Projektive Varietäten

Friedrich Ischebeck

2. November 2005

1 Topologien

Definitionen 1.1 *a) Eine* **Topologie** *auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, die abgeschlossen ist gegenüber der Bildung endlicher Durchschnitte und beliebiger Vereinigungen. Insbesondere gehören $\emptyset$ als leere Vereinigung und X als leerer Durchschnitt von Teilmengen von X zu $\mathcal{O}$.*

b) Eine Menge X, versehen mit einer Toplogie $\mathcal{O}$, heißt ein **topologischer Raum**. *Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen die* **offenen** *Teilmengen von X (genauer von $(X, \mathcal{O})$). Die Komplemente in X der offenen Teilmengen heißen die* **abgeschlossenen** *Teilmengen von X.*

c) Eine Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume heißt stetig, wenn für jede offene Teilmenge V von Y die Urbildmenge $f^{-1}(V)$ offen in X ist. (Damit ist äquivalent, dass das Urbild einer jeden abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist.)

d) Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch**, *wenn zu je zwei verschiedenen $x, y \in X$ disjunkte offene Mengen U, V existieren mit $x \in U$, $y \in V$. Ein hausdorffscher topologischer Raum heißt kurz ein* **Hausdorffraum**.

e) Ist Y eine Teilmenge eines topologischen Raumes X, so definiert man die **induzierte** *Topologie auf Y dadurch, dass man als offene Mengen von Y die $Y \cap U$ definiert, wo U offen in X ist. (Die offenen Teilmengen von Y sind nicht notwendig offen in X!) Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X, versehen mit der induzierten Topologie heißt ein Teilraum von X.*

1.2 a) Welche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ man in der Analysis als offen bezeichnet, setze ich als bekannt voraus. Mit dieser sogenannten **euklidischen** Topologie ist der $\mathbb{R}^n$ ein Hausdorffraum.

b) Jeder Teilraum eines Hausdorffraumes ist wieder ein Hausdorffraum. Dies trifft insbesondere für die Teilräume des euklidischen $\mathbb{R}^n$ zu.

c) Die allermeisten Teilmengen des (euklidischen) $\mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 1$) sind weder offen noch abgeschlossen! Es ist also nicht so, dass eine nicht abgeschlossene Menge immer offen wäre. (Man darf sich nicht durch den außermathematischen Sprachgebrauch irritieren lassen.) Zum Beispiel ist $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen. Die Teilmengen und X eines jeden topologischen Raumes sind sowohl offen als auch abgeschlossen. Ist $X = \mathbb{R}^n$, so sind dies die einzigen Teilmengen, die offen und abgeschlossen sind. Ist hingegen X eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (versehen mit der induzierten Topologie), so ist jede Teilmenge von X sowohl offen, wie abgeschlossen. Dasselbe gilt für $X = \mathbb{Z}^n$.

d) Jede endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen eines topologischen Raumes ist abgeschlossen, jeder Durchschnitt abgeschlossener Teilmengen ebenfalls. *Man kann topologische Räume auch „mittels abgeschlossener Mengen“ definieren.* Insbesondere kann man die auf einer Teilmenge Y eines topologischen

Raumes X induzierte Topologie auch dadurch definieren, dass man als abgeschlossene Teilmengen von Y die $A \cup Y$ definiert, wo A abgeschlossen in X ist.

1.3 a) Ein von den euklidischen Topologien sehr verschiedener Typ von Topologien sind die **Zariski**-Topologien. Eine Teilmenge A des $\mathbb{C}^n$ oder des $\mathbb{R}^n$ oder des K^n mit einem beliebigen Körper K heißt abgeschlossen (oder Zariski-abgeschlossen, wenn man betonen will, dass man nicht von der euklidischen Geometrie spricht), wenn es ein System von Polynomen in n Unbestimmten gibt, deren gemeinsame Nullstellen A ausmachen.

Dass ein beliebiger Durchschnitt Zariski-abgeschlossener Mengen wieder Zariski-abgeschlossen ist, ist klar.

Ist A durch das Polynomsystem $(f_i)_{i\in I}$ und B durch $(g_j)_{j\in J}$ definiert, so ist $A \cup B$ durch $(f_i g_j)_{(i,j)\in I\times J}$ definiert.

(Anstelle eines Polynomsystems kann man auch das von diesem erzeugte Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$ betrachten. Dieses hat dieselbe Nullstellenmenge. $A \cup B$ wird dann sowohl durch das Produkt als auch durch den Durchschnitt der zugehörigen Ideale definiert. Aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass man sich auf endliche Polynomsysteme beschränken kann.)

Man muss sich darüber im Klaren sein, dass die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{C}^n$, wenn sie nicht der ganze $\mathbb{C}^n$ sind, immer ziemlich dünn (von kleinerer Dimension als n) sind. Eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$, die eine euklidische Umgebung eines Punktes umfasst, ist schon ganz $\mathbb{C}^n$. Jede Zariski-abgeschlossene Menge ist euklidisch abgeschlossen, aber nicht umgekehrt! (Die euklidische Topologie auf dem $\mathbb{C}^n$ ist feiner als die Zariski-Topologie.) Die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind außer $\mathbb{C}$ genau die endlichen Teilmengen von $\mathbb{C}$. Für $n \geq 1$ ist die Zariskitopologie auf $\mathbb{C}^n$ alles andere als hausdorffsch.

Für $n > 1$ ist die Zariski-Topolgie auf dem K^n für einen unendlichen Körper K nicht die Produkttopologie, anders als bei den euklidischen Topologien auf den $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$.

b) Sei jetzt der Körper K algebraisch abgeschlossen. Aus dem Hilbertschen Nullstellensatz folgt, dass die maximalen Ideale von $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ von der Form $(X_1 - a_1)R + \cdots + (X_n - a_n)R$ sind und bijektiv den Punkten $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ entsprechen. Ferner gilt für $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ die Äquivalenz:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \iff f \in (X_1 - a_1)R + \cdots + (X_n - a_n)R \; .$$

Auf der Menge $\mathrm{Spmax}(R)$ der maximalen Ideale von R definiert man nun folgende Topologie: die Mengen $V_{max}(I) := \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spmax}(R) \mid I \subset \mathfrak{m}\}$ werden als die abgeschlossenen Mengen definiert.

