitskreis definieren.

Definition 16.1 *Wir betrachten in der Ebene den Einheitskreis um den Nullpunkt eines orthonormalen Koordinatensystems. Sei $\alpha \geq 0$ ein Winkel. Diesen Winkel trage man von der positiven x-Halbachse aus gegen den Uhrzeigersinn ab. Der entsprechende Schenkel schneidet den Einheitskreis in genau einem Punkt A. Wir definieren $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ als Koordinaten von A, also $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.*

Dies ist wohldefiniert, auch wenn α größer als der Vollwinkel ist.

Für negative α trägt man $|\alpha|$ mit dem Uhrzeigersinn ab.

Remarks 16.2 a) Für die Bedürfnisse der Analysis ist es günstig, den Winkel α als Bogenlänge auf dem Einheitskreis vom Punkt $(1; 0)$ gegen den Uhrzeigersinn bis A zu messen. Dabei wird natürlich (naiv) vorausgesetzt, dass es diese Bogenlänge gibt. (Naivität in der Mathematik ist allerdings nichts Schlechtes. So ist z.B. die „naive Mengenlehre" diejenige, die fast jeder praktisch arbeitende Mathematiker benutzt.)

In der elementaren Geometrie tut es natürlich auch jedes andere Winkelmaß, z.B. wo der rechte Winkel in 90 Grade eingeteilt ist.

b) Mit $\sin\alpha$ ist $\sin(\alpha)$ gemeint, der Sinus als Funktion des Winkels α, nicht etwa das Produkt der Zahlen s,i,n,α. Ferner ist $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$, $\quad \sin\alpha\cos\beta = (\sin\alpha)(\cos\beta)$ definiert, usw.

c) Für beliebige Winkel α gilt: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Man kann also $\sin\alpha$ aus $\cos\alpha$ und umgekehrt berechnen, *wenn man über die Vorzeichen Bescheid weiß.*

d) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \ \sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \ \cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha.$

Remark 16.3 Ist $0 \leq \alpha \leq 90^o$, so hat in dem rechtwinkligen Dreieck $(0,0)(\sin\alpha, 0)(\sin\alpha, \cos\alpha)$ die Gegenkathete des Winkels α die Länge $\sin\alpha$, die Ankathete des Winkels α die Länge $\cos\alpha$ und die Hypotenuse die Länge 1. In einem allgemeinen rechtwinkligen Dreieck gilt also:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

(Die Silbe 'An-' in der Bezeichnung Ankathete ist die deutsche Präposition 'an' und soll hier bedeuten, dass die Ankathete *an* dem Winkel α liegt, hat also nichts mit der griechischen Verneinungssilbe 'an' etwa in 'Anästhesie', 'Analphabet' zu tun.)

16.4 Spezielle Werte. Für die Winkel $0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o$ kann man Sinus und Cosinus leicht bestimmen:

$$\sin 30^o = \cos 60^o = \frac{1}{2}, \quad \sin 45^o = \cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 60^o = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Der Beweis sei dem Leser überlassen.

Proposition 16.5 Sinussatz. *In einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c, den Winkel(größe)n α, β, γ, (wo wie gewohnt a und α einander gegenüber liegen usw.) und dem Umkreisradius r gilt*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

Bemerkung: Da in einem nicht ausgearteten Dreieck jeder Winkel echt zwischen 0^o und 180^o liegt, ist keiner der Nenner gleich 0.

Proof: Es ist

$$b\sin\alpha = h_c = a\sin\beta$$

Das beweist auf einfache Weise die ersten beiden Gleichheiten.

Die dritte sieht man mit Hilfe des Satzes über die Winkel im Kreis (9.10). Diese beweist natürlich auch die ersten Gleichheiten. □

Remark 16.6 Seien $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren der Längen a, bzw. b. Dann ist nach Definition des Skalarproduktes

$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = ab\cos\gamma, \quad a^2 = \langle\vec{a}, \vec{a}\rangle$$

wobei γ der von $\vec{a}, \vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist ($0 \leq \gamma \leq 180^o$).

Proposition 16.7 Cosinussatz. *In einem Dreieck gilt (mit den üblichen Bezeichnungen)*

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$$

Proof: Betrachte die Vektoren $\vec{CB}, \vec{CA}$; sie haben die Längen a, bzw. b. Es ist $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$ von der Länge c.

Dann rechnet man $c^2 = |\vec{AB}|^2 = \langle\vec{CB} - \vec{CA}, \vec{CB} - \vec{CA}\rangle = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. □

Corollary 16.8 *Seien α, β, γ Winkel mit $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$. Dann gilt* $\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

Mit $\sin^2\gamma$ ist $(\sin\gamma)^2$ gemeint.

Proof: α, β, γ sind die drei Winkel eines Dreiecks, dessen Umkreisdurchmesser gleich 1 gesetzt werden kann. Nach dem Sinussatz haben dessen Seiten die Längen $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$. Wenn man auf dieses Dreieck den Cosinussatz anwendet, erhält man die behauptete Formel. □

16.9 Die Abbildungen sin und cos bilden den Bereich $[0^o, 90^o]$ bijektiv auf das Intervall $[0, 1]$ ab. Also gibt es auch zu beiden jeweil eine Umkehrabbildung, genannt „Arcus-Sinus“ (arcsin), bzw. „Arcus-Cosinus“ (arccos).

Beachte: arcsin x ist der Winkel (=Bogen=arcus), dessen Sinus gleich x ist.

Wenn man beliebige Winkel zulässt, so gibt es zu jedem $x \in [-1, 1]$ unendlich viele Winkel α mit $\sin\alpha = x$. (Ist $x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$, so gibt es keinen (reellen) Winkel α mit $\sin\alpha = x$ oder $\cos\alpha = x$.) Im strengen, im Mathestudium üblichen, Sinn ist die Vorschrift:

„Ordne jedem $x \in [-1, 1]$ den Winkel α zu, für den $\sin\alpha = x$ ist“

keine Abbildung. Ist $x \in]-1, 1[$ so gibt es schon im Bereich $[0^o, 360^o[$ jeweils zwei Winkel α, für die $\sin\alpha = x$, bzw. $\cos\alpha = x$ gilt!

Um arcsin und arccos zu Abbildungen zu machen, muss man die möglichen Winkel einschränken. Hierbei hat man im Prinzip viele Wahlmöglichkeiten. Üblich und nützlich sind $\alpha \in [-90^o, 90^o]$

für den Arcus-Sinus und $\alpha \in [0^o, 180^o]$ für den Arcus-Cosinus. Da Dreieckswinkel zwischen 0^o und 180^o liegen (zumindest so gemessen werden), ist also ein Dreieckswinkel durch seinen Cosinus eindeutig bestimmt. Das gilt *nicht* für den Sinus! Wenn man den Cosinussatz zur Berechnung eines Dreieckswinkels heranzieht, ist durchaus möglich, dass $\cos\alpha < 0$ ausfällt, d.h. $90^o < \alpha < 180^o$ ist.

Auf der Schule wird man vielleicht gar nicht von Umkehrfunktionen sprechen. Jedenfalls hat man das vor Einführung der Taschenrechner nicht getan, sondern in den „Tafeln“ zu einem gegebenen Sinus-, bzw. Cosinus-Wert den möglichen Winkel abgelesen.

16.10 Sind von den Seitenlängen und Winkelgrößen eines Dreiecks drei Maße, darunter mindestens eine Seitenlänge, bekannt, so kann man die anderen zeichnerisch bestimmen (einmal gibt es zwei Möglichkeiten). Mit Hilfe der obigen zwei Sätze kann man sie auch berechnen, vorausgesetzt man hat einen leistungsfähigen Taschenrechner.

Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen.

16.11 Wie berechnet nun ein das Innere eines Taschenrechners etwa die Funktionen sin und cos? Es gibt schnell konvergente Potenzreihen dafür. In diesen wird das sog. Bogenmaß eines Winkels benutzt. ($1^o = \pi/180$) Man kann sich überlegen, dass es genügt, $\cos x, \sin x$ für $0 < x \leq \pi/4$ zu berechnen. Da $\pi/4 < 1$ ist, konvergieren die Potenzreihen für diese x sehr gut. (x^n geht für $0 < x << 1$ schnell gegen 0. Die Koeffizienten sind von der Form $\pm((2n+1)!)^{-1}$, bzw. $\pm((2n)!)^{-1}$ und schließlich sind die Reihen für $x > 0$ noch alternierend.)

????

16.12 Drehungen als Abbildungen. Sei O der Ursprung eines Koordinatensystems in der Ebene. Wir wollen betrachten, was geschieht, wenn wir die Ebene um einen festen Winkel α um O drehen. Wir identifizieren sie mit dem Vektorraum V der Ebene durch die Wahl von O. Die Drehung betrachten wir als Abbildung von V in sich.

Zunächst ist dies eine lineare Abbildung, wie man leicht an folgendem Bild sieht:

BILD

Sie wird bezüglich einer orthonormalen Basis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

gegeben.

BILD

Theorem 16.13 *(*Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Hier hat man auf viele Klammern verzichtet! $\sin\alpha\cos\beta$ soll $\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)$ bedeuten, und **nicht** etwa $\sin(\alpha\cos(\beta))$! S.o.

(Wenn man Sinus und Cosinus über die komplexe Exponentialfunktion einführt, folgen diese Additionstheoreme aus dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion.)

Proof: Die Matrix, welche die Drehung (um O) um den Winkel $\alpha + \beta$ beschreibt ist

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Da man aber die Drehung um $\alpha + \beta$ auch erhält, indem man zunächst um den Winkel β und anschließend um den Winkel α dreht, ist A gleich dem Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

Ein Vergleich der Einträge beweist den Satz. □

Für den Beweis des Satzes von Morley benötigen wir das

Corollary 16.14 *a)* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

b) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

c) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^o + \alpha)\sin(60^o - \alpha)$

Hier ist $\sin 2\alpha = \sin(2\alpha)$ usw.

Proof: Nur b) und c) sind zu zeigen.

b) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

b) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$
$2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha =$

$$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\alpha\right) =$$

$4\sin\alpha\cdot(\sin^2 60^o - \sin^2\alpha) = 4\sin\alpha\sin(60^o+\alpha)\sin(60^o-\alpha)$. □

Als Anwendung beweisen wir den Satz von Morley:

Proposition 16.15 *Bringt man die benachbarten Drittelstrahlen der Winkel eines beliebigen Dreiecks zum Schnitt, so bilden die drei erhaltenen Schnittpunkte ein gleichseitiges Dreieck.*

Proof: Unter Benutzung von (16.8) und (16.14 c) berechnen wir die Länge einer Seite des „Morley-Dreiecks" und zeigen die Behauptung, dass sie gleich

$$8r\sin\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\beta}{3}\sin\frac{\gamma}{3}$$

ist, wobei r den Umkreisradius und α, β, γ wie üblich die Dreieckswinkel von ABC bezeichnen. Da dieser Ausdruck symmetrisch in α, β, γ ist, muss sich dasselbe Ergebnis auch für die anderen beiden Seiten des Morley-Dreiecks gelten.

Beweis der Behauptung: Wohlan, sei in folgender Figur $A'B'C'$ das Morley-Dreieck. Wir wählen als Einheit des Längenmaßes $2r$. Wir wollen die Länge $l(B'C')$ berechnen, und zu diesem Zweck zunächst $l(AB')$ und $l(AC')$.

Nachdem Sinussatz angewandt auf das Dreieck ABC' erhalten wir

$$l(AC') = \frac{l(AB)\sin\frac{\beta}{3}}{\sin\gamma'}$$

Da $2r = 1$ ist, gilt $l(AB) = \sin\gamma$. Da $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = 60^o - \frac{\gamma}{3}$ ist, gilt $\gamma' = 180^o - (60^o - \frac{\gamma}{3})$, also $\sin\gamma' = \sin(60^o - \frac{\gamma}{3})$. Mit Hilfe von (16.14 c) folgt dann

$$l(AC') = \frac{4\sin\frac{\gamma}{3}\sin\left(60^o + \frac{\gamma}{3}\right)\sin\left(60^o - \frac{\gamma}{3}\right)\sin\frac{\beta}{3}}{\sin\left(60^o - \frac{\gamma}{3}\right)}$$

$$= 4\sin\frac{\gamma}{3}\sin\left(60^o + \frac{\gamma}{3}\right)\sin\frac{\beta}{3}$$

Durch Vertauschung von B mit C, also von B'mit C' und β mit γ erhält man analog:

$$l(AB') = 4\sin\frac{\beta}{3}\sin\left(60^o + \frac{\beta}{3}\right)\sin\frac{\gamma}{3}$$

Jetzt können wir $l(B'C')^2$ nach dem Cosinussatz (angewandt auf $AB'C'$) berechnen:

$$l(B'C')^2 = l(AB')^2 + l(AC')^2 - 2l(AB')l(AC')\cos\frac{\alpha}{3} =$$

$$16\sin^2\frac{\beta}{3}\sin^2\frac{\gamma}{3}$$

$$\cdot\left[\sin^2\left(60^o + \frac{\beta}{3}\right) + \sin^2\left(60^o + \frac{\gamma}{3}\right) - 2\sin\left(60^o + \frac{\beta}{3}\right)\sin\left(60^o + \frac{\gamma}{3}\right)\cos\frac{\alpha}{3}\right]$$

Da $\frac{\alpha}{3} + 60^o + \frac{\beta}{3} + 60^o + \frac{\gamma}{3} = 180^o$ gilt, ist nach (16.8) der Faktor in den eckigen Klammern gleich $\sin^2\frac{\alpha}{3}$. Da alle betrachteten Sinuswerte positiv sind, ist die Behauptung bewiesen. $\square$

17 Astronomisch-geographische Betrachtungen

Kugelgestalt der Erde bereits von Pythagoras (ca. 570-496 ante) angenommen. (Früher???) Übrigens auch im MA, zumindest seit Aristoteles im Abendland wieder bekannt war (ca 1200) – durch islamische Vermittlung!