Aus obigem erhält man sofort:

Die Abbildung

$$\varphi : K^n \to \mathrm{Spmax}(R),\ (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (X_1 - a_1)R + \cdots + (X_n - a_n)R$$

ist bijektiv, stetig und ihre Umkehrung ist auch stetig. D.h. die abgeschlossenen Mengen von K^n sind genau die $\varphi^{-1}(A)$, wo A abgeschlossen in $\mathrm{Spmax}(R)$ *ist.*

c) In der obigen Situation ($R = K[X_1, \ldots, X_n]$) 'schadet' es nichts, an Stelle von $V_{max}(I)$ die Menge $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ zu betrachten. Denn wegen des Hilbertschen Nullstellensatzes ist $V(I)$ durch $V_{max}(I)$ schon eindeutig bestimmt.

d) Es ist eine fruchtbare Verallgemeinerung, das Spektrum beliebiger kommutativer Ringe A mit der Zariski-Topologie zu versehen: Die abgeschlossenen Mengen sind die $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ mit einem Ideal (oder einer beliebigen Teilmenge) I von A.

e) Sei $f : A \to B$ ein Homomorfismus. Die Abbildung $\mathrm{Spec}(f) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A),\ \mathfrak{p} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{p})$ ist stetig, wie man leicht sieht. Ebenso sieht man leicht, dass Spec auf diese Weise ein Funktor ist.

1.4 Die Zuordnung $I \mapsto V(I)$ ist eine surjektive Abbildung von der Menge der Ideale eines kommutativen Ringes A in die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(A)$. Sie ist eine bijektive und Ordnungsumkehrende Abbildung von der Menge der Radikalideale von A auf die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(A)$.

Ein topologischer Raum X heißt **noethersch**, wenn folgende äquivalenten Eigenschaften gelten:

(i) Jede absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen wird stationär.

(ii) Jede aufsteigende Folge von offenen Mengen wird stationär.

(iii) Jede nichtleere Menge von abgeschlossenen Mengen besitzt ein minimales Element.

(iv) Jede nichtleere Menge von offenen Mengen besitzt ein maximales Element.

Ist A ein noetherscher Ring, so ist $\mathrm{Spec}(A)$ ein noetherscher topologischer Raum. Die Umkehrung ist falsch. Es gibt z.B. nichtnoethersche lokale Ringe, in denen (0) und das maximale Ideal die einzigen Primideale sind. Es gibt sogar nichtnoethersche Ringe mit nur einem einzigen Primideal, die dann natürlicht nicht integer sein können. Z.B. sei K ein Körper und V ein unendlich-dimensionaler K-Vektorraum. Auf der additiven Gruppe $K \oplus V$ sei eine Multiplikation definiert durch $(\lambda, v)(\mu, w) := (\lambda\mu, \lambda w + \mu v)$.

$\mathrm{Spec}(A)$ ist genau dann noethersch, wenn die Menge der Radikalideale der „aufsteigenden Kettenbedingung" genügt, genau dann, wenn jedes Radikalideal endlich erzeugt ist. (Beweis?)

Für $n \geq 1$ ist der $\mathbb{R}^n$ mit seiner euklidischen Topologie nicht noethersch.

Allgemeiner gilt, dass jeder noethersche Hausdorffraum endlich ist. (Zunächst zeigt man, dass ein solcher Raum diskret ist, d.h. dass jede Teilmenge offen ist.

Definition 1.5 *Ein topologischer Raum X heißt irreduzibel, wenn aus $X = A \cup B$ mit abgeschlossenen A, B folgt, dass $A \subset B$ oder $B \subset A$ ist.*

1.6 Äquivalente Aussagen sind:

(i) Der Durchschnitt je zweier nichtleerer offener Mengen ist nicht leer.

(ii) Jede nichtleere offene Teilmenge von X ist dicht. ($Y \subset X$ heißt dicht, wenn $U \cap Y \neq \emptyset$ für jede nichtleere offene Teilmenge U von X gilt.

1.7 a) Man kann zeigen, dass ein noetherscher topologischer Raum X eine Vereinigung endlich vieler abgeschlossener irreduzibler Teilräume ist. Wenn keine Inklusionen zwischen diesen irreduziblen Teilräumen besteht, ist diese Zerlegung eindeutig. Man nennt diese irreduziblen Mengen die irreduziblen Komponenten von X.

b) Ist R ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, so ist $V(\mathfrak{a})$ genau dann irreduzibel, wenn $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal ist.

c) Es folgt der bekannte Satz, dass in einem noetherschen Ring jedes Radikalideal Durchschnitt endlich vieler Primideale ist.

2 Kategorien und Funktoren

2.1 Wir beginnen mit je einem Beispiel für Kategorien und Funktoren:

The class of all R-modules over a fixed ring R together with the sets $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ for all pairs of R-modules M,N and the compositions

$$\mathrm{Hom}_R(M,N)\times\mathrm{Hom}_R(L,M)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(L,N),\qquad (g,f)\mapsto g\circ f$$

make up a *category.*

Let $R\to S$ be a ring homomorphism. The map which assigns to every R-module M the S-module $S\otimes_R M$ and to every R-linear map $f:M\to N$ the S-linear map $\mathrm{id}_S\otimes_R f : S\otimes_R M\to S\otimes_R N$ is a *functor.*

Definitionen 2.2 *a) A* **category C** *consists of*

(i) a class of **objects** *(sometimes denoted by* $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ *),*

(ii) for every pair M,N *of objects a set of* **morphisms** $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M,N)$ *(sometimes one writes* $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(M,N)$ *or* $\mathbf{C}(M,N)$ *for this set),*
– perhaps one should require $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M,N)\cap\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M',N')=\emptyset$ *if* $(M,N)\neq(M',N')$ *–*

(iii) a specified element $\mathrm{id}_M\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M,M)$ *for every object* M*,*

(iv) for every triple L,M,N *of objects a map*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M,N)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L,M)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L,N)\quad (g,f)\mapsto g\circ f,$$

such that

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f,\ \textit{and}\ \ \mathrm{id}_N\circ f=f,\quad f\circ\mathrm{id}_M=f,$$

whenever the left hand sides are defined.

b) An **isomorphism** *in a category is a morphism* $f\in\mathrm{Hom}(M,N)$ *for which there is a morphism* $g\in\mathrm{Hom}(N,M)$ *with* $g\circ f=\mathrm{id}_M$ *and* $f\circ g=\mathrm{id}_N$*. Objects* M,N *are called isomorphic if there exists an isomorphism in* $\mathrm{Hom}(M,N)$*. We write* $M\cong N$ *in this case. Clearly the relation '*$\cong$*' is an equivalence relation in the class of objects.*

Beispiele 2.3 a) Sets and maps. Note that Lord Russel's famous antinomy tells us that we cannot speak about the set of all sets. But to speak of the *class* of all sets does not lead to a contradiction. The inconsistency in the definition of the barber of the village, to be the man who shaves every man who doesn't shave himself, totally disappears, if the barber is a woman.
b) Topological spaces and continuous maps.
c) Rings (resp. groups, resp. R-modules) and ring (resp. group, resp. R-module)

homomorphisms.
And so on.
e) If G is a group (or more generally a monoid) one can form a category with exactly one object, say X, and $\mathrm{Hom}(X, X) = G$, '$\circ$' being the product in G.

Definition 2.4 *Let* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *be categories. A functor* $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *is a map which associates to every object* M *in* $\mathbf{C}$ *an object* $F(M)$ *in* $\mathbf{D}$ *and to every morphism* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ *in* $\mathbf{C}$ *a morphism* $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(M), F(N))$ *in* $\mathbf{D}$*, such that*

$$F(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{F(M)} \quad \text{and} \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \ \text{ if } g \circ f \text{ is defined.}$$

Note 2.5 One often writes $f : M \to N$ for $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$. The meaning of a commutative diagram in a category then is clear. A functor transforms isomorphisms into isomorphisms and commutative diagrams into commutative diagrams.

Beispiel 2.6 Let A be a ring and E an A-module. Then the assignments $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(E, M)$, $f \mapsto f_*$, (resp. $M \mapsto M \otimes_A E, f \mapsto f \otimes \mathrm{id}_E$) make up a functor from the category of A-modules to that of abelian groups. (If A is commutative, these are also functors from the category of A-modules to itself.)

Definition 2.7 *Seien* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *Funktoren. Ein* **natürlicher Morfismus** $f : F \to G$ *ist gegeben durch je einen Morfismus* $f_M : F(M) \to G(M)$ *für jedes Objekt* M *von* $\mathbf{C}$*, derart, dass für jeden Morphismus* $\alpha : M \to N$ *in* $\mathbf{C}$ *das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{f_M} & G(M) \\ F(\alpha) \downarrow & & \downarrow G(\alpha) \\ F(N) & \xrightarrow{f_N} & G(N) \end{array}$$

kommutativ ist.

Beispiel 2.8 Der kanonische Isomorfismus $M \to \mathrm{Hom}_A(A, M)$ (für A-Mouln M) ist natürlich.

-

Definitionen 2.9 *Let* $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *be a functor.*

a) F *is called* **faithful** *if* F *maps* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ *injectively to* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(M), F(N))$ *for every pair* M, N *of objects in* $\mathbf{C}$.

b) F *is called* **full** *if* F *maps* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ *surjectively to* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(M), F(N))$ *for every pair* M, N *of objects in* $\mathbf{C}$.

c) F *is called an* **equivalence** *if it is full and faithful and for every object* P *in* $\mathbf{D}$ *there is an object* M *in* $\mathbf{C}$ *with* $P \cong F(M)$.

Bemerkung 2.10 If F is full and faithful and M, N are objects in $\mathbf{C}$, then $F(M) \cong F(N)$ implies $M \cong N$. So a full and faithful functor gives an injective map of the class of isomorphism classes of objects in $\mathbf{C}$ into that in $\mathbf{D}$.

An equivalence gives a bijective map of the class of isomorphism classes of objects in $\mathbf{C}$ to that in $\mathbf{D}$. Further, using the Axiom of Choice for classes, to an equivalence $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ one can construct a functor $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ such that $G(F(M)) \cong M$ and $F(G(P)) \cong P$ for every object M in $\mathbf{C}$ and P in $\mathbf{D}$.

Moreover, these isomorphisms can be chosen as natural isomorphisms.

Bemerkung 2.11 A functor as defined above is often called **covariant**, since it preserves the "direction of arrows". A **contravariant functor** reverses it. This means it gives maps $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(N), F(M))$. Clearly one must require $F(g \circ f) = F(f) \circ F(G)$.

An example is the following: Fix an R-module E. Then one gets a contravariant functor F from the category of R-modules to that of abelian groups by $F(M) := \mathrm{Hom}_R(M, E)$ and $F(f) := f^*$, where f^* is defined as in Chapter 1 Section 4.

If $\mathbf{C}$ is a category one defines the **opposite** category $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ as follows: $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ has the same objects as $\mathbf{C}$ and $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(M, N) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(N, M)$. A contravariant functor $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ is the same as a covariant functor $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{D}$ or $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}^{\mathrm{op}}$. So in abstract category theory one may restrict oneself to covariant functors, and call them simply 'functors'.

Satz 2.12 *(Yoneda-Lemma) Sei* $\mathbf{C}$ *eine Kategorie und* $M \in Ob(\mathbf{C})$. *Dann ist* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, ?)$ *ein Funktor von* $\mathbf{C}$ *in die Kategorie der Mengen. Jede natürliche Abbildung* $f : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, ?) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M', ?)$ *wird durch einen Morfismus* $\varphi : M' \to M$ *induziert. D.h.* $f = \varphi^* := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\varphi, ?)$.

Beweis: Angewendet auf M liefert f eine Abbildung $f_M : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M', M)$. Sei $\varphi := f_M(\mathrm{id}_M) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M', M)$.

Sei $\alpha : M \to N$ ein Morfismus in $\mathbf{C}$. Die durch α induzierte Abbildung $\alpha_* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ hat die Eigenschaft $\alpha^*(\mathrm{id}_M) = \alpha$. Entsprechend gilt $\alpha^*(\varphi) = \alpha \circ \varphi$ für $\alpha^* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M', M)$

Wegen der Natürlichkeit von f induzieren α und f ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(M, M) & \xrightarrow{\alpha^*} & Hom(M, N) \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathrm{Hom}(M', M) & \xrightarrow{\alpha^*} & Hom(M', N) \end{array}$$

Dann gilt $f(\alpha) = f \circ \alpha * (\mathrm{id}_M) = \alpha^* \circ f(\mathrm{id}_M) = \alpha^*(\varphi) = \alpha \circ \varphi = \varphi^*(\alpha)$. $\square$

3 Nullstellen von Polynomsystemen

3.1 Allgemeine Situation

Die Algebraische Geometrie beschäftigt sich mit den Lösungsmengen algebraischer Gleichungssysteme in kommutativen Ringen.