Gründe: Beobachtungen bei Seefahrten, Mondfinsternissen.

Wann ist die Möglichkeit einer Mondfinsternis gegeben?

☐ Nur bei Vollmond ☐ Nur bei Halbmond ☐ Nur bei Neumond, denn Mondfinsternis und Neumond bedeuten dasselbe. ☐ Mondfinsternisse finden unabhängig von der Mondphase statt.

Eratosthenes.

Wie groß ist die Erdkugel? Eratosthenes (der mit dem Primzahlsieb, ca. 275-195) Alexandria – Syene (heute Assuan) $7,2^o = 2\pi/50$, andererseits 5000 Stadien (Schrittzahlmessung) (835 km). Macht für den Erdumfang 250 000 Stadien. (835/5=167). $50 \cdot 835 = 41750$ etwas zu groß, aber Assuan auch nicht genau auf dem gleichen Längengrad, etwa 3^o zu weit östlich.

Das Meter sollte der ursprünglichen Definition zufolge der 10millionste Teil der Entfernung von Pol zum Äquator (1/4 des Erdumfangs) sein. D.h. Erdumfang 40 000 km. Entspräche Radius 6366 km. Abstand Erdmittelpunkt zum Pol ist 6359, der zum Äquator 6378.

Globus im Maßstab 1: 10Mio. Radius 63,7 cm, d.h. 10km in der Realität entsprechen 1mm auf dem Globus. Unterschied der beiden o.a. Radien auf dem Globus nur 1,9 mm. Himalaya 0,8 mm hoch. Tiefste Meerestiefe m.W. 10 km , was 1mm entspricht.

Was bedeutet Erdkrümmung bei verhältnismäßig kleinen Abständen?

Beispiel: Von Lindau nach Konstanz (40 km), d.h. ein tausendstel des Erdumfangs (0,36 Grad). Direkte Verbindungslinie führt über den Bodensee, die Verbindungsgerade also durch den Bodensee. Wie lang ist diese und wie tief?

BILD!

Die Länge errechnet sich wie folgt: $6366 \cdot 2\sin(0,18^o) = 39,9987$, ist also 1,30 m kürzer als die direkte Verbindungslinie übers Wasser.

Das Dreieck EML (Erdmittelpunkt, Mitte der Verbindungsstrecke, Bregenz) ist rechteckig. Nach Pythagoras erhält man $l(EM)^2 + l(ML)^2 = r^2$ mit $r = l(EL) =$ Erdradius, $l(ML) = 20$ km. Letzteres, da der Unterschied zwischen den Abständen Lindau-Konstanz über und durch den Bodensee vernachlässigbar ist. S.o. Also ist

$$l(EM) = \sqrt{6366^2 - 20^2}\text{ km } = \sqrt{40525956 - 400} = 6365,96850$$

Es fehlen also 31,50 m am vollen Erdradius. Immerhin müsste man in beiden Städten gut 30 m hohe Türme errichten, damit man sich von beiden einander zuwinken kann.

Dover - Calais ca 35 m.

Aristarch (ca. 320-250 vor)

Verhältnis der Abstände der Erde-Mond m und Erde-Sonne s.

Bei exaktem Halbmond: Winkel α zwischen Mond und Sonne

$$\frac{m}{s} = \cos\alpha$$

Aristarch maß $\alpha = 87^o$. Da $\cos 87^o = 0,052$, d.h. $\frac{s}{m} = 19$. In Wahrheit ist das Verhältnis etwa 20 mal so groß, genauer 382, da nämlich $\alpha = 89,85^o$ ist.

Wie kommt das? Ich halte zwei Gründe für möglich, die vielleicht zusammen diese Diskrepanz ergeben:

1. Lichtweg wird durch die Erdatmosphäre gekrümmt.

2. Es ist schwer möglich (wenn nicht unmöglich), den genauen Zeitpunkt zu ermitteln, wann Halbmond ist.

Denn für die scheinbare Bewegung der Sonne und des Mondes (für einen irdischen Beobachter) gilt: Der Mond hinkt hinter der Sonne um 12,2 Grad pro Tag zurück, d.h. der Winkelabstand Mond - Sonne ändert sich pro Stunde um etwa 1/2 Grad.

Aber es genügte zu wissen, dass das Verhältnis s/m einigermaßen groß ist, damit Aristarch den Abstand Erde - Mond recht gut abschätzen konnte.

Beobachtung: Schatten, den die Erde bei Mondfinsternis auf den Mond wirft, ist etwa doppelt so groß wie dieser. Während der Mond – und auch die Sonne – einen scheinbaren Durchmesser von 0,5 Grad haben, hat der Erdschatten einen solchen von etwa 1 Grad. Welcher Schatten? Kernschatten!

BILD!

(Die Zeit vom Eintritt des Mondes in den Schatten bis zur totalen Verfinsterung ist gleich der Zeit der totalen Verfinsterung. Auch kann man den Rand des Schattens betrachten, der als kleiner Abschnitt eines Kreises von etwa doppeltem Mondradius erscheint.

BILD!

Man kann berechnen, dass der Mond etwa 10 Erdumfänge, d.h. ca. 31 Erddurchmesser, d.h. etwa 62 Erdradien von der Erde entfernt ist.

Nach Aristarch wäre die Sonne etwa 7,6 Mio. km von der Erde entfernt. Da sie eine scheinbare Größe von einem halben Grad hat was 0,0087 Radiant entspricht, hätte sie einen Durchmesser von 0.0087·7 600 000= 66 120 km, etwa das 5-fache des Erddurchmessers. Deshalb hat bereits Aristarch das heliozentrische Weldbild propagiert. Dies fand wenig Akzeptanz, wurde wohl auch vergessen – im Gegensatz zur allgemein akzeptierten Kugelgestalt der Erde.

In Wahrheit ist der Durchmesser der Sonne etwa 109 mal so groß wie der der Erde. Maßstabgerecht zu diesem kleinen Globus von etwa 25 cm Durchmesser hätte die Sonne einen Durchmesser von etwa 27 Metern (Bürogebäude), wäre allerdings auch etwa 3,75 km entfernt. (Hbf etwas mehr als 2 km entfernt.)

Kernschatten eines Flugzeugs.

Wie hoch musss ein Flugzeug fliegen, damit es auf die Erde keinen Kernschatten mehr wirft? Ersetze es durch einen Ballon von 10m Durchmesser. (Nicht die Länge, die Dicke ist entscheidend.)

BILD!

Der Abstand des Flugzeugs zum Punkt, wo der Kernschatten endet, sei d. Dann ist $d \cdot \tan(0,25^o) = 5$ m. Es ist $\tan(0,25^0) = 0,0044$ und $5/0,0044 = 1136,4$. Fliegt also ein Flugzeug vom 10 m Dicke höher als 1 137 m, so wirft es keinen wirklichen Schatten mehr. Linienflugzeuge fliegen meist in einer Höhe von etwa 10 000 m.

Jahreszeiten.

Wieso gibt es diese?

☐ Im Sommer ist die Erde näher an der Sonne als im Winter. ☐ Die Erdachse steht nicht senkrecht auf der Ekliptik, der Ebene, in der sich die Erde (genauer ihr Mittelpunkt) bewegt.

Die Erdbahn ist in der Tat kein genauer Kreis, sondern eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Allerdings steht die Erde im Januar der Sonne am nächsten und im Juli ist sie am weitesten entfernt.

Die Erdachse hat eine Neigung von 23,5 Grad, die sie bei der Drehung um die Sonne (im Wesentlichen) beibehält. Im Sommer (auf der Nordhalbkugel) neigt sie den Nordpol der Sonne zu, im Winter den Südpol, so dass bei unserem Sommer auf der Südhalbkugel Winter herrscht und umgekehrt. Da gleichzeitig zum Sommer auf der Südhalbkugel die Erde der Sonne auch näher steht, sind auf der Südhalbkugel die Jahreszeiten stärker ausgeprägt.

Münster (genauer die Autobahnauffahrt Münster Nord) liegt auf dem 52-ten Breitengrad. Die Höhe der Mittagssonne zu Frühling- und Herbstanfang ist also $90^o - 52^o = 38^o$, zu Sommeranfang ist sie also $61{,}5^o$, zu Winteranfang nur $14{,}5^o$ hoch.

Schon im Altertum war bekannt, dass die Jahreszeiten nicht genau dieselbe Länge haben. Dies liegt natürlich an der Ellipsengestalt der Erdbahn.

Hipparch hatte sogar beobachtet oder aus Tafeln entnommen, dass die Sonne zum Frühlingszeitpunkt nicht konstant in dem gleichen Sternbild steht. Dies liegt an der sog. Präzession der Erdachse. Da die Erde keine genaue Kugel ist, versuchen Sonne und Mond, ihre Achse senkrecht zur Ekliptik zu stellen, was eine Ausweichbewegung der Erdachse bewirkt. Diese behält zwar ihre Schiefe, ihre Lage beschreibt einen Doppelkegel. In etwa 25000 Jahren ist eine 'Drehung' der Erdachse vollendet. Das bedeutet in 100 Jahren eine Abweichung von mehr als einem Grad. Hipparch soll auch die Entfernung Erde Mond auf trigonometrischem Wege, d.h. mit Parallaxen von verschiedenen Punkten auf der Erde bestimmt haben.

Fragen

1. Wie lange dauert eine Erdumdrehung im Mittel?

☐ 24 Std. ☐ etwas weniger.

Da sich die Erde nicht nur um sich selbst, sondern sich auch in gleicher Richtung um die Sonne dreht, braucht sie (etwa) 1/365 weniger Zeit, sich einmal um sich selbst zu drehen, als bis man wieder die Sonne auf dem gleichen 'Himmelslängengrad' sieht.

Wie hoch ungefähr steht der Vollmond um Mitternacht (Ortszeit) im Winter (bei Winteranfang), also etwa in der nächsten Nacht?

☐ Etwa so hoch wie die Sonne am nächsten Mittag ☐ Etwa so hoch wie die Sonne am Mittag zu Sommeranfang

Bei Vollmond steht der Mond der Sonne ziemlich genau gegenüber (bis auf maximal 5^o). Da bei (unserem) Winteranfang auf der Südhalbkugel die Sonne am höchsten steht, steht der Vollmond bei uns um Winteranfang ungefähr am höchsten.

Wie hoch würde der Neumond zu diesen Zeiten stehen, könnte man ihn denn sehen?

Der Neumond (d.h. der Mond, der von uns aus gesehen mit seiner Rückseite zur Sonne gedreht hat) befindet sich etwa auf der Verbindungsstrecke Sonne-Erde, steht also wie die Sonne im Sommer hoch, im Winter niedrig.

Astronomische Einheit

So nennt man die Entfernung Erde - Sonne. Nachdem Tycho Brahe die Planetenbahnen bis auf 25 Bogensekunden (0,007 Grad) genau vermessen hatte, konnte Kepler daraus seine berühmten Bahngesetze herleiten. Z.B. dass die Bahnen keine genauen Kreise waren. Da man von der Erde aus nur Winkel messen kann, kann man zunächst nur Verhältnisse bestimmen, also die Abstände der Planeten nur in astronomischen Einheiten angeben. Eine Ausnahme ist die Entfernung Erde - Mond, die man, wie oben angegeben mit der seit Eratosthenes bekannten Erdgröße vergleichen kann. An Aristarchs Bestimmung des Verhältnisses der Entfernungen von Mond und Sonne zur Erde hat Kepler wohl nicht mehr geglaubt, vielleicht weil keiner Aristarchs Messung reproduzieren konnte.

Eine Möglichkeit, die astronomische Einheit zu messen, boten (im 19. Jahrhundert) die Venusdurchgänge durch die Sonne. Von verschiedenen Punkten der Erde aus gesehen, finden diese auf verschiedenen Breitenkreisen der Sonne statt. Man kann so die Parallaxe der Venus und somit auf trigonometrische Weise die Entfernung der Venus von der Erde bestimmen. Daraus ergibt sich mit Keplers 3. Gesetz die astronomische Einheit. Heute bestimmt man den Abstand Erde-Venus mit Radar.

18 Flächeninhalte und Volumina

18.1 Rechteck. Für mich war es in meiner Kindheit durchaus eine Erkenntnis, dass 10 m^2 nicht die Fläche eines Quadrates mit der Seitenlänge 10 m ist. Als ich neulich in einer Zeitung von einem Balkon las, der 80 cm^2 groß sein sollte, war mir klar, dass der Verfasser dies in seiner Jugend nicht mitbekommen hat, obwohl er wahrscheinlich das Gymnasium besucht hatte.

Umso sorgfältiger werden Sie das als Lehrer einführen müssen!

Man sieht anschaulich, dass ein Rechteck, welches etwa 5cm lang und 3cm breit ist, einen Flächeninhalt von $3 \cdot 5$ cm^2 besitzt. Dieses Beispiel lässt erkennen, dass ein Rechteck der Länge m (Längeneinheiten)und der Breite n Längeneinheiten den Flächeninhalt mn (den Längeneinheiten entsprechende Flächeneinheiten) hat.

Welche Fläche hat ein Rechteck, dessen Länge $1/n_1$ und Breite $1/n_2$ mit ganzen $n_i > 0$ ist? Seien etwa $n_1 = 3$ und $n_2 = 5$. Teile ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 durch waagerechte und senkrechte Strecken in $3 \cdot 5$ kongruente Rechtecke. Man erkennt, dass der Flächeninhalt jedes solchen Rechtecks 1/15 des Flächeninhalts des Einheitsquadrates ist. Allgemein hat also ein Rechteck mit den Seitenlängen $1/n_1,\ 1/n_2$ den Flächeninhalt $\frac{1}{n_1 n_2}$.