3.1 Sei R ein kommutativer Ring. $F = \{f_i \mid i \in I\}$ mit $f_i \in R[X_j \mid j \in J]$ eine (nicht notwendig endliche) Menge von Polynomen in (nicht notwendig endlich vielen) Unbestimmten über R. (Beachte allerdings, dass in einem einzelnen Polynom immer nur endlich viele Unbestimmte wirklich vorkommen. Man kann es, anders als eine unendliche Reihe vollständig hinschreiben.) Ist nun B eine (kommutative) R-Algebra, so interessieren wir uns für die gemeinsame Nullstellenmenge $V_B(F)$ der $f \in F$ in B^J.

Ist $(b_j)_{j\in J} \in V_B(F)$, so hat der durch $X_j \mapsto b_j$ definierte R-Algebrahomomorfismus $R[X_j \mid j \in J] \to B$ einen Kern, der F umfasst. Ist umgekehrt $\varphi : R[X_j \mid j \in J] \to B$ ein R-Algebrahomomorfismus, dessen Kern F umfasst, so ist $(\varphi(X_j))_{j\in J} \in V_B(F)$.

Ist $\mathfrak{a} := (F)$ das von F erzeugte Ideal, so hat man also eine kanonische Bijektion $V_B(F) \to \mathrm{Alg}_R(R[X_j \mid j \in J]/\mathfrak{a}, B)$. (Mit $\mathrm{Alg}_R(A, B)$ sei die Menge der R-Algebrahomomorfismen $A \to B$ bezeichnet.) Ferner ist $V_B(F) = V_B(\mathfrak{a})$.

Es ist sinnvoll, anstelle einer einzigen R-Algebra B gleich die Kategorie aller R-Algebren zu betrachten. Das heißt, man betrachtet zu F den Funktor $B \mapsto V_B(F)$, bzw. den zu diesem natürlich isomorfen Funktor $\mathrm{Alg}_R(R[X_j \mid j \in J]/\mathfrak{a}, -)$ von der Kategorie der R-Algebren in die der Mengen.

Hat man ein weiteres Polynomsystem $F' \subset R[X'_j \mid j \in J']$, so betrachtet man als Morfismen zwischen den entsprechenden Funktoren die natürlichen Abbildungen $\mathrm{Alg}_R(R[X_j \mid j \in J]/\mathfrak{a}, -) \to \mathrm{Alg}_R(R[X'_j \mid j \in J']/\mathfrak{a}', -)$, wo $\mathfrak{a}'$ von F' erzeugt sei. Nach dem Yoneda-Lemma entsprechen diese natürlichen Abbildungen bijektiv den R-Algebrahomomorfismen $R[X'_j \mid j \in J']/\mathfrak{a}' \to R[X_j \mid j \in J]/\mathfrak{a}$. (Beachte die Kontravarianz.)

Das Studium der über R definierten 'Varietäten' ist also äquivalent zum Studium der R-Algebren.

3.2 Hat man zwei Polynommengen in zwei Polynomringen $F_i \subset R[X_{i,j} \mid (i,j) \in I_i]$ für $i = 1, 2$, so ist $V_B(F_1) \times V_B(F_2) = \mathrm{Alg}(R[X_{i,j} \mid (i,j) \in I_1 \cup I_2]/(F_1 \cup F_2)\ ,\ B)$. Dabei werden die $R[X_{i,j} \mid (i,j) \in I_i]$ für $i = 1, 2$ als Unterringe von $R[X_{i,j}\ ,\ (i,j) \in I_1 \cup I_2]$ betrachtet und mit $(F_1 \cup F_2)$ das von $F_1 \cup F_2$ erzeugte Ideal bezeichnet wird.

Beachte $R[X_{i,j} \mid (i,j) \in I_1 \cup I_2]/(F_1 \cup F_2) = R[X_{i,j} \mid (i,j) \in I_1]/(F_1) \otimes_R R[X_{i,j} \mid (i,j) \in I_2]/(F_2)$

3.3 So vernünftig es ist, diesen sehr abstrakten und allgemeinen Standpunkt im Hinterkopf zu haben, so vernünftig ist es aber auch, sich in der Wahl der R und B zu spezialisieren.

Wir werden zumeist, aber nicht immer, den Fall $R = B = K$ betrachten, wo K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist, z.B. $K = \mathbb{C}$. Der 'geometrischste' Fall ist zweifellos $R = B = \mathbb{R}$ mit $J = \{1, 2, 3\}$ oder $\{1, 2\}$. Aber so manches, was über $\mathbb{C}$ einfach ist, ist über $\mathbb{R}$ komplizierter, wie man schon aus den Sätzen über Nullstellen eines Polynoms einer Variablen weiß.

3.2 Algebraische Form des Nullstellensatzes

3.4 Automorfismen von Polynomringen Die A-Automorfismen eines Polynomringes $A[X_1, \ldots, X_n]$ sind für allgemeine n unbekannt. Zumindest kann man einige von ihnen angeben: Lineare Automorfismen:

$$X_j \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i - b_j \ ,$$

wo (a_{ij}) eine invertierbare Matrix mit $a_{ij}, b_j \in A$ ist.

Nagata-Automorfismen:

$$X_1 \mapsto X_1, \quad X_j \mapsto X_j + f_j(X_1, \ldots, X_{j-1})$$

mit $f_j \in A[X_1, \ldots, X_{j-1}]$.

Beiderlei werden wir verwenden.

Theorem 3.5 *(Noethersches Normalisierungslemma) Seien K ein Körper, A eine integre K-Algebra von endlichem Typ und $n = \mathrm{trgd}_K Q(A)$. Dann gibt es n über K algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \ldots, x_n \in A$ derart, dass A endlich über $K[x_1, \ldots, x_n]$ ist. Insbesondere gilt $n = \dim A$.*

(trgd =Transzendenzgrad, dim =Krulldimension)

Zum Beweis zunächst ein Lemma, das für $d = 10$ jedermann vertraut ist.

Seien $d,\ n,\ a_0, \ldots, a_n,\ a'_0, \ldots, a'_n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq a_i < d,\ 0 \leq a'_i < d,\ \sum_{i=0}^{n} a_i d^i = \sum_{i=0}^{n} a'_i d^i$$

so gilt $a_i = a'_i$ für $i = 0, \ldots, n$.

Beweis: (des Theorems). Sei $A = K[Y_1, \ldots, Y_m]/\mathfrak{p}$ mit Unbestimmten Y_i und einem Primideal $\mathfrak{p}$. Setze $y_i := (Y_i \mod \mathfrak{p})$.