Und dann sieht man auch, dass ein Rechteck mit den Seitenlängen 2/3 und 4/5 den Flächeninhalt 8/15 besitzt. Allgemein besitzt ein Rechteck mit den rationalen Seitenlängen $m_1/n_1,\ m_2/n_2$ den Flächeninhalt $\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$.

Dies ist natürlich ein Hinweis darauf, dass wir die Multiplikation von Brüchen richtig definiert haben.

Hat mindestens eine Seitenlänge ein irrationales Maß, so kann man mit Dedekindschen Schnitten argumentieren. Sind $\rho, \sigma > 0$ reelle Zahlen und $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ mit $a \leq \rho < a',\ b \leq \sigma < b'$, so gilt arithmetisch: $ab \leq \rho\sigma < a'b'$. Geometrisch ist aber offenbar ein Rechteck mit den Seitenlängen a, b kleiner oder gleichgroß wie ein solches mit den Seitelängen ρ, σ und dieses kleiner als ein solches mit den Seitenlängen a', b'. Das genügt.

18.2 Rechtwinkliges Dreieck. Aus einem solchen und einem zu ihm kongruenten Dreieck kann man ein Rechteck zusammensetzen, dessen Flächeninhalt gleich dem Produkt der beiden Kathetenlängen des Ausgangsdreiecks ist. Also ist dessen Fläche gleich $ab/2$, wo a, b die beiden Kathetenlängen bezeichnet.

18.3 Allgemeines Dreieck. Wähle eine Seite als sogenannte **Grundseite** mit der Länge g und betrachte die Höhe mit der Länge h vom gegenüberliegendem Eckpunkt aus. Je nachdem, ob diese Höhe mit einer Seite übereinstimmt, im Innern des Dreiecks oder aber außerhalb desselben verläuft, ist das Dreieck rechtwinklig (wo Höhe und Grundseite die beiden Katheten sind) oder seine Fläche die Summe zweier Flächen rechtwinkliger Dreiecke oder aber die Differenz zweier solcher. Allgemein bekommt man für die Dreiecksfläche das Maß

$$\frac{gh}{2}$$

18.4 Trapez. Ein solches ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten. Ihr Abstand sei h. Seien a, c die Seitenlängen der beiden parallelen Seiten. Durch eine Diagonale zerlegt man das Trapez in zwei Dreiecke, die beide die Höhe h und die Grundseitenlängen a bzw. c haben. Es ergibt sich als Fächeninhalt des Trapezes:

$$\frac{(a + c)h}{2}$$

Im Spezialfall des Parallelogrammes gilt $a = c$. Seine Fläche ist also ah.

Remarks 18.5 a) Ich habe auf der Schule ein umgekehrtes Verfahren kennengelernt: Zunächst wurde der Flächeninhalt eines Parallelogrammes ermittelt, indem ein Dreieck „an einer Seite“ abgeschnitten und an die andere angelegt wurde. Das ist aber nicht immer so einfach. Siehe Abbildung!

b) Jede geradlinig begrenzte beschränkte Figur lässt sich in Dreiecke zerlegen. Ihre Flächengröße lässt sich ohne infinitesimale Betrachtungen definieren und berechnen. Das Entprechende gilt nicht mehr für das Volumen von Körpern, die durch Ebenenstücke begrenzt sind. (Satz von Dehn). Dies ist einer der Sätze, die man je nach Temperament ärgerlich oder faszinierend finden kann.

Remark 18.6 HERONISCHE FORMEL. Da Dreiecke durch die Längen ihrer 3 Seiten bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt sind und kongruente Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben, ist es prinzipiell möglich, den Flächeninhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seitenlängen zu berechnen. Wir gehen wie folgt vor:

Da die Höhe $h_c = b \sin\alpha$ ist, gilt für den Flächeninhalt F des Dreiecks:

$$2F = bc\sin\alpha$$

Aus dem Cosinussatz ergibt sich

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2} = bc\cos\alpha$$

Quadriere beide Gleichungen und addiere sie unter Beachtung, dass $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ist:

$$4F^2 + \frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)^2 = b^2c^2$$

Also

$$16F^2 = -(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2b^2+2b^2c^2-4b^2c^2) = 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$$

$$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 16s(s-a)(s-b)(s-c), \text{ wo } s := \frac{a+b+c}{2} \text{ sei.}$$

Remark 18.7 GAUSS. Ein beliebiges n-Eck **ohne Überschneidungen**, aber nicht notwendig konvex, habe in einem orthonormalen, wie üblich orientierten, Koordinatensystem die Eckpunkte $(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. Dabei seien die Eckpunkte der Reihenfolge nach angegeben, so dass beim Durchlaufen des Randes das Innere des n-Ecks links liege. Wir setzen noch $(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$.

Dann gilt für die Fläche F des n-Ecks:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_{k-1}-x_k)(y_{k-1}+y_k)$$

Man hat Trapezflächengrößen teils negativ, teils positiv zu addieren.

18.8 Kreis. Bei einem Kreis ist es nicht nur interessant, seinen Flächeninhalt, sondern auch, seinen Umfang, d.h. die Länge der Kreislinie zu bestimmen. Zunächst ermitteln wir einen Zusammenhang zwischen diesen Größen.

Beschreibt man einem Kreis ein regelmäßiges n-Eck um, so ist dessen Flächeninhalt gleichgroß wie der eines Dreiecks, dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises und dessen Umfang gleich dem Umfang des n-Ecks ist. Vergrößert man n – etwa durch Verdoppeln, so nähert sich sowohl der Flächeninhalt des n-Ecks als auch sein Umfang dem des Kreises beliebig an. Das ist doch anschaulich klar. Und ich glaube, dass die Schüler das akzeptieren.

Hieraus folgt: Ist u der Umfang eines Kreises vom Radius r, so ist sein Flächeninhalt $ur/2$.

Nun habe man zwei Kreise von den Radien r und r' und den Umfängen u und u'. Zeichnet man um beide ein regelmäßiges n-Eck, so sind die beiden n-Ecke zueinander ähnlich. Für ihre Umfänge u_n, u'_n gilt also $u_n/u'_n = r/r'$. Da aber $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ und $u' = \lim_{n\to\infty u'_n}$ ist, gilt somit auch $u/u' = r/r'$. Damit ist das Verhältnis u/r, also auch $u/2r$ konstant als Funktion von r. (Beachte, dass u von r abhängig ist.)

Man kann also definieren:

Definition 18.9 *$\pi := u/2r$, wo u der Umfang eines Kreises vom Radius $r \neq 0$ ist.*

Beachte, dass diese Definition nur in der euklidischen Geometrie möglich ist, da wir ein Ähnlichkeitsargument benutzt haben.

18.10 Der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r ist nach obigem gleich $ur/2 = 2\pi r \cdot r/2 = \pi r^2$. Die Länge der Kreislinie ist *nach Definition* gleich $2\pi r$.

Man kann π näherungsweise berechnen, indem man u_n für große n berechnet. Archimedes hat dies getan. Heute liefert die Analysis weit bessere Methoden. S.u. Man kann auch verhältnismäßig leicht zeigen, dass π irrational ist. Schwierig ist allerdings der Beweis des Satzes, dass π transzendent ist, d.h. keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt.

Remark 18.11 Noch einmal: Auf Grund der Ähnlichkeit aller Kreise gibt es eine (universelle) Konstante π_1 mit der Eigenschaft, dass der Umfang eines Kreises vom Radius r gleich $2\pi_1 r$ ist. Aus dem selben Grund gibt es eine (universelle) Konstante π_2 derart, dass der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r gleich $\pi_2 r^2$ ist. Die eigentliche Erkenntnis, die wir oben in (18.8) gewonnen haben, ist $\pi_1 = \pi_2$.

18.12 Möndchen des Hippokrates. Es gibt eine durch Kreislinien begrenzte Figur, deren Flächengröße sich ohne Benutzung von π berechnen lässt. Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathete a, b und der Hypotenuse c. Betrachte je einen Halbkreis auf den Dreiecksseiten. Die Flächengröße eines Halbkreises ist proportional zum Quadrat seines Durchmessers. Deshalb gilt auf Grund des „Pythagoras“: Die Flächengröße f_c des Halbkreises über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächengrößen f_a und f_b der Halbkreise über den Katheten.

Jetzt zeichne man über den beiden Katheten je einen Halbkreis „außerhalb“ des Dreiecks, hingegen über der Hypotenuse den Halbkreis, der durch C geht (Thales). Man sieht zwei „mondförmige“ Flächen. Deren Gesamtinhalt ist so groß, wie die Dreiecksfläche – wie man leicht rechnet.

Leider kann man diese Erkenntnis nicht zur Berechnung von π verwenden!

Beachte, dass in Wahrheit eine Mondsichel (bei einem exakt kugelförmigen Mond) nicht von zwei Kreislinienabschnitten begrenzt wird! Sondern?

18.13 Berechnung von π nach Leibniz. Es ist $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$. Wir versuchen deshalb, den Arcustangens in eine Potenzreihe zu entwickeln und nutzen, dass

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist. Für $|x| < 1$ gilt nach der Summenformel der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Da man Potenzreihen in ihrem offenen Konvergenzbereich ableiten kann, indem man gliedweise ableitet, ist

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

für $|x| < 1$ eine Stammfunktion von $(1+x^2)^{-1}$. Da $F(0) = 0 = \arctan 0$ ist, stimmen beide Stammfunktionen überein:

$$\arctan x = F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe auch für $x = 1$. Nach dem Abelschen Grenzwertsatz ist ihr Wert in 1 gleich $\arctan 1$:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots.$$

Diese von Leibniz gefundene Reihe konvergiert nicht besonders schnell. Schneller geht es, wenn man mit o.g. Potenzreihe $\pi/6$ ausrechnet. (Leider ist der Tangens von $\pi/6$ eine irrationale Zahl, nämlich $\sqrt{3}3$, die man also auf mindestens soviele Stellen ausrechnen muss, wie man π berechnen will.)

18.14 Volumen eines allgemeinen Kegels. Sei in einer Ebene E ein Flächenstück F mit dem Flächeninhalt f gegeben. Sei P ein Punkt außerhalb der Ebene E im Abstand h von E gegeben. Der **Kegel über F mit der Spitze P** ist die Vereinigung aller Verbindungsstrecken von P zu den Punkten von F. (Wir sprechen hier von einem allgemeinen Kegel, der ein eigentlicher Kegel in dem Fall ist, dass F eine Kreisfläche und das Lot von P auf die Ebene E diese im Mittelpunkt von F trifft.)

Proposition 18.15 *Das Volumen des o.a. allgemeinen Kegels ist $fh/3$.*

Proof: Wir benutzen die Integralrechnung. Dazu betrachten wir folgende Funktion: Sei E_x für $0 \leq x \leq h$ die zu E parallele Ebene. die zwischen P und E liegt und von P den Abstand x hat. Der Schnitt der Ebene E_x mit dem betrachteten Kegel ist ein zu F ähnliches Flächenstück, dessen Flächeninhalt f_x sich zu f verhält wie x_2 zu h^2, also

$$f_x = \frac{fx^2}{h^2}$$

Das Volumen ist somit

$$\int_0^h f_x dx = \int_0^h \frac{fx^2}{h^2} dx = \frac{f}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{fh^3}{3h^2} = \frac{fh}{3}$$

$\square$

Remark 18.16 Wenn man die Volumenberechnung elementarer (geometrischer) Körper vor der Integralrechnung einführt, benutzt man i.A. das **Prinzip des Cavalieri**: *Seien K, L Körper im Raum und E eine Ebene, derart dass die zu E parallelen Ebenen beide Körper in gleich großen Flächenstücken schneiden, so haben K und L das gleiche Volumen.*

Dieses „Prinzip“ gewinnt man durch eine infinitesimale Betrachtung, ohne welche man nach dem Satz von Dehn bei der dreidimensionalen Volumenberechnung nicht auskommt.

Jedes – auch schräge – **Prisma** hat dann das Volumen *Grundfläche*$\times$*Höhe*.

Sei jetzt eine (nichtägyptische) **Pyramide** mit dreieckiger Grundfläche vom Maß f gegeben, so kann man diese mit zwei anderen (nicht notwendig kongruenten aber) nach dem Cavalieri-Prinzip gleichgroßen solchen Pyramiden zu einem Prisma zusammensetzen und erhält deshalb als Volumen der Pyramide $fh/3$.

Dies kann man auf allgemeine Kegel leicht verallgemeinern, wenn deren Grundfläche geradlinig begrenzt ist. Im allgemeinen Fall, etwa dem Kreiskegel, muss man noch eine infinitesimale Betrachtung hinzufügen.

Proposition 18.17 *Eine Kugel vom Radius r hat das Volumen $4\pi r^3/3$.*

Proof: (Archimedes) Wir betrachten eine Halbkugel vom Radius r, die mit ihrer ebenen Seite auf einer Ebene E steht. Neben dieser Halbkugel stehe auf einer Grundseite ein **Zylinder**, dessen Grundseite ein Kreis vom Radius r und dessen Höhe gleich r ist. Aus diesem sei ein Kreiskegel so ausgebohrt, dass dessen Spitze der Mittelpunkt der (kreisförmigen) Zylindergrundfläche in E ist, dessen Grundfäche gleich der oberen Grundfläche des Zylinders ist. Das Volumen des auf diese Weise entstehenden Differenzkörpers ist $r^3\pi - \frac{1}{3}r^3\pi = \frac{2}{3}r^3\pi$.

Behauptung: Jede zu E parallele Ebene F schneidet aus der Halbkugel und dem Differenzkörper von Zylinder und Kegel gleichgroße Flächenstücke aus.