Es ist $m \geq n$. Wir benutzen Induktion nach m mit dem Induktionsanfang $m = n$: In diesem Fall ist bekanntlich $\{y_1, \ldots, y_m\}$ eine Transzendenzbasis, also $\mathfrak{p} = (0),\ y_i = Y_i$. Wähle $x_i = y_i$.

Sei jetzt $m > n$, also $\mathfrak{p} \neq (0)$. Es genügt, eine Unteralgebra B von A zu finden, die von $m-1$ Elementen erzeugt wird und über der A endlich ist. Denn dann ist $\mathrm{trgd}_K B = \mathrm{trgd}_K A$ und nach Induktionsvoraussetzung existieren algebraisch unabhängige $x_1, \ldots, x_n$, so dass B und damit auch A über $K[x_1, \ldots, x_n]$ endlich ist.

Zur Konstruktion von B sei $f \in \mathfrak{p} - (0)$. Wir schreiben

$$(*) \qquad f = \sum_{j \in \mathbb{N}^m} a_j Y^j.$$

Dabei ist $a_j \in K$ und $j = (j_1, \ldots, j_m)$ ein sogenannter Multiindex, für den wir $Y^j := Y_1^{j_1} \cdots Y_m^{j_m}$ definieren. Sei die natürliche Zahl d größer als jedes in $(*)$ vorkommende j_i, anders ausgedrückt $d > \mathrm{grad}_{Y_i} f$ für $i = 1, \ldots, m$. Jedem Multiindex $j = (j_1, \ldots, j_m)$ ordnen wir die Zahl $j^* := j_1 + j_2 d + \cdots + j_m d^{m-1}$ zu.

Wir setzen

$$Z_1 := Y_1, \quad Z_i := Y_i - Y_1^{d^{i-1}} \text{ d.h. } Y_i = Z_i + Z_1^{d^{i-1}} \text{ für } 2 \leq i \leq m.$$

($Z_1, \ldots, Z_n$ sind die Bilder der Y_i unter einem Automorfismus von $K[Y_1, \ldots, Y_n]$.) Dann gilt

$$f = f(Z_1, Z_2 + Z_1^d, \ldots, Z_m + Z_1^{d^{m-1}}) = \sum_{j \in \mathbb{N}^m} (a_j Z_1^{j^*} + g_j)$$

mit Polynomen $g_j \in K[Z_1, \ldots, Z_m]$, für die $\mathrm{grad}_{Z_1} g_j < j^*$ gilt. Nach der Wahl von d und obigem Lemma sind die Zahlen j^* für die Multiindices j mit $a_j \neq 0$ alle verschieden. Ist nun $k \in \mathbb{N}^m$ so gewählt, dass k^* die größte unter den Zahlen j^* mit $a_j \neq 0$ ist, so erhält man

$$f = a_k Z_1^{k^*} + h \text{ mit } \mathrm{grad}_{Z_1} g < k^* \ , \ a_k \in K^\times.$$

D.h. mit der Bezeichnung $z_i = (Z_i \mod \mathfrak{p})$ ist z_1 ganz über $K[z_2, \ldots, z_m]$. Setze $B := K[z_2, \ldots, z_m]$. □

Lemma 3.6 *Sei K ein Körper. Der Polynomring $K[X]$ (in einer Unbestimmten) hat unendlich viele maximale Ideale (d.h. unendlich viele Primideale der Höhe 1, d.h. unendlich viele untereinander nicht assoziierte irreduzible Polynome).*

Beweis: (Euklid) Seien $f_1, \ldots, f_n$ endlich viele (untereinander nichtassoziierte) irreduzible Polynome. Keines der $f_1, \ldots, f_n$ teilt das Polynom $g :=$

$f_1 \cdots f_n + 1$, welches auch keine Einheit in $K[X]$ ist. Jeder beliebige Primfaktor von g ist zu keinem der $f_1, \ldots, f_n$ assoziiert. □

Beachte, dass $K[X]$ die untereinander nicht assoziierten Primelemente $X - a$ mit $a \in K$ besitzt, dass also obiger Beweis nur im Falle eines endlichen Körpers nötig ist.

Lemma 3.7 *Der Durchschnitt unendlich vieler Primideale der Höhe 1 eines noetherschen Integritätsringes A ist* (0).

Beweis: Wäre $a \neq 0$ ein Element dieses Durchschnitts, so hätte der noethersche Ring $A/(a)$ unendlich viele minimale Primideale. □

Lemma 3.8 *Jeder noethersche Ring der Dimension* > 1 *hat unendlich viele Primideale der Höhe 1.*

Die ist eine bekannte Folgerung aus dem Hauptidealsatz.

Theorem 3.9 *(Hilberts Nullstellensatz, algebraische Form) Sei K ein Körper und A eine K-Algebra von endlichem Typ. Dann gilt:*

a) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist $A/\mathfrak{m} \supset K$ eine endliche Körpererweiterung.

b) Jedes Radikalideal (d.h. Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$) ist Durchschnitt maximaler Ideale.

(Beachte, dass die K-Algebra $K[X,Y]_{(X)}$, die nur im Wesentlichen von endlichem Typ ist, weder a) noch b) erfüllt.)

Beweis: a) Da $\dim(A/\mathfrak{m}) = 0$, ist – nach dem noetherschen Normalisierungslemma – $A/\mathfrak{m}$ endlich über einem Polynomring in 0 Unbestimmten über K; d.h. $A/\mathfrak{m}$ ist endlich über K.

b) Da jedes Radikalideal Durchschnitt von Primidealen ist, genügt es zu zeigen, dass die Primideale Durchschnitte von maximalen Idealen sind. Ist das nicht der Fall, wähle $\mathfrak{p}$ maximal unter den Primidealen, die nicht Durchschnitt von maximalen Idealen sind. Dann ist $\dim(A/\mathfrak{p}) \geq 1$.

Fall 1) $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$. Dann ist A endlich über einem Ring der Form $K[X]$. Über den unendlich vielen maximalen Idealen, d.h. Primidealen der Höhe 1, von $K[X]$ liegen unendlich viele Primideale der Höhe 1 von $A/\mathfrak{p}$. Deren Durchschnitt in $A/\mathfrak{p}$ ist (0). Also ist $\mathfrak{p}$ Durchschnitt maximaler Ideale. Widerspruch!

Fall 2) $\dim(A/\mathfrak{p}) \geq 2$. Dann ist (0) in $A/\mathfrak{p}$ Durchschnitt der unendlich vielen Primideale der Höhe 1. Letztere wiederum sind Durchschnitt maximaler Ideale, da $\mathfrak{p}$ maximal mit der Eigenschaft war, nicht Durchschnitt maximaler Ideale zu sein. Also ist auch $\mathfrak{p}$ Durchschnitt maximaler Ideale. Widerspruch! □

Korollar 3.10 *Sei $f : A \to B$ ein K-Algebrahomomorfismus, A, B über K von endlichem Typ und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von B. Dann ist $f^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal von A.*

(Beachte, dass der Ringhomomorfismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ diese Eigenschaft nicht hat.)

Beweis: Wir erhalten injektive Ringhomomorfismen $K \hookrightarrow A/f^{-1}(\mathfrak{m}) \hookrightarrow B/\mathfrak{m}$. Da der Körper $B/\mathfrak{m}$ endlich über K ist, ist er auch endlich über $A/f^{-1}(\mathfrak{m})$. Deshalb ist auch $A/f^{-1}(\mathfrak{m})$ ein Körper. □

Korollar 3.11 *Sei $\overline{K}$ der algebraische Abschluss des Körpers K, ferner $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$ und $A := K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$. Dann gehört zu jedem maximalen Ideal von A eine nichtleere, endliche Teilmenge von $V_{\overline{K}}(\mathfrak{a})$, deren disjunkte Vereinigung $V_{\overline{K}}(\mathfrak{a})$ ist.*

Genauer gilt Folgendes: Sei $V_{\overline{K}}(\mathfrak{a})$ mit $\mathrm{Alg}_K(A, \overline{K})$ identifiziert. Dann hat die Abbildung $\mathrm{Alg}_K(A, \overline{K}) \to \mathrm{Spec}(A)$, $f \mapsto \ker(f)$ das Bild $\mathrm{Spmax}(A)$ und endliche Fasern. Die Kardinalzahl der Faser über $\mathfrak{m}$ ist gleich dem Separabilitätsgrad von $A/\mathfrak{m}$ über K. Ist $K = \overline{K}$, so erhält man eine bijektive Abbildung $\mathrm{Alg}_K(A, \overline{K}) \to \mathrm{Spmax}(A)$

Beweis: Sei $f : A \to \overline{K}$ ein K-Algebrenhomomorfismus und $\mathfrak{p} = \ker(f)$. Dann ist $Q(A/\mathfrak{p}) \supset K$ eine algebraische Körpererweiterung. Nach Noethers Normalisierungslemma ist sie sogar endlich und es gilt $\dim(A/\mathfrak{p}) = 0$. Somit ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal und es gibt nur endlich viele, aber mindestens einen K-Homomorfismus $A/\mathfrak{p} \to \overline{K}$. □

Bemerkung 3.12 Ist $L \supset K$ algebraisch abgeschlossen und vom Transzendenzgrad $\geq \dim(A)$, so ist die o.a. Abbildung $\mathrm{Alg}_K(A, \overline{K}) \to \mathrm{Spec}(A)$ surjektiv.

3.3 Geometrische Form des Nullstellensatzes

Im Folgenden sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A := K[X_1, \ldots, X_n]$. Sind $a_1, \ldots, a_n \in K$ so sei hier mit $(a_1, \ldots, a_n)$ das n-tupel (d.h. der Punkt) aus K^n bezeichnet. Sind $f_1, \ldots, f_r \in A$, so bezeichnen wir das von ihnen erzeugte Ideal mit $(f_1, \ldots, f_r)A$ oder mit $Af_1 + \cdots + Af_r$.

Satz 3.13 (Hilberts Nullstellensatz) *a) Die maximalen Ideale von A sind die der Form $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)A$ mit $a_i \in K$. (Dies gilt nur, wenn K algebraisch abgeschlosen ist.) Die Abbildung $\varphi : K^n \to \mathrm{Spmax}(A)$, definiert durch $a = (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \mathfrak{m}_a := (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)A$ ist bijektiv. Die Umkehrabbidung ψ ordnet jedem $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spmax}(A)$ das einzige Element von $V(\mathfrak{m})$ zu.*

b) Für $f \in A$ und $a \in K^n$ gilt:

$$f \in \mathfrak{m}_a \iff f(a) = 0 \ .$$

c) Die Abbildung $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ ist eine bijektive Abbildung von der Menge der Radikalideale von A auf die Menge der Nullstellenmengen in K^n von Polynommengen $N \subset A$.

Beweis: Die Zuordnung $X_i \mapsto X_i - a_i$ definiert einen K-Algebrenautomorfismus $A \to A$, der das maximale Ideal $(X_1, \ldots, X_n)A$ auf das Ideal $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)A$ abbildet. Letzteres ist also auch maximal.

Sei nun $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spmax}(A)$. Die Körpererweiterung $K \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$ ist nach (3.9) endlich, also trivial, da K algebraisch abgeschlossen ist. Deshalb ist modulo $\mathfrak{m}$ jedes $f \in A$ zu genau einem $a \in K$ kongruent. Sei $X_i \equiv a_i \mod \mathfrak{m}$ (und $a_i \in K$), so ist $X_i - a_i \in \mathfrak{m}$ für $i = 1, \ldots, n$. Da $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)A$ schon maximal ist, muss $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m}_a = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)A$ übereinstimmen. Wir haben gezeigt, dass φ surjektiv ist.

Da aber $V(\mathfrak{m}_a) = V(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) = \{a\}$ gilt, ist ψ wohldefiniert und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{K^n}$. Daraus folgt die Injektivität von φ und, dass ψ zu φ invers ist.

b) $f \in \mathfrak{m}_a \Longrightarrow V(f) \supset V(\mathfrak{m}_a) \Longrightarrow f(a) = 0 \iff a \in V(f) \Longrightarrow f \in I(V(f)) \subset I(a)$. □

Korollar 3.14 *Sei $N \subset A$ und $a \in K^n$. Dann gilt*

$$a \in V(N) \iff N \subset \mathfrak{m}_a \iff I(V(N)) \subset \mathfrak{m}_a \; .$$

Die erste Äquivalenz gilt wegen (3.13 b)). Indem man letzteres auf die $f \in I(V(N))$ anwendet, erhält man $a \in V(N) \iff I(V(N)) \subset \mathfrak{m}_a$.