Beweis hierfür: Liegt F „unterhalb“ E oder in einem Abstand $> r$ zu E, so ist der Durchschnitt von F sowohl mit der Halbkugel. als auch mit dem Differenzkörper leer. Im Abstand x mit $0 \leq x \leq r$ oberhalb von E hat F mit der Halbkugel als Schnitt eine Kreisfläche vom Radius $\sqrt{r^2 - x^2}$. Dessen Flächeninhalt ist also $(r^2 - x^2)\pi$. Der Durchschnitt mit dem Differenzkörper ist ein Kreisring, dessen äußerer Radius r und dessen innerer Radius x ist. Sein Flächeninhalt ist also $r^2\pi - x^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$.

Nach dem Prinzip des Cavalieri ist also auch das Volumen der Halbkugel gleich $2r^3\pi/3$. □

Remark 18.18 Mit unseren heutigen Kenntnissen kann man natürlich auch einfach das Integral

$$\int_{-r}^{3} \pi(r^2 - x^2)dx$$

ausrechnen um das Volumen der Kugel vom Radius r zu erhalten.

18.19 Sei O_r der Oberflächeninhalt einer Kugel vom Radius r. Analog zum Vorgehen beim Kreis zeigt man mit infinitesimalen Betrachtungen, dass das Volumen der Kugel vom Radius r gleich dem eines Kegels der Höhe r über einer Fläche vom Inhalt O_r ist. In Formeln:

$$\frac{rO_r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}, \text{ also } O_r = 4\pi r^2.$$

18.20 Sei K eine Kugel und E eine Ebene durch den Mittelpunkt dieser Kugel. E und die Oberfäche der Kugel mögen sich in der Kreislinie S, die wir als Äquator auffassen können, schneiden. Wir errichten über dieser Kreislinie den Zylinder Z, der nach beiden Seiten von E durch Ebenen im Abstand r begrenzt ist. Seien ferner F_1, F_2 zu E parallele Ebenen, welche die Kugel K, oder – äquivalent dazu – den Zylinder Z, schneiden. Dann hat der Teil der Kugeloberfläche, der zwischen diesen beiden Ebenen liegt, den gleichen Inhalt wie der Teil des Zylindermantels der zwischen diesen beiden Ebenen liegt.

Wenn man die Methode der sogenannten **Flächenelemente** zur Begründung zulässt, ist dies ziemlich einfach zu beweisen.

19 Stereometrie

Bislang haben wir fast ausschließlich Geometrie in der Ebene betrieben. Geometrie im (anschaulichen, d.h. 3-dimensionalen) Raum heißt Stereometrie. Diese kommt in der Schule ziemlich kurz. Auf der einen Seite ist dies verständlich. Denn die räumliche Anschauung fällt vielen schwer, auch mir. (Noch viel schwerer fällt es mir allerdings, räumliche geometrische Tatsachen zu erklären.) Außerdem kann man im Raum nicht zeichnen. Und schließlich kann man in der Schule ja auch nicht alles machen. Auf der anderen Seite ist die mangelnde Beschäftigung mit dem räumlichen Denken auch bedauerlich. Denn wir leben nun mal im Raum. Manche Moleküle kann man nur im 3-Dimensionalen richtig verstehen und voneinander unterscheiden! So geht es auch mit vielen Maschinen. Die Beschäftigung mit 3-dimensionaler Geometrie könnte die 3-dimensionale Anschauung effektiv schulen. Auch jemand, der alle stereometrischen Sätze vergessen hat, kann möglicherweise in seinem späteren Leben und Beruf von einer Schulung der räumlichen Anschauuung profitieren.

Wir werden nur einige Aspekte der Stereometrie streifen.

19.1 Windschiefe Geraden. In der Ebene haben wir für ein Paar von Geraden folgende Möglichkeiten: Sie schneiden sich in genau einem Punkt, oder sie sind zueinander parallel. Dabei hat für uns die Parallelität eine sehr anschauliche Bedeutung. Im Raum kann man sicher viele Paare von Geraden finden, die in keiner gemeinsamen Ebene liegen. Diese nennt man **windschief** zueinander.

Wir wollen zwei Geraden (dann und) nur dann **parallel** nennen, wenn sie in einer gemeinsamen Ebene liegen und in dieser parallel sind. (Das schließt natürlich den Fall ein, dass die beiden Geraden übereinstimmen.)

19.2 Zwei Ebenen im Raum schneiden sich „im Allgemeinen“ in einer Geraden. (Wenn sie einen Punkt gemeinsam haben, haben sie auch mindestens eine Gerade gemeinsam.) Sie heißen **parallel**, wenn sie entweder übereinstimmen oder keinen Punkt gemeinsam haben.

19.3 Zu einer Ebene e und einem Punkt P im Raum gibt es genau eine Gerade g, die senkrecht zu e ist und durch P geht.

(Was heißt hier „senkrecht“?)

Zu einer Geraden g und einem Punkt P im Raum gibt es geneu eine Ebene e, die senkrecht zu g durch P geht. Zu einer Strecke gibt es also eine mittelsenkrechte Ebene.

19.4 Das Analogon zum Dreieck in der Ebene ist im Raum das **Tetraeder**. Es wird durch 4 Punkte gegeben, die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen. Je drei der vier Punkte bestimmen ein Dreieck, eine **Seite(nfläche)** des Tetraeders. Man hat also vier Seitenflächen, daher der Name Tetraeder, d.h. Vierflach. Ferner hat das Tetraeder sechs **Kanten** und vier **Eckpunkte**.

Wir wollen merkwürdige Punkte im Tetraeder finden und beginnen mit dem **Schwerpunkt**.

Proposition 19.5 *Die Verbindungsstrecken der Eckpunkte eines Tetraeders mit den Schwerpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seiten schneiden sich in einem Punkt.*

Proof: Wir denken uns die Eckpunkte $A, B, C.D$ des Tetraeders als Vektoren, bei einem beliebig angenommenen Ursprung (Nullpunkt). Wir zeigen, dass der Punkt $(A+B+C+D)/4$ auf jeder der angegebenen Strecken liegt.

Der Schwerpunkt der Seite ABC ist bekanntlich $S_d = (A+B+C)/3$. Da $(1/4) + (3/4) = 1$ ist, liegt

$$\frac{1}{4}D + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(A+B+C)\right) = \frac{1}{4}(A+B+C+D)$$

auf der Verbindungsgeraden von D mit S_d. Er liegt zwischen D und S_d, da $1/4$ und $3/4$ positiv sind. □

Proposition 19.6 *Die Senkrechten auf den Seiten in den jeweiligen Umkreismittelpunkten schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt der Umkugel (oder Umsphäre) des Tetraeders, d.h. dem Punkt, der von allen vier Ecken des Tetraeders den selben Abstand hat.*

Proof: Es ist nicht ganz klar, dass es einen Umkugelmittelpunkt überhaupt gibt. Während bei einem nichtausgearteten Dreieck klar ist, dass die Mittelsenkrechten zweier verschiedener Seiten sich schneiden, könnten die o.a. Geraden zueinander windschief sein.

Sei g die zum Dreieck ABC senkrechte Gerade durch den Umkreismittelpunkt desselben Dreiecks und e eine (meist *die*) Ebene durch g und D. Diese schneide die Umkreislinie in den Punkten E, F. Der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks DEF liegt auf g und hat von E (und F) denselben denselben Abstand, wie zu allen Punkten des Umkreises von ABC, inbesondere zu den Punkten A, B, C – der Umkreis von ABC ist der Schnitt der Kugel um U mit dem Radius $l(UE)$ mit der Ebene, in der ABC liegt. Diesen Abstand hat er auch zu D, da U der Umkreismittelpunkt von DEF ist. Mithin ist U der gesuchte Punkt. □

Remark 19.7 Man kann auch zeigen, dass die mittelsenkrechten Ebenen der sechs Kanten eines Tetraeders sich in dem Umsphären-Mittelpunkt schneiden.

19.8 Es gibt auch eine Inkugel eines beliebigen Tetraeders. Durch jede Kante legt man die Ebene, die den Innenwinkel (Definition??) der anliegenden Seiten halbiert. Man sieht – analog zu dem obigen Vorgehen oder dem zur Konstruktion des Inkreismittelpunktes – dass diese Ebenen sich in einem Punkt schneiden, dem Inkugelmittelpunkt.

Es gibt natürlich auch vier Ankugeln.

Remark 19.9 Die Höhen (Definition?) eines Tetraeders schneiden sich im Allgemeinen nicht!

20 Komplexe Zahlen

Glaub mir: Die Erfindung oder – so man will – Entdeckung der komplexen Zahlen ist sicher eine der wunderbarsten Leistungen unserer mathematischen Vorfahren.

Wenn man von den natürlichen Zahlen aus über die ganzen und rationalen Zahlen schließlich zu den reellen Zahlen gelangt ist, ist ein gewisser Abschluss erreicht. Man kann z.B. jeden Punkt des (euklidischen) Raumes – nach Festlegung eines Koordinatensystems – durch ein Tripel reeller Zahlen beschreiben, was bekanntlich nicht möglich ist, wenn man sich auf die rationalen oder die positiven reellen Zahlen beschränkt. Wen kümmert es eigentlich ernsthaft, dass man aus negativen Zahlen keine Quadratwurzeln ziehen kann? Man verzichtet ja auch darauf, durch 0 zu dividieren.

Komplexe Zahlen. Es gibt mehrere Gründe, warum die komplexen Zahlen aus der modernen Mathematik nicht mehr wegzudenken sind. Ich will versuchen, dies im Folgenden zu erläutern. Komplexe Zahlen lassen sich in der Form $a+bi$ schreiben, wobei a, b reelle Zahlen sind, während i eine neue Zahl mit der merkwürdigen Eigenschaft $i^2 = -1$ ist.

1. Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle, zerfällt somit in Linearfaktoren, z.B. ist $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1$, wird also im Reellen nie 0, hat aber im Komplexen die Nullstellen $1+i, 1-i$, besitzt also die Linearfaktorzerlegung $x^2-2x+2 = (x-1-i)(x-1+i)$. Nach einem interessanten Satz von Hilbert, folgt, dass auch Systeme von Polynomen in mehreren Variablen gemeinsame (komplexe) Nullstellen haben, es sei denn, dies ist aus *trivialen* Gründen nicht möglich. (Z.B. können die 3 Polynome $x,\ y,\ 2x+3y+1$ trivialer Weise keine gemeinsame Nullstelle haben – es gibt offenbar keine komplexen Zahlen ξ, η, so dass $\xi = 0, \eta = 0$ und $2\xi + 3\eta + 1 = 0$ wäre. Hingegen haben die Polynome $x^2 + y^2 - 1$ und $x - 2$, die in der reellen Ebene einen Kreis, bzw. eine außerhalb dieses Kreises verlaufende Gerade beschreiben, die gemeinsamen Nullstellen $(2, \sqrt{3}i)$ und $(2, -\sqrt{3}i)$.

2. Die Funktion exp kann man auch für beliebige komplexe Argumente erklären, nämlich mit der bekannten Potenzreihe. Es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen exp, sin, cos, den man im Reellen nicht herstellen kann. Der Physiker Feynman war als Schüler ganz begeistert von der Identität $e^{\pi i} + 1 = 0$ die man aus diesem Zusammenhang ableiten kann.

3. Es gibt eine reichhaltige und schöne Theorie der differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf Bereichen der komplexen Zahlenebene, die so genannte Funktionentheorie.

4. Es gibt überraschende Anwendungen der Funktionentheorie in der Theorie der Primzahlen.

5. In der Algebra und der (algebraischen) Zahlentheorie sind die komplexen Zahlen genau so wie die reellen beheimatet.

6. Die berühmte Fermat'sche Vermutung, dass es nämlich für ganze $n \geq 3$ keine von 0 verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z gibt, so dass $x^n + y^n = z^n$ ist, wurde erst vor etwa 10 Jahren bewiesen – u.a. mit Hilfsmitteln, die ohne komplexe Zahlen nicht auskommen.

Bemerkung: In dem überaus spannenden Buch 'Verdammnis' von Stieg Larsson bekommt man den Eindruck, die Fragestellung beziehe sich nur auf den Fall $n = 3$. Dieser Fall wurde allerdings möglicher Weise bereits von Fermat (ohne dass wir wüssten, wie) später von Euler mit einer gewissen Ungenauigkeit, schließlich aber von Gauss, Kummer u.a. makellos erledigt.

7. Weder die Physik noch die Elektrotechnik können auf komplexe Zahlen verzichten!

Die erste Ahnung davon, dass sich möglicherweise hinter der durch reelle Zahlen beschriebenen Realität eine mathematisch relevante Wirklichkeit verbirgt, bekamen unsere Vorfahren in der Renaissance.

Kubische Gleichungen: Du bist sicher in der Lage, quadratische Gleichungen zu lösen. Auf die sogenannte „p-q-Formel“ kommt man durch die quadratische „Ergänzung“. Wenn man analog eine „kubische Ergänzung“ auf kubische Gleichungen (d.h. solche 3. Grades) anzuwenden versucht, erreicht man lediglich eine Reduktion auf Gleichungen der Form $x^3+px+q=0$. Eine Lösungsformel für diese Gleichung fand (wahrscheinlich) Tartaglia im Jahre 1535:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Für die Gleichung $x^3-3x+2=0$ z.B. liefert Tartaglias Formel die Lösung $x = \sqrt[3]{-1+\sqrt{1-1}}+\sqrt[3]{-1-\sqrt{1-1}} = -2$, die offenbar richtig ist. (Allerdings ist 1 eine weitere Lösung.) Ebenso erhält man mit Tartaglias Formel die Lösung 0 der Gleichung $x^3+x=0$. (Diese ist übrigens die einzige Lösung im Bereich der reellen Zahlen.)

Bei der ebenso simplen Gleichung $x^3-x=0$ scheint allerdings Tartaglias Formel zu versagen. Sie ergibt

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}$$

Die (richtige) Lösung 0 erhält man nur dann, wenn man sich großzügig darüber hinwegsetzt, dass der zweimal vorkommende Ausdruck $\sqrt{-\frac{1}{27}}$ im Bereich der reellen Zahlen gar keinen Sinn hat. An dieser Stelle würde man eben doch ganz gerne Quadratwurzeln aus negativen Zahlen ziehen können!) Die weiteren Lösungen 1 und -1 scheint man mit Tartaglias Formel gar nicht zu finden.

Dies sollte weniger ein Grund zur Resignation sein, als einer dafür, Quadratwurzeln aus negativen Zahlen einen Sinn zu geben. Umso mehr, als in Tartaglias Formel solche merkwürdigen Ausdrücke häufig genug auftreten, nämlich immer gerade dann, wenn die Gleichung drei verschiedene reelle Lösungen hat. (Es gibt auch keine besseren anderen Formeln, die außer den Grundrechenarten lediglich Wurzeln verwenden, mit denen man dieses unangenehme Phänomen, *casus irreducibilis* genannt, vermeiden kann!)

20.1 KOMPLEXE ZAHLEN: Die Mathematiker erfanden zu den reellen Zahlen eine neue Zahl dazu, die „i“ genannt wurde und die merkwürdige Eigenschaft $\mathrm{i}^2=-1$ hat, und betrachteten als neue, sogenannte komplexe Zahlen die Ausdrücke der Gestalt $a+b\mathrm{i}$ mit reellen Zahlen a,b. (Zunächst sprach man von imaginären, d.h. eingebildeten Zahlen. Daher auch der Buchstabe i. Da man teilweise unter imaginären Zahlen nur sog. rein-imaginäre Zahlen, d.h. solche der Form $b\mathrm{i}$ mit reellem b verstand, kam man auf den Namen „komplexe Zahl“ für eine Summe aus einer reellen und einer (rein) imaginären Zahl.)

So wie man die reellen Zahlen als Punkte auf einer Geraden auffassen kann, so fasst man die komplexen Zahlen als Punkte in einer Ebene auf, die komplexe Zahl $a+b\mathrm{i}$ bekommt die (rechtwinkligen) Koordinaten (a,b). Es ist auch nützlich, sich die Zahl $a+b\mathrm{i}$ als den Vektor vorzustellen, der von $(0,0)$ nach (a,b) geht.

Mit komplexen Zahlen wird gerechnet wie gewohnt, allerdings unter der Bedingnis, dass immer $\mathrm{i}^2=-1$ sei. Also etwa

$$(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i}) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i},$$

was geometrisch der Vektoraddition entspricht,

$$(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i}) = a_1a_2+a_1b_2\mathrm{i}+a_2b_1\mathrm{i}+b_1b_2\mathrm{i}^2 = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i},$$

(Vorsichtige Leute – wie ich z.B. – werden allerdings zunächst die komplexe Zahl $a+b\mathrm{i}$ als Paar (a,b) reeller Zahlen a,b schreiben und dann $(a_1,b_1)(a_2,b_2) := (a_1a_2 - b_1b_2\ ,\ a_1b_2 + a_2b_1)$ und $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2\ ,\ b_1+b_2)$ **definieren**, um dann wirklich **beweisen** zu können, dass alle gewohnten Rechenregeln gelten.)

20.2 Die Zahlen $0 = 0+0\mathrm{i}$ und $1 = 1+0\mathrm{i}$ behalten ihre bekannten Eigenschaften. Man kann natürlich subtrahieren und sogar dividieren. Für $a+b\mathrm{i} \neq 0$ gilt nämlich

$$\frac{1}{a+b\mathrm{i}} = \frac{a-b\mathrm{i}}{(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,\mathrm{i}$$

(Beachte, dass $a^2+b^2 \neq 0$ ist, wenn nicht beide reellen Zahlen a,b gleich 0 sind.)

Als spezielles Beispiel rechne $(1+\mathrm{i})^2 = 1+2\mathrm{i}-1 = 2\mathrm{i}$, also $(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i})^2 = \frac{1}{2}(2\mathrm{i}) = \mathrm{i}$, mithin $(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i})^4 = \mathrm{i}^2 = -1$. Im Bereich der komplexen Zahlen ist also -1 nicht nur ein Quadrat, sondern auch eine 4. Potenz (übrigens – wie wir unten sehen werden – auch eine 6., 8. usw.). Wir bleiben bei diesem Beispiel und setzen abkürzend $v := \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$. Dann ist $v^3 = v^2v = \mathrm{i}v = -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$, $\quad v^5 = v^4v = -v$, $\quad v^6 = v^4v^2 = -\mathrm{i}$ $\quad v^7 = v^4v^3 = -v^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$ und schließlich $v^8 = (v^4)^2 = (-1)^2 = 1$. Dann wiederholen sich die Werte der Potenzen, also $v^9 = v^8v = v$, $v^{10} = v^8v^2 = v^2 = \mathrm{i}$, $v^{11} = v^8v^3 = v^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$ usw. Für jede beliebige (ganze) Potenz v^k gilt offenbar $(v^k)^8 = (v^8)^k = 1^k = 1$. D.h. wir haben insgesamt 8 verschiedene Zahlen gefunden, deren 8. Potenz 1 ergibt, nämlich $1, v, v^2, \ldots, v^7$.

Ein weiteres Beispiel. Setze $w := \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Dann ist $w^2 = \frac{1}{4}-\frac{3}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ und $w^3 = ww^2 = (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}) = -\frac{1}{4}-\frac{3}{4} = -1$. Weiter erhält man $w^4 = w^3w = -w$, $w^5 = w^3w^2 = -w^2$ und $w^6 = w^3w^3 = (-1)(-1) = 1$. Wie oben wiederholen sich jetzt die Potenzen: $w^7 = w^1$, $w^8 = w^2$ usw. Ebenso siehst Du, dass für jede ganze Potenz w^k von w gilt: $(w^k)^6 = 1$. Es gibt also (mindestens) 6 verschiedene komplexe Zahlen, die die Gleichung $x^6 = 1$ erfüllen.

20.3 Zur geometrischen Deutung der Multiplikation. Sei $c = a+b\mathrm{i}$, $a,b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Ihr (Absolut-)Betrag wird definiert als $|c| := \sqrt{a^2+b^2}$, d.h. als Länge des entsprechenden Vektors (Pythagoras). Sei $c \neq 0$, d.h. $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Der Vektor c hat zum Vektor $1 = 1+0\mathrm{i}$ einen (orientierten) Winkel, den man als Argument von c bezeichnet. (Das Argument ist im Grunde nur bis auf Addition eines Vielfachen von 2π definiert.) Ist φ das Argument von c, so gilt offenbar

$$c = |c|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),\ \text{d.h. } a = |c|\cos\varphi,\ b = |c|\sin\varphi.$$

Für zwei von 0 verschiedene komplexe Zahlen c_1, c_2 mit den Argumenten φ_1, φ_2 erhalten wir mit Hilfe der Additionstheoreme des Sinus und des Cosinus

$$c_1c_2 = |c_1||c_2|\Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\Big) =$$

$$|c_1||c_2|\Big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big)$$

D.h. der Betrag des Produktes ist das Produkt der Beträge und das Argument des Produktes ist die Summe der Argumente der Faktoren. Es folgt z.B.

$$c^n = |c|^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)).$$

Dies gilt für jede positive ganze Zahl n (und, wie man sich leicht überlegt, auch für jede ganze Zahl n).

20.4 Die Dreiecksungleichung Wir wollen die Dreiecksungleichung

$$|c + d| \leq |c| + |d|$$

beweisen. Geometrisch bedeutet sie, dass die Summe der Längen zweier Seiten eines Dreiecks größer als die dritte Seite ist. Hier wollen wir das 'ungeometrisch' zeigen:

Zunächst gilt für jede komplexe Zahl c die Ungleichung

$$|\mathrm{Re}(c)| \leq |c|, \text{ da } \qquad |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |a + b\mathrm{i}| \text{ gilt.}$$

Ferner ist offenbar $2\mathrm{Re}(c) = (c + \bar{c})$ und $\overline{\bar{c}d} = c\bar{d}$, sowie $|\bar{c}| = |c|$. Es folgt

$$|c+d|^2 = (c+d)(\bar{c}+\bar{d}) = c\bar{c}+d\bar{d}+c\bar{d}+\bar{c}d = |c|^2+|d|^2+2\mathrm{Re}(c\bar{d}) \leq |c|^2+|d|^2+2|c||d| = (|c|+|d|)^2$$

und daraus die Dreiecksungleichung.

20.5 Potenzen mit natürlichen Exponenten. Sei n gaz und > 0. Wenn z den Betrag r hat, d.h. auf einem Kreis vom Radius r um 0 liegt, so hat z^n den Betrag r^n, liegt somit auf dem Kreis vom Radius r^n um 0.

Wenn z das Argument α hat, so hat z^n das Argument $n \cdot \alpha$, zumindest bis auf ein Vielfaches von 2π.

Wir lassen z den Kreis S_r um 0 vom Radius $r > 0$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit 1 durchlaufen und beobachten, welchen Weg dabei z^n nimmt. Nach dem, was wir uns gerade überlegt haben, durchläuft z^n den Kreis S_{r^n} vom Radius r^n und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit n. Wenn z den Kreis S_r einmal durchläuft, so durchläuft z^n den Kreis S_{r^n} genau n-mal. Es trifft dabei jeden Punkt auf S_{r^n} genau n-mal.

Was bedeutet das für die Existenz und Vielfachheit von Wurzeln, d.h. die Lösungen der Gleichung $x^n = c$?

Sei $c \neq 0$ eine komplexe Zahl mit dem Argument φ und $d := \sqrt[n]{|c|}(\cos(\varphi/n) + \mathrm{i}\sin(\varphi/n))$ $(n > 0)$ so gilt offenbar $d^n = c$. D.h. man kann aus jeder komplexen Zahl für jede natürliche Zahl $n > 0$ eine n-te Wurzel ziehen.

Allerdings ist das Wurzelziehen nicht eindeutig: Es gibt genau n verschiedene komplexe Zahlen d mit $d^n = c$, wenn nicht gerade $c = 0$ ist. Es ist $\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + k \cdot 2\pi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ für jede ganze Zahl k. Also ist jede komplexe Zahl $d_k := \sqrt[n]{|c|}(\cos(\varphi/n + k \cdot 2\pi/n) + \mathrm{i}\sin(\varphi/n + k \cdot 2\pi/n))$ eine n-te Wurzel aus c, d.h. $d_k^n = c$. Die Zahlen $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ sind untereinander verschieden, aber danach wiederholen sie sich: $d_n = d_0,\ d_{n+1} = d_1,\ \ldots$. Sie bilden offenbar die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.

Insbesondere gibt es n verschiedene komplexe Zahlen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, die alle die Gleichung $z^n = 1$ erfüllen. Eine von ihnen ist 1, alle haben den Betrag 1, d.h. sie befinden sich auf dem Einheitskreis. Sie bilden dort ein regelmäßiges n-Eck.

(Von dieser Tatsache ist Gauß ausgegangen, als es ihm kurz vor 1800 gelang, ein regelmäßiges 17-Eck allein mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.)

Definition 20.6 *Die Nullstellen von $x^n - 1$ in $\mathbb{C}$ heißen die n-**ten Einheitswurzeln**.*

Remark 20.7 Du weißt vielleicht noch von der Herleitung der Summenformel für die geometrische Reihe, dass $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = (x - 1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ ist. Dass bedeutet, dass die Nullstellen von $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ die von 1 verschiedenen n-ten Einheitswurzeln sind.

20.8 Der „Fundamentalsatz der Algebra“ besagt:

Jedes Polynom $z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1}z + c_n$ *mit komplexen Koeffizienten* c_j *hat (mindestens) eine komplexe Nullstelle.*
(Diesen Satz hat Gauß als erster vollständig bewiesen.)

(N.B. Dass ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen hat, ist ebenfalls ein richtiger und wichtiger – übrigens für beliebige Körper gültiger – Satz, der aber fast trivial zu beweisen ist und nicht als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet werden sollte! Wieder ein Beispiel dafür, wie unzuverlässig der ‘Brockhaus’ in Bezug auf die Mathematik ist.)

Vielleicht machen diese wenigen Beispiele schon deutlich, dass sich dem Mathematiker mit der Entdeckung/Erfindung der komplexen Zahlen ein „weites Feld“ öffnet, und er sich durch Beharren auf den reellen Zahlen viele Möglichkeiten verbauen würde. Als einzelnes Beispiel sei genannt, dass manche Sätze über die Verteilung der Primzahlen sich am besten mit Hilfe der komplexen Zahlen beweisen lassen. (Im Anhang findest Du eine Ausführung über die komplexe e-Funktion.)

Wer nun glaubt, komplexe Zahlen seien lediglich den Mathematikern zunütze, ist auf dem Holzweg: Keine Elektrotechnik und keine Quantenteorie ohne komplexe Zahlen.

Anhang

Zu Tartaglias Formel: Wenn man sie im Komplexen anwenden will, hat es mit mehrdeutigen Wurzel zu tun. Mit den Quadratwurzeln ist es einfach: Mit $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ sei willkürlich eine der beiden möglichen Wurzeln bezeichnet; $-\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ ist dann automatisch die andere. Jeder der beiden Summanden in Tartaglias Formel ist nun eine kubische Wurzel mit 3 möglichen Werten. So hat man insgesamt 9 mögliche Kombinationen. Es gibt nun eine Regel, welche 3 Kombinationen die Nullstellen des kubischen Polynoms ergeben. Hierauf will ich nicht genauer eingehen und verweise stattdessen auf das Buch „Kubische und biquadratische Gleichungen“ von Heinrich Dörrie (Leibniz Verlag München 1948).