3.15 Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathfrak{b} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal, so bestehen auf natürliche Weise bijektive Korrepondenzen zwischen folgenden 3 Mengen:

$V(\mathfrak{b})(\subset K^n)$, $\operatorname{Spmax}(K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{b})$, $\operatorname{Alg}_K(K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{b}, K)$

Ist ferner $\mathfrak{a} := \sqrt{\mathfrak{b}}$, so gilt $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b})$ und man hat die entsprechenden Korrespondenzen, wo $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}$ ersetzt ist.

3.4 Ebene Kurven

Definition 3.16 *Eine affine Kurve V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K ist eine Varietät, für deren affine Algebra* $\dim(\Gamma(V)/\mathfrak{p}) = 1$ *für jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ von $\Gamma(V)$ gilt.*

3.17 Beachte, dass eine Kurve über $\mathbb{C}$ anschaulich etwas 2-dimensionales ist.

Das zu einer ebenen Kurve, d.h. zu einer solchen im K^2 gehörige Ideal ist also ein Durchschnitt endliche vieler Primideale der Höhe 1 in $K[X, Y]$. Da dieser

Ring faktoriell ist, sind diese Primideale Hauptideale, die von jeweils einem irreduziblen Polynom erzeugt sind. Ist nun $\mathfrak{p}_i = (f_i)$ mit zueinander verschiedenen $\mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$, so ist $\mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_n = (f_1 \cdots f_n)$. Das eine ebene Kurve definierende Radikalideal wird also von einem quadratfreien Polynom erzeugt.

Sind $f, g \in K[X, Y]$ quadratfreie Polynome, so gilt $V(f) \subset V(g) \iff f|g$.

Es ist übrigens nicht bekannt, inwieweit (irreduzible) Kurven im K^3 durch 2 Polynome beschrieben werden können. (Man weiß zwar, dass viele Primideale der Höhe 2 mehr als zwei Erzeugende benötigen, aber es könnte $\mathfrak{p} = \sqrt{(f_1, f_2)}$ gelten. Für einen Grundkörper der Charakteristik $p > 0$ ist das z.B. immer der Fall.)

3.18 Wenn zwei affine ebene Kurven eine gemeinsame irreduzible Komponente haben, so haben sie natürlich unendlich viele Punkte gemeinsam, andernfalls aber nicht. Zum Beweis s.u.

3.19 Wir wollen jetzt ebene Kurven in der 'Nähe' eines ihrer Punkt betrachten. Durch Anwendung einer Translation kann man annehmen, dieser P.unkt sei der Nullpunkt: Ist $f \in K[X, Y]$ und $(c, d) \in V(f)$, d.h. $f(c, d) = 0$, dann hat $f(X + c, Y + d)$ die Nullstelle $(0, 0)$.

Ist $(0, 0) \in V(f))$, so muss das konstante Glied 0 sein, also $f = aX + bY +$ Glieder höherer Grade.

Es spricht vieles dafür, $(0, 0)$ einen **regulären Punkt** von $V(f)$ zu nennen, wenn $aX + bY$ nichttrivial, d.h. $(a, b) \neq (0, 0)$ ist. Denn dann gilt nach dem Satz über implizite Funktionen für $K = \mathbb{C}$, dass $V(f)$ in der Nähe von $(0, 0)$ der Graph einer differenzierbare Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von X (im Falle $b \neq 0$) oder Y (im Falle $a \neq 0$) ist. Die Gerade $V(aX + bY)$ ist dann eine Tangente an $V(f)$ in $(0, 0)$.

Ist $(a, b) = (0, 0)$, so nennt man $(0, 0)$ einen **singulären Punkt** oder eine Singularität von $V(f)$. (Beachte, dass f quadratfrei ist.)

Mit obigen Bezeichnungen ist $a = \frac{\partial f}{\partial X}(0, 0)$ und $b = \frac{\partial f}{\partial Y}(0, 0)$. Also ist ein Punkt $(c, d) \in V(f)$ eine Singularität von $V(f)$ genau dann, wenn $\frac{\partial f}{\partial X}(c, d) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial Y}(c, d) = 0$ ist.

Satz 3.20 *Eine ebene affine Kurve hat nur endlich viele Singularitäten.*

Beweis: Für $f \in K[X, Y]$ sei mit $D_1 f$, bzw. $D_2 f$ die partielle Ableitung nach X, bzw. Y bezeichnet.

Sei $V(f)$ die ebene Kurve, wo $f \in K[X, Y]$ quadratfrei und K algebraisch abgeschlossen ist.

Eine Singularität von $V(f)$ ist eine gemeinsame Nullstelle von f, D_1f, D_2f, gehört also zu $V(I)$, wo $I = \sqrt{(f, D_1f, D_2f)}$ ist. Sei $I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$. Es ist zu zeigen, dass alle diese $\mathfrak{p}_i$ maximale Ideale sind. Ist dies nicht der Fall, so ist eines von ihnen von einem irreduziblen $g \in K[X,Y]$ erzeugt. Dieses g teilt dann alle drei Polynome f, D_1f, D_2f,

Sei $f = gh$. Dann ist $D_if = (D_ig)h + g(D_ih)$. Aus $g|D_if$ folgt dann $D_ig = 0$, da f quadratfrei und $\mathrm{grad}(D_ig) < \mathrm{grad}\ g$ ist. Da dies für $i = 1, 2$ gilt, ist zunächst char $K = p > 0$, ferner haben die Monome in g die Form $aX^{mp}Y^{np}$. Da K algebraisch abgeschlossen ist, gibt es hierzu ein $b \in K$ mit $aX^{mp}Y^{np} = (bX^mY^m)^p$. Es folgt, dass g eine p-te Potenz, also nicht irreduzibel ist. □

Satz 3.21 *Sei C eine ebene affine algebraische Kurve und $C = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ ihre Zerlegung in irreduzible Komponenten. Ein Punkt $P \in C$ ist genau dann eine Singularität von C, wenn P eine Singuarität einer der C_i ist oder auf mindestens 2 der C_i liegt.*

Beweis: Seien $C_i = V(f_i)$ mit irreduziblen f_i. OBdA sei $P = (0,0) \in C_1$.

1. Fall: $P \notin C_i$ für $i = 2, \ldots, n$. Für die konstanten Glieder c_1 der f_i mit $i \geq 2$ ist dann $c_i \neq 0$, also auch $c = c_2 \cdots c_n \neq 0$. Ist $aX + bY$ der lineare Teil von f_1, so ist $caX + cbY$ der lineare Teil von f. Also ist $(0,0)$ genau dann eine Singularität von C, wenn es eine solche von C_1 ist.