Die komplexe e-Funktion: Für $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, setzt man $e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$. Dies ist keineswegs willkürlich. Denn für die so definierte Funktion gilt

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (*)$$

d.h. die aus dem Reellen bekannte Potenzreihenentwicklung gilt auch im Komplexen. Ferner erhält man auch für komplexe z_1, z_2 die Formel $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Die komplexe e-Funktiom bildet die reelle Achse $\{a + b\mathrm{i} \mid a \in \mathbb{R}, b = 0\}$ (bijektiv) auf die positive reelle Halbachse und die imaginäre Achse $\{a + b\mathrm{i} \mid a = 0, b \in \mathbb{R}\}$ (surjektiv) auf die Einheitskreislinie $\{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1\}$ ab.

Wenn man den Zielbereich der Funktion exp (mit $\exp(z) = e^z$) auf $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ einschränkt, so ist die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ surjektiv, aber nicht injektiv. Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ gilt, dass die $z + 2n\pi\mathrm{i}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ dasselbe Bild unter exp haben.

Man kann die Funktionen sin und cos auch definieren, indem man zunächst die Funktion e^z auch für komplexe z durch $(*)$ definiert und dann

$$\sin t := \mathrm{Im}(e^{ti}) \text{ und } \cos t := \mathrm{Re}(e^{it})$$

für reelle t definiert. Um dies geometrisch interpretieren zu können, zeigt man, dass die Abbildung $t \mapsto e^{ti}$ als Bewegung des Punktes e^{ti} in Abhängigkeit von der Zeit t eine Kreisbewegung mit der konstanten Kreisgeschwindigkeit 1 ist.

PLAUSIBILITÄT DES FUNDAMENTALSATZES. Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch $g(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{N}_1$ bildet die Kreislinie K_r vom Radius $r > 0$ um 0 auf die Kreislinie K_{r^n} vom Radius r^n um 0 ab, und zwar so, dass ein Umlauf um K_r zu n Umläufen um K_{r^n} wird. Sei jetzt $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ Wir setzen $a_n \neq 0$ voraus,da f sonst bereits die Nullstelle 0 hat.

Ist der Betrag von z sehr groß, so über wiegt der Anteil von z^n in starkem Maße die Anteile der übrigen Summanden in f. Also gilt: Wenn z die Kreislinie K_r einmal durchläuft und r sehr groß ist, so läuft $f(z)$ in der Nähe von K_{r^n} genau n-mal um den Nullpunkt herum. Lässt man jetzt r gegen 0 gehen, so zieht sich die Bildkurve von K_r auf den Punkt a_n zusammen. Irgendwann muss sie unterwegs über den Punkt 0 hinweggehen. Das heißt, es gibt eine Nullstelle von f.

20.9 Seien $c, z \in \mathbb{C},\ c \neq 0$ Man kann versuchen $c^z := \exp(z \ln(c))$ zu definieren. Dies hat den Vorzug, dass man bis auf die Bedingung $c \neq 0$ keine Einschränkung machen muss. Der Nachteil liegt darin, dass die „Funktion“ ln auf $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ von Natur aus unendlich viele Werte hat, die sich um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden. Das kommt daher, dass im Komplexen die Funktion exp nicht injektiv, sondern periodisch mit der Periode $2\pi i$ ist. Jeder noch so geschickt ausgewählte, auf ganz $\mathbb{C}^\times$ **eindeutig** definierte Logarithmus ist weder überall stetig, noch erfüllt er allgemein die Gleichung $\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$.

Man muss also damit leben, dass etwa der Ausdruck i^i zunächst unendlich viele Werte hat (die übrigens reell sind) und wenn man mit ihm rechnen will, angeben, welcher der möglichen Werte gemeint ist.

Example 20.10 Die möglichen Werte von i^i. Wenn man i^i als $\exp(i \cdot \ln i)$ definiert, so muss man die möglichen Werte von $\ln i$ bestimmen. Es gilt $\ln c = \ln |c| + i \arg(c)$. Für $c = a + bi$ mit reellen a, b ist $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ definiert. (Erinnerung: $\sqrt{r} \geq 0$.) $|c|$ ist also die euklidische Länge von c als Vektor. $\arg(c)$ ist (für $c \neq 0$) der Winkel dieses Vektors mit der positiven reellen Halbachse im Bogenmaß. Dieser Winkel ist aber nicht eindeutig, sondern nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt.

In unserem Fall ist $|i| = 1$ und $\arg i = \pi/2 + 2n\pi$, also $\ln i = i(\pi/2 + 2n\pi)$, wo $n \in \mathbb{Z}$ beliebig ist. Für i^i ergeben sich also die unendlich vielen möglichen Werte: $\exp(-\pi/2 + 2m\pi)$, die alle reell sind.

AUFGABEN

1. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit Einheitswurzeln.

   a) Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Welche gemeinsamen Nullstellen haben alle Polynome (über $\mathbb{C}$) der folgenden Gestalt: $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit $a_n \neq 0$ und $a_k = a_{n-k}$ für alle k?

   b) Bestimme die gemeinsamen Nullstellen der Polynome $f = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ und $g = x^{2011} + x^{122} + 1$ in $\mathbb{C}$.

   LÖSUNG: a) Jedenfalls ist -1 eine gemeinsame Nullstelle. Die Menge der Polynome der genannten Art bezeichnen wir mit S ('symmetrisch'). Wir zeigen, dass keine weitere komplexe Zahl Nullstelle aller Polynome aus S ist, indem wir zwei Polynome aus S angeben, die lediglich die Nullstelle -1 gemeinsam haben. Das Polynom $x^n + 1$gehört zu S. Da n ungerade ist, hat es die mit einem Minuszeichen versehenen n-ten Einheitswurzeln als Nullstellen, d.h. die Zahlen $-1, -\zeta, -\zeta^2, \ldots, , -\zeta^{n-1}$, wo $\zeta = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ ist.

Das Polynom $\varphi = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ hat die von 1 verschiedenen n-ten Einheitswurzeln als Nullstellen. $(x+1)\cdot\varphi = x^n + 2x^{n-1} + 2x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$ gehört auch zu S und hat neben -1 die von 1 verschiedenen n-ten Einheitswurzeln als Nullstellen. Das additiv Inverse einer n-ten Einheitswurzel ist aber bei ungeradem n nie eine n-te Einheitswurzel! (Für ungerades n ist $(-a)^n = -(a^n)$.) Die beiden zu S gehörenden Polynome $(x+1)\varphi$ und $x^n + 1$, haben außer -1 keine gemeinsame Nullstelle.

b) Wir Wissen aus obiger Lösung der Aufgabe a) dass $f = (x+1)(x^2+x+1)$ gilt. Also hat f einerseits die Nullstelle -1, andererseits die von 1 verschiedenen dritten Einheitswurzeln ζ, ζ^2 mit $\zeta = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = (1 + i\sqrt{3})/2$. Das Polynom g hat, wie man nachrechnet, nicht die Nullstelle -1. Hingegen hat g die Nullstellen ζ und ζ^2. Sei nämlich ξ eine der beiden Zahlen ζ, ζ^2. Dann ist $\xi^3 = 1$, also $\xi^{3k+m} = \xi^m$. Ferner gilt $\xi^2 + \xi + 1 = 0$. Es folgt $\xi^{2011} + \xi^{122} + 1 = \xi^1 + \xi^2 + 1 = 0$.

21 Das regelmäßige Fünfeck

21.1 Wir wollen zeigen, dass man einen Kreis (=Kreislinie) mit Zirkel und Lineal in 5 gleichlange Teilkurven zerlegen kann. Das bedeutet dass man ein regelmäßiges Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Dazu konstruieren wir die sog. 5-ten Einheitswurzeln, d.h. die komplexen Nullstellen des Polynoms $X^5 - 1$ in der Gaußschen Zahlenebene.

BILD!

Sei $\zeta = \cos(2\pi/5) + i \sin 2\pi/5$. Die komplexen Nullstellen des Polynoms $X^5 - 1$ sind dann

$$1,\ \zeta,\ \zeta^2,\ \zeta^3,\ \zeta^4\ .$$

Dabei ist natürlich

$$\zeta^3 = \zeta^{-2} = \overline{\zeta^2},\ \zeta^4 = \zeta^{-1} = \overline{\zeta}\ .$$

Für komplexe Zahlen z vom Betrag 1 ist ja $z^{-1} = \overline{z}$.

Es genügt, $\mathrm{Re}(\zeta) = (\zeta + \zeta^4)/2$ zu konstruieren. Wir wollen zeigen, dass $\beta = \zeta + \zeta^4$ und $\beta' = \zeta^2 + \zeta^3$ die Nullstellen eines quadratischen Polynoms über $\mathbb{Q}$ sind.

Hierzu berechnen wir die Summe und das Produkt dieser beiden Zahlen:
$\beta + \beta' = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4$. Nun ist $a := 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$. Denn $\zeta \cdot a = \zeta + \cdots + \zeta^5 = a$, da $\zeta^5 = 1$ ist, und somit $(1 - \zeta)a = 0$.

Also ist $\beta + \beta' = -1$.

Für das Produkt gilt:
$\beta\beta' = (\zeta + \zeta^4)(\zeta^2 + \zeta^3) = \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^7$. Da aber $\zeta^6 = \zeta$ und $\zeta^7 = \zeta^2$ ist, erhalten wir $\beta\beta' = -1$.

β ist also die positive Nullstelle von $X^2 + X - 1$. Diese berechnet sich zu $\beta = (-1 + \sqrt{5})/2$. (Später brauchen wir auch den Wert $\beta' = (-1 - \sqrt{5}/2$.) Da man mit Zirkel und Lineal die 4 Grundrechenarten zeichnerisch ausführen und zusätzlich Quadratwurzeln ziehen kann, kann β mit Zirkel und Lineal zeichnerisch aus einer Einheitsstrecke bestimmt und somit ein regelmäßiges 5-Eck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

21.2 Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt

Eine Strecke mit dem so genannten 'goldenen Schnitt' zu teilen bedeutet, sie so zu teilen, dass sich die ganze Strecke zu dem gößeren Teil verhält, wie dieser zu dem kleineren. Da man jede Strecke als als Längeneinheit wählen darf, hat man somit ein (positives) β zu finden, derart dass $1/\beta = \beta/(1-\beta)$, d.h. $\beta^2 + \beta - 1 = 0$ ist! Die Konstruktion des goldenen Schnitts ist also äquivalent zu der des regelmäßigen Fünfecks.

Wie konstruiert man den goldenen Schnitt mit Zirkel und Lineal?

Die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Seitenlängen 1 und 1/2 hat die Länge $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Wenn man von ihr eine Strecke der Länge 1/2 wegnimmt, bleibt eine Strecke der Länge $\beta = (-1 + \sqrt{5})/2$ übrig. Sei also $\overline{AB}$ eine Strecke der Länge 1. Errichte auf ihr in A ein Lot von der Länge 1/2 mit dem Endpunkt C und verbinde C mit B. Schneide $\overline{CB}$ mit dem Kreis um C durch A, also vom Radius 1/2. Der Schnittpunkt sei D. Dann ist $l(BD) = \beta$. Wenn ich nun um B den Kreis durch D schlage, so schneidet dieser die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt, d.h. wenn S der Schnittpunkt ist, gilt $l(AB)/l(BS) = l(BS)/l(AS)$.

Im Prinzip wirst Du jetzt ein regelmäßiges Fünfeck konstruieren können. Da aber ein regelmäßiges Zehneck ganz besonders einfach mit Zirkel und Lineal zu konstruieren ist, will hier noch angeben, wie dies zu tun ist – und zwar mit Begründung.

Betrachte wieder den Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Die Verbindungsstrecke der Punkte -1 und ζ^2 ist offenbar eine Seite des regelmäßigen Zehnecks im Einheitskreis. Ihre Länge sei c. Sei $s := \beta'/2 - (-1) = \beta'/2 + 1$, d.h. der Abstand des Punktes -1 zu $\mathrm{Re}(\zeta^2)$. Nach Satz 12.13 ist $c^2 = 2s$. Nun ist $2s = 2 + \beta' = (4 - \sqrt{5} - 1)/2 = (3 - \sqrt{5})/2$. Überraschender Weise ist letztere Zahl ein Quadrat im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, nämlich

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

Somit verhält sich die Zehneckseite zum Radius des Umkreises wie der goldene Schnitt und wird deshalb wie folgt konstruiert:

BILD!

In der Algebra beweist man folgenden Satz von Gauß:

Ist p eine Primzahl, so lässt sich das das regelmäßige p-Eck genau dann mit Zirkel und Lineal konstruieren, wenn $p = 2^n + 1$ mit einer ganzen Zahl n ist.

Solche Primzahlen sind dann immer schon von der Gestalt $2^{2^m} + 1$. Sie heißen Fermat'sche Primzahlen, weil Fermat irrtümlich geglaubt hat, alle Zahlen der Form $2^{2^m}+1$ seien Primzahlen.

Ein regelmäßiges n-Eck lässt sich genau dann mit Zirkel und Lineal konstruieren, wenn n von der Gestalt $2^k p_1 \cdots p_r$ mit *verschiedenen* Fermat'schen Primzahlen p_j sind. Für kleinere m, weiß man, welche $2^{2^m} + 1$ prim sind. Insgesamt ist dies unbekannt. Man weiß nicht einmal ob es unendlich viele Fermat'sche Primzahlen gibt.

22 Determinante, Volumen, Vektorprodukt

Wir legen in der Ebene einen Ursprung P fest und identifizieren die Vektoren der Ebene mit ihren Punkten auf die bekannte Weise: Einem Vektor v, der durch $\vec{PA}$ dargestellt sei, wird der Punkt A zugeordnet. Umgekehrt wird einem Punkt A der Vektor $\vec{PA}$ zugeordnet.

22.1 Determinante und das Volumen eines Parallelotops

Seien v_1, v_2 Vektoren, so ist die Menge der Punkte die den Vektoren $\lambda_1 v + \lambda_2 v_2$ mit $\lambda_j, \in [0,1]$ (dem Einheitsintervall) entsprechen, eine Parallelogrammfläche,

Die Größe dieser Parallelogrammfläche sei mit $\mathrm{Vol}(v_1, v_2)$ bezeichnet.

Sei (e_1, e_2) eine Orthonormalbasis des Vektorraumes der Ebene und $v_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2$.

Proposition 22.1 *Unter den o.a. Voraussetzungen gilt*

$$\mathrm{Vol}(v_1, v_2) = |\det(v_1, v_2)| = \left|\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right|$$

Proof: Wir erinnern uns an gewisse Eigenschaften der Determinante:

1. $\det(v_1, v_2) = 0 \iff v_1, v_2$ linear abhängig. Offenbar gilt aber auch $\mathrm{Vol}(v_1, v_2) = 0 \iff v_1, v_2$ lin. abh.

2. $\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab$. Offenbar gilt aber auch $\mathrm{Vol}(ae_1, be_2) = |ab|$.

3. Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn die Matrix speziell elementar umgeformt wird. D.h. $\det(v_1, v_2) = \det(v_1 + \mu v_2, v_2) = \det(v_1, v_2 + \nu v_1)$. Man sieht aber, dass auch $\mathrm{Vol}(v_1, v_2) = \mathrm{Vol}(v_1 + \mu v_2, v_2) = \mathrm{Vol}(v_1, v_2 + \nu v_1)$ gilt. (Eine spezielle elementare Spaltenumformung einer Matrix besteht darin, dass man eine Spalte durch Addition eines Vielfachen einer anderen Spalte verändert.)

Da man jede nichtsinguläre Matrix durch spezielle elementare Spalten-Umformungen auf Diagonalgestalt bringen kann, ist der Satz bewiesen. $\square$

22.2 Im Raum gilt das Analoge:

Seien v_1, v_2, v_3 Vektoren, die man sich mit Anfangspunkt P denkt, so beschreiben die Vektoren der Form $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ mit $\lambda_j \in [0,1]$ einen (geometrischen) Körper, der aus einem Quader durch 'Scherung' entsteht, ein sogenanntes Spat (auch Parallelotop oder Parallelepiped). Sein Volumen sei mit $\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3)$ bezeichnet.

Analog zum 2-dimensionalen Fall gilt:

1. $\det(v_1, v_2, v_3) = 0 \iff v_1, v_2, v_3$ lin. abh. $\iff \mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3) = 0$.

2. $\det(a_{11}e_1, a_{22}e_2, a_{33}e_3)| = |a_{11}a_{22}a_{33}| = \mathrm{Vol}(a_{11}e_1, a_{22}e_2, a_{33}e_3)$ (Volumen eines Quaders).

3. Weder das Volumen noch die Determinante von (v_1, v_2, v_3) ändert sich bei speziellen elementaren Spalten-Umformungen.

Deshalb gilt auch im 3-dimensionalen Fall:

$\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3) = |\det(v_1, v_2, v_3)|$.

Remark 22.3 Im Höherdimensionalen kann man analoge Betrachtungen anstellen.

22.4 Der Betrag der Determinante ist also ein Volumen. Was aber bedeutet das Vorzeichen?

ORIENTIERUNG. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum ($n > 0$). Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen von V und $E := (e_1, \ldots, e_n)$ eine von diesen. $\mathcal{B}$ zerfällt in zwei Klassen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$: Die Klasse $\mathcal{B}_1$ derjenigen Basen B, deren Übergangsmatrix von E eine positive Determinante hat und die Klasse $\mathcal{B}_2$ derjenigen, deren Übergangsmatrix von E eine negative Determinante hat. Zwei Basen B, B' gehören genau dann zur gleichen Klasse, wenn die Übergangsmatrix von B zu B' eine positive Determinante hat.

Man kann auch – bei entsprechender Definition – zeigen, dass man Basen der gleichen Klasse 'stetig ineinander überführen' kann, Basen verschiedener Klassen jedoch nicht.

Definition 22.5 *Unter einer* **Orientierung von** V *versteht man die Auswahl einer der beiden Klassen $\mathcal{B}_1$ oder $\mathcal{B}_2$. In Bezug auf eine gegebene Klasse $\mathcal{B}_i$ kann man dann von der Orientierung einer beliebigen Basis reden: positv oder negativ.*

Remark 22.6 Eine Orientierung wird also durch die Angabe einer Basis gegeben, da diese die Klasse bestimmt, in der sie liegt.

22.7 Ist nun $v_1, \ldots, v_n$ ein System von Vektoren, so beschreibt $\det(v_1, \ldots, v_n)$ nicht nur das Volumen des von $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannten Parallelotops, sondern – im Falle, dass dieses Volumen von 0 verschieden ist – die Orientierung von $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ in Bezug auf die gewählte ON-Basis $e_1, \ldots, e_n$. Beachte dass z.B. $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ und $(v_2, v_1, \ldots, v_n)$ zwar dasselbe Parallelotop aufspannen, aber verschiedene Orientierung haben.

22.2 Vektorprodukt

22.8 Im Raum sei eine Einheitslänge vorgegeben. Im zugehörigen Vektorraum V sei eine Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3 gegeben, die eine Orientierung des Raumes bestimmt. Seien $u, v.$ ferner w Vektoren in V. Bezüglich der angegebenen Basis sei

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Definition 22.9 *Wir definieren das Vektorprodukt von u mit v durch*

$$[u, v] := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} .$$

22.10 Dieses Produkt ist nicht kommutativ: $[u, v] = -[v, u]$. Und wir werden später sehen, dass es auch nicht assoziativ ist. Hingegen ist es bilinear, da die Determinante multilinear, also für $n = 2$ bilinear ist. Ferner ist $[u, v]$ genau dann $\neq 0$, wenn u, v lin. unabh. ist.

Mit dem Ziel der geometrischen Deutung des Vektorprodukts machen wir folgende Rechnung:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle [u, v], w \rangle$$

Entwicklung nach der 3. Spalte.

Setzen wir $w = u$, bzw. $w = v$, so erhalten wir $\langle [u, v], u\rangle = \langle [u, v], v\rangle = 0$, da die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Spalten 0 ist. Das bedeutet: $[u, v]$ steht sowohl auf u als auch auf v senkrecht.

Setzt man $w = [u, v]$ so erhält man: Das von $[u, v], u, v$ aufgespannte Parallelotop hat das Volumen $\langle [u, v], [u, v]\rangle = |[u, v]|^2$. Aus geometrischen Gründen ist dieses Volumen auch gleich begincenter Grundfläche mal Höhe =
Fläche des von u, v aufgespannten Paralleogramms mal Länge von $[u, v]$

Hieraus folgt: $[u, v]$ ist derjenige Vektor, der senkrecht auf u und v steht, dessen Länge gleich der Fläche des von u, v aufgespannten Parallelogramm ist, und – wenn er von 0 verschieden ist – die Eigenschaft hat, dass $[u, v], u, v$ die vorgegebene Orientierung von V liefert.

Remark 22.11 In der Physik ist das Vektorprodukt von großer Wichtigkeit. Ist z.B. u der Geschwindigkeitsvektor eines (einfach) geladenen Teilchens, z.B. eines Elektrons, v der Feldvektor eines Magnetfeldes in dem Punkt, wo das Teilchen sich gerade aufhält, so ist $\pm[u, v]$ (bei angepassten Maßeinheiten) die Kraft (samt Richtung), die das magnetische Feld auf das Teilchen ausübt. Das Vorzeichen richtet sich nach der Orientierung des Raumes und dem Vorzeichen der Ladung.

Remark 22.12 Das Vektorprodukt steht auch in Bezug zu den sogenannten Quarternionen. Diese bilden einen 4-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum, auf dem ein Produkt definiert ist, das diesen zu einem Schiefkörper macht. Ein Schiefkörper ist fast ein Körper, d.h. er ist ein (nicht notwendig kommutativer) Ring, in dem jedes Element ein (beidseitig) multiplikatives Inverses hat.

23 Kegelschnitte

23.1 Ellipse. Mittels der Methode der Dandelinschen Kugeln sieht man, dass eine Ellipse die Menge der Punkte in der Ebene ist deren Abstandssumme von zwei gegebenen Punkten, den sogenannten **Brenpunkten** eine Konstante ist.

Die Ebene sei mit einem orthonormalen Koordinatensystem versehen. Wir betrachten die beiden Punkte $(-e, 0)$, $(e, 0)$, wo $e > 0$ sei. Diese Punkte heißen auch die **Brennpunkte**. Die Abstandssumme jedes Ellipsenpunktes zu den beiden Brennpunkten sei $2a$. Da eine Ellipse nicht leer ist, muss $a \geq e$ sein. Im Falle $a = e$ ergibt sich als Menge die Strecke $\overline{(-e, 0)(e, 0)}$; das ist auch keine Ellipse. Also ist bei einer Ellipse $a > e$.

Die Punkte der Ellipse auf der x-Achse sind $(-a, 0)$ und $(a, 0)$. Es gibt genau zwei Ellipsenpunkte auf der y-Achse. Diese sind in Bezug auf die x-Achse symmetrisch, etwa $(-b, 0), (b, 0)$ mit $b > 0$. Offenbar gilt $b^2 + e^2 = a^2$.

Die Ellipsenpunkte sind diejenigen, deren Koordinaten (x, y) die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a, \text{ d.h.}$$

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = -\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + 2a$$

Es ist $0 \leq e < a$. Die Ellipsenpunkte (x, y) erfüllen zudem die Bedingungen $|x| \leq a, |y| \leq b$. Unter diesen Nebenbedingungen sind beide Seiten letzterer Gleichung ≥ 0 sind. Also ist sie unter diesen Bedingungen äquivalent zu der, wo beide Seiten quadriert sind:

$$(x-e)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+e)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

Dies ist äquivalent zu

$$4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 4a^2 + (x+e)^2 - (x-e)^2 \text{ d.h.}$$

$$a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = a^2 + ex$$

Unter obigen Nebenbedingungen sind wieder beide Seiten dieser Gleichung positiv. Also ist sie unter diesen Bedingungen äquivalent zu

$$a^2(x^2 + 2ex + e^2 + y^2) = a^4 + e^2x^2 + 2a^2ex \text{ d.h.}$$

$$a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 + e^2x^2 \text{ d.h.}$$

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

Indem man schließlich $a^2 - e^2$ durch b^2 ersetzt und durch a^2b^2 dividiert, erhält man schließlich die bekannte Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (*)$$

Ein Punkt (x, y) liegt somit genau dann auf der Ellipse, wenn er die Gleichung $(*)$ und die Bedingungen $|x|, |y| \leq a$ erfüllt. Alle reellen Zahlenpaare (x, y), die $(*)$ (mit $0 < b < a$) erfüllen, erfüllen aber auch die Ungleichungen $|x|, |y| < a$. Also beschreibt bereits die Gleichung $(*)$ die Ellipse.

Wenn man die Gleichung $(*)$in der Form

$$x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2 = a^2$$

schreibt, sieht man, dass die Ellipse aus einem Kreis mit Radius a durch Stauchung mit dem Faktor b/a in y-Richtung hervorgeht.

23.2 Hyperbel. Mittels der Methode der Dandelinschen Kugeln sieht man, dass eine Hyperbel die Menge der Punkte in der Ebene ist, deren Abstandsdifferenz von zwei gegebenen Punkten, den **Brennpunkten**, dem Betrage nach eine Konstante ist.

Die Ebene sei mit einem orthonormalen Koordinatensystem versehen, wobei $(-e,0)$, $(e,0)$ mit $e>0$ die beiden Brennpunkte seien. Die Abstandsdifferenz sei betragsmäßig gleich $2a$. Da eine Hyperbel nicht leer ist, muss $a \le e$ sein. Im Falle $a=e$ ergibt sich als Menge die Vereinigung zweier Strahlen $\{(x,0) \mid |x| \ge e\}$, auch keine Hyperbel. Also ist bei einer Hyperbel $a<e$.

Die Punkte der Hyperbel auf der x-Achse sind $(-a,0)$ und $(a,0)$. Wir setzen $b := \sqrt{e^2-a^2}$.

Die Punkte des 'linken' Hyperbelastes ($x<0$) sind diejenigen, deren Koordinaten (x,y) die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{(x-e)^2+y^2} - \sqrt{(x+e)^2+y^2} = 2a, \text{ d.h.}$$

$$\sqrt{(x-e)^2+y^2} = \sqrt{(x+e)^2+y^2} + 2a$$

(Wenn man in dieser Gleichung e mit $-e$ vertauscht, beschreibt sie die Punkte des rechten Hyperbelastes.) da beide Seiten dieser Gleichung ≥ 0 sind, ist sie äquivalent zu der, wo beide Seiten quadriert sind:

$$(x-e)^2+y^2 = 4a^2 + (x+e)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+e)^2+y^2}$$

Diese ist äquivalent zu

$$4a\sqrt{(x+e)^2+y^2} = (x-e)^2 - (x+e)^2 - 4a^2 \text{ d.h.}$$

$$a\sqrt{(x+e)^2+y^2} = -a^2 - ex \qquad (**)$$

Wieder kann man neben o.a. Gleichung noch Nebenbedingungen angeben: Für die Punkte (x,y) auf dem linken Hyperbelast gilt $x \le -a$, also die rechte Seite nichtnegativ. Die linke Seite ist ohnehin positiv. Somit ist die letzte Gleichung für Punkte auf dem linken Hyperbelast äquivalent zur folgenden.

$$a^2(x^2+2ex+e^2+y^2) = a^4 + e^2x^2 + 2a^2ex \text{ d.h.}$$

$$a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 + e^2x^2 \text{ d.h.}$$

$$(e^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(e^2-a^2)$$

Indem man schließlich e^2-a^2 durch b^2 ersetzt und durch a^2b^2 dividiert, erhält man schließlich die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zusammen mit der Nebenbedingung $x \le -a$ für den linken Hyperbelast. Für den rechten Hyperbelast muss man e überall durch $-e$ ersetzen und hat die Nebenbedingung $x \ge a$. Die rechte Seite von $(**)$ ist dann $-a^2+ex$. Dies ist positiv für $x \ge a$. Also ergibt sich für den rechten Hyperbelast dieselbe Gleichung, da $(-e)^2 = e^2$ ist, aber mit der Nebenbedingung $x \ge a$. Aus der Gleichung folgt $x^2 \ge a^2$, d.h. $x \le -a$ oder $\ge a$. Somit beschreibt die Gleichung die Vereinigung beider Äste der Hyperbel.

23.3 Parabel. Mit der Methode der Dandelinschen Kugeln sieht man, dass eine Parabel die Menge der Punkte (x,y) die von einer Geraden (**Leitgeraden**) und einem Punkt (**Brennpunkt**) denselben Abstand haben. Sei $d>0$ und $x=-d$ die Leitgerade und $(d,0)$ der Brennpunkt.

Die Parabel mit dieser Leitgeraden und diesem Brennpunkt wird dann durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\sqrt{(x-d)^2+y^2} = x+d$$

Für Punkt auf der Parabel gilt die Zusatzbedingung $x \geq 0$. Setzen wir diese voraus, so sind beide Seiten dieser Gleichung positiv, und deshalb ist sie äquivalent zu

$$(x-d)^2+y^2 = (x+d)^2 \text{ d.h. } x^2-2dx+d^2+y^2 = x^2+2dx+d^2 \text{ d.h.}$$

$$y^2 = 4dx \ .$$

Alle reellen (x, y), die dieser Gleichung genügen, erfüllen die Zusatzbedingung. Also kann man sie weglassen.

24 Quaternionen

24.1 Sei

$$\mathbb{H} := \{\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})\}$$

Man überlegt sich leicht:

a) $\mathbb{H}$ ist ein *nicht kommutativer* Unterring von $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Für $\alpha \in \mathbb{H}$ ist $\det(\alpha) \geq 0$.

c) Gilt $\alpha \in \mathbb{H} - \{0\}$, so ist $\det(\alpha) > 0$ und α in $\mathbb{H}$ invertierbar.

$\mathbb{H}$ ist ein sogenannter **Schiefkörper**, da in ihm alle Körperaxiome bis auf die Kommutativität der Multiplikation erfüllt sind. Er wird der **Quaternionenschiefkörper** genannt. Ein Element von $\mathbb{H}$ heißt eine **Quaternion**.

24.2 $\mathbb{H}$ ist auf kanonische Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Basis besteht aus folgenden 4 Elementen:

$$E := 1_2\,, \quad I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Man rechnet: $I^2 = J^2 = K^2 = -E,\ IJ = -JI = K,\ JK = -KJ = I,\ KI = -IK = J$. Man hat einen injektiven Ringhomomorfismus $\mathbb{R} \to \mathbb{H}$ vermöge $a \mapsto aE$. Wir fassen auf diese Weise $\mathbb{R}$ als Teil(schief)körper von $\mathbb{H}$ auf. Alle Elemente von $\mathbb{R}$ sind mit jeder Quaternion vertauschbar. Umgekehrt gilt auch, dass jede Quaternion, die mit allen Quaternionen vertauschbar ist, zu $\mathbb{R}$ gehört.

Jede Quaternion lässt sich dann so schreiben:

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

wobei wir noch i, j, k anstelle von I, J, K geschrieben haben. Das war oben noch schlecht möglich. Wir definieren Real- und Imaginärteil von q durch

$$\mathrm{Re}(q) := a_0 \in \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Im}(q) := (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

Ferner das Konjugierte und den Betrag:

$$\overline{q} := a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k\,, \quad |q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{\overline{q}q} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Natürlich ist $\overline{q + r} = \overline{q} + \overline{r}$. Für das Konjugierte eines Produktes erhält man (**Achtung!**) $\overline{qr} = \overline{r} \cdot \overline{q}$. Dies sieht man auch, wenn man bemerkt, dass das Konjugierte von q, wenn man q – wie oben – als Matrix auffasst, die konjugierte transponierte Matrix bedeutet.

Es folgt $|qr| = \sqrt{qr\overline{qr}} = \sqrt{qr\overline{r}\,\overline{q}} = \sqrt{q\overline{q}r\overline{r}} = |q||r|$, da $r\overline{r} \in \mathbb{R}$ und deshalb mit jeder Quaternion vertauschbar ist. (Wenn man q – wie oben – als Matrix Q auffasst, gilt $|q|^2 = \det(Q)$.

Für das multiplikativ Inverse von q gilt offenbar $q^{-1} = \overline{q}/|q|^2$.

24.3 Seien $q = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ und $r = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ zwei „rein imaginäre“ Quaternionen, so errechnet man als ihr Produkt:

$$qr = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

Also ist

$$\mathrm{Re}(qr) = -\langle \mathrm{Im}(q)\,, \mathrm{Im}(r)\rangle \ \text{ und } \mathrm{Im}(qr) = [\mathrm{Im}(q)\,, \mathrm{Im}(r)]$$

wo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalar- und $[\cdot,\cdot]$ das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. (Man erinnere sich, dass $\mathrm{Im}(q) = (a_1, a_2, a_3)$ ist.)

24.4 Wir suchen nach den Lösungen der Gleichung $X^2 = -1$ in $\mathbb{H}$. Schreibe $q = a_0 + q'$ mit $a_0 = \mathrm{Re}(q)$. Dann ist $q^2 = a_0^2 - |q'|^2 + 2a_0q'$ (nach 2.3 und wegen $a_0q' = q'a_0$). Ist nun $q^2 = -1$, so folgt $a_0^2 - |q'|^2 = -1$ und $a_0q' = 0$. Also muss $q' \neq 0$ sein, da $a_0^2 \geq 0$. Somit ist aber $a_0 = 0$ und mithin $|q'|^2 = 1$. Da die Bedingungen $a_0 = 0, |q'| = 1$ auch hinreichend sind, gilt:

Proposition 24.5 *Die Nullstellen von $X^2 + 1$ in $\mathbb{H}$ sind die rein imaginären q vom Betrag 1. Diese entsprechen den Punkten auf der Einheitssfäre im $\mathbb{R}^3$ (der rein imaginären Quaternionen).*

24.6 Zu jeder rein imaginären Quaternion q vom Betrag 1 gibt es einen injektiven Schiefkörper-Homomorfismus

$$\mathbb{C} \to \mathbb{H}, \quad a + bi \mapsto a + bq, \ (a, b \in \mathbb{R})$$

(Wenn man von einer solchen Einbettung verlangt, dass sie $\mathbb{R}$-linear oder zumindest stetig sei, so sind die angegebenen Homomorfismen auch die einzigen.)

Das Bild der o.a. Einbettung ist der von 1 und q erzeugte 2-dimensionale $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{H}$. Dieser sei mit C_q bezeichnet. $\mathbb{H}$ ist die Vereinigung aller dieser zu $\mathbb{C}$ isomorfen Teilkörper.

Jede nicht reelle Quaternion liegt in genau einem solche Teilraum. Ist nämlich $q = a_0 + q'$ mit $a_0 = \mathrm{Re}(q)$, so liegt q in dem von 1 und $|q'|^{-1}q'$ aufgespannten $\mathbb{R}$-Teilrvektorraum. Die Potenzen von q liegen dann in demselben Teilraum, da dieser ein Teilkörper ist.

Wir suchen noch nach den Lösungen der Gleichung $X^2 = p$ mit einem beliebigen $p \in \mathbb{H}$. Ist $p = 0$, hat man nur eine Lösung, nämlich 0.

Ist p eine reelle positive Zahl, so gibt es in jedem der genannten zu $\mathbb{C}$ isomorfen Teilkörper C_q – d.h. aber in ganz $\mathbb{H}$ – nur die beiden Lösungen $\pm\sqrt{p} \in \mathbb{R}$.

Ist p eine nicht reelle Quaternion, so liegt p in genau einem der C_q und die Gleichung $X^2 = p$ hat nur in diesem Lösungen, und zwar genau zwei.

Ist aber $p = -r$ reell und negativ, so hat die Gleichung in jedem der komplexen Teilkörper C_q zwei Lösungen, nämlich $\pm\sqrt{r}\,q$. Also hat $X^2 = p$ für negative reelle p in $\mathbb{H}$ unendlich viele Lösungen, ein gerechter Ausgleich dafür, dass sie in $\mathbb{R}$ überhaupt keine Lösung hat.

24.7 Ebenso sieht man leicht Folgendes: Die Gleichung $X^n - p$ hat für $n > 2$ unendlich viele Lösungen, wenn p reell $\neq 0$ ist, und genau n Lösungen, wenn p nicht reell ist.

24.8 Die Elemente

$$\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \in \mathbb{H}$$

bilden eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{H}$, die sogenannte Quaternionengruppe, die folgende Besonderheit hat: Sie ist nicht kommutativ, aber ihre sämtlichen Untergruppen sind Normalteiler.

24.9 Man kann die Quaternionen benutzen, um eine Identität für das Vektorprodukt zu beweisen.

Sei A ein *nicht notwendig kommutativer* (aber assoziativer) Ring. Für $a, b \in A$ definieren wir $[a, b] := ab - ba$. Dann gilt

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] =$$

$$(ab - ba)c + c(ba - ab) + (bc - cb)a + a(cb - bc) + (ca - ac)b + b(ac - ca) = 0$$

Ist nun $2 = 1+1$ in A invertierbar und definieren wir – leicht modifiziert – $[a,b] := 2^{-1}(ab-ba)$, so gilt natürlich die gleiche Identität.

Wir wenden dies auf rein imaginäre Quaternionen an, die ja in eindeutiger Korrespondenz zu den Vektoren im $\mathbb{R}^3$ stehen. Für solche q, r gilt: qr und rq haben denselben Realteil, aber additiv inverse Imaginärteile, nämlich die Vektorprodukte $[\mathrm{Im}(q), \mathrm{Im}(r)]$, bzw. $[\mathrm{Im}(r), \mathrm{Im}(q)] = -[\mathrm{Im}(q), \mathrm{Im}(r)]$. Es gilt also $\mathrm{Re}(2^{-1}(qr-rq)) = 0$ und $\mathrm{Im}(2^{-1}(qr-rq)) = [\mathrm{Im}(q), \mathrm{Im}(r)]$. Somit erhält man für das Vektorprodukt $[\cdot,\cdot]$ und Vektoren u, v, w im $\mathbb{R}^3$ die sogenannte Jacobi-Identität:

$$[[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v] = 0$$

25 Fragen zur Vorbereitung auf die mündliche Prüfung

1. Wie kommen die Jahreszeiten, die Mondphasen, sowie Sonnen- und Mondfinsternisse zustande?

2. Was ist die Idee der Dedekindschen Schnitte?

3. Welche Kongruenzsätze gibt es? In welchem Fall muss eine Zusatzbedingung erfüllt sein?

4. Welche Winkelsumme hat ein überschneidungsfreies n-Eck?

5. Welche merkwürdigen Punkte des Dreiecks kennen Sie?

6. Welches Paar von Dreiecken wird in den Beweisen für 1. den Satz über den Schnittpunkt der Höhen, 2. den Satz über die Eulergerade, 3. den Satz über den Feuerbachkreis betrachtet?

7. Welche zentralen Punkte liegen immer auf der Eulergeraden eines nicht gleichseitigen Dreiecks?

8. Welche 9 Punkte liegen auf dem Feuerbachkreis?

9. Wo liegt der Mittelpunkt des Feuerbachkreises? (Er ist der Mittelpunkt einer gewissen Strecke.)

10. Wie lauten Sinus- und Cosinussatz für ein Dreieck?

11. Gegeben seien drei geeignete Grund-Größen (Winkel, Seitenlängen) eines Dreiecks. Wie kann man mit Hilfe des Sinus- oder Cosinus-Satzes die anderen bestimmen?

12. Welche Werte haben Sinus und Cosinus folgender Winkel: $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$?

13. Sei x einer der o.a. Winkel. Können Sie auch $\sin(x+k\pi/2)$ und $\cos(x+k\pi/2)$ für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ bestimmen?

14. Wie lauten die Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus?

15. Wie sind $\arcsin, \arccos, \arctan$ definiert?

16. Bestimmen Sie den Arcus-Sinus, und den Arcus-Cosinus folgender Zahlen, sowohl im Bogenmaß als auch im Gradmaß: $0, \pm(1/2), \pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{3}/2$.

17. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen dem Cosinussatz, dem Satz des Pythagoras und dem Skalarprodukt?

18. Wie groß sind das Volumen und die Oberfläche einer Kugel vom Radius r?

19. Sei $z \in \mathbb{C}^*$ als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene gegeben. Konstruieren Sie geometrisch den Punkt z^{-1}.

20. Bestimmen Sie die komplexen Nullstellen des Polynoms $z^{10} - i$ mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen von Winkeln im Gradmaß.

    Zu allen diesen Dingen sollten Sie auch die grundlegenden Beweisideen wissen!