2. Fall: $P \in C_1 \cap C_i$ für mindestens ein $i > 1$. Dann ist offenbar der lineare Teil von f gleich 0. □

Korollar 3.22 *Seien C_1, C_2 ebene Kurven ohne gemeinsame irreduzible Komponente. Dann ist die Schnittmenge $C_1 \cap C_2$ endlich.*

Denn die Schnittpunkte sind Singularitäten von $C_1 \cup C_2$.

Es gibt eine weitere Möglicheit, reguläre Punkte einer (ebenen) Kurve zu beschreiben. Dazu betrachten wir zur ebenen Kurve $C = V(f)$ mit quadratfreiem $f \in K[X,Y]$ den Ring $A = K[X,Y]/(f)$ (den sogenannten **Koordinatenring** von C). Zu einem Punkt $p \in C$ mit dem zugehörigen maximalen Ideal $_m = I(p) + (f)$ betrachten wir den lokalen Ring $A_\mathfrak{m}$. Es gilt nun der

Satz 3.23 *C ist regulär in p, d.h. p ist ein regulärer Punkt von C genau dann, wenn $A_\mathfrak{m}$ ein diskreter Bewertungsring ist.*

Beweis: Sei oBdA $p = (0,0)$ und $= (X,Y)$ das zu Nullpunkt gehörige maximale Ideal von $K[X,Y]$. Genau dann, wenn der lineare Teil von f nicht 0 ist, gilt $f \in {}^{-2}$. D.h. $\mathfrak{m} = /(f)$ ist ein Hauptideal, genau dann, wenn p ein regulärer Punkt von C ist.

Der Satz folgt also aus dem

LEMMA: Sei A ein noetherscher lokaler Ring der Dimension ≥ 1, dessen maximales Ideal ein Hauptideal ist, so ist A ein diskreter Bewertungsring.

BEWEIS: π erzeuge das maximale Ideal. Ist π nilpotent, so ist $\mathrm{Nil}(A) = (\pi)$, also $\dim\ A = 0$. Also ist nach Voraussetzung π nicht nilppotent. Nach Krull gilt allerdings $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\pi^n) = (0)$. Ist $a \in A - (0)$, so gibt es deshalb ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a \in (\pi^n) - (\pi^{n+1})$. Man kann also $a = bu$ mit einem $u \in A - (\pi)$ schreiben. Demnach ist $u \in A^\times$. Hieraus folgt zunächst, dass A integer, und dann dass A faktoriell mit dem – bis auf assoziierte Elemente – einzigen Primelelent π ist. $\square$

Bemerkung 3.24 Auf ähnliche Weise kann man folgenden Satz (von Tate) zeigen: Sei $\mathfrak{p}$ ein primes Hauptideal. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal oder A integer.

Mit Hilfe vollständiger Induktion folgt daraus der wichtige Satz: Sei A ein noetherscher lokaler Ring, dessen maximales Ideal von $\dim A$ Elementen erzeugt wird (ein sog. regulärer lokaler Ring), so ist A integer.

Beispiele 3.25 a) Der Kreis $f = X^2 + Y^2 - 1$. Es ist $D_1 f = 2X,\ D_2 f = 2Y$. Wenn $\mathrm{char}K \neq 2$ ist, ist $(0,0)$ die einzige gemeinsame Nullstelle von $D_1 f, D_2 f$. Und dieser Punkt liegt nicht auf $V(f)$, da $f(0,0) = 1$ ist. Wenn $\mathrm{char}K \neq 2$ ist, ist f auch irreduzibel.

Ist $\mathrm{char}K = 2$ so ist $f = (X + Y + 1)^2$, also f nicht quadratfrei.

a') Die Parabel $f = Y - X^2$. Da f als Polynom in Y primitiv über $K[X]$ und irreduzibel über $K(X)$ ist, ist f irreduzibel. Somit ist $V(f)$ als Varietät auch irreduzibel.

Es ist $D_2 f = 1$. Also gibt es keine Singularitäten.

Allgemeiner ist der Graf eines Polynoms $g(X) \in K[X]$ also $V(Y - g(X))$ irreduzibel und singularitätenfrei.

b) Die Neilsche Parabel ('cuspidal cubic'): $f = Y^2 - X^3$. Es ist $D_1 f = 3x^2,\ D_2 f = 2Y$. Offenbar ist $(0,0)$ die einzige Singularität. Ferner ist f irreduzibel. Denn es ist irreduzibel als Polynom in Y über $K(X)$ und primitiv über $K[X]$. Also ist $V(f)$ irreduzibel.

c) $f = 4XY + X^4 + Y^4$. Mit etwas Mühe sieht man, dass f irreduzibel ist, vorausgesetzt $\mathrm{char}K \neq 2$. Es ist $D_1 f = 4Y + 4X^3,\ D_2 f = 4X + 4Y^3$. Die Singularitäten sind also die Lösungen des Gleichungssystems $Y + X^3 = 0,\ X + Y^3 = 0,\ XY + X^4 + Y^4 = 0$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhält man durch Elimination von Y die Gleichung $X - X^9 = 0$, entsprechend $Y - Y^9 = 0$. (Das sind also notwendigen Bedingungen!) Die Lösungsmenge von $X - X^9 = 0$ ist $\{0, 1, \zeta, \zeta^2 \dots, \zeta^7$, wo ζ eine primitive 8-te Einheitswurzel ist. Die Singularitätenmenge von $V(f)$ ist also in der Menge der Paare (a, b) enthalten, wo a und b die genannte Menge unabhängig voneinander durchlaufen. Ist $a = 0$ und $(a, b) \in V(f)$, so muss $b = 0$ sein. Das Analoge gilt für $b = 0$. Sind $a \neq 0, b \neq 0$, so ist $|a^4 + b^4| \leq 2 < 4 = 4|ab|$. Für solche a, b muss also $f(a, b) \neq 0$ sein. Somit ist $(0, 0)$ die einzige Singularität von $V(f)$.

Wir wollen nun $K = \mathbb{C}$ annehmen und die reellen Nullstellen von f betrachten. Hält man X in $\mathbb{R}$ fest, so ist f ein Polynom 4-ten Grades mit positivem Leitkoeffizienten (nämlich 1). Es geht also für $Y \to \pm\infty$ gegen $+\infty$. Es hat also genau dann reelle Nullstellen, wenn sein absoluter Minimalwert ≤ 0 ist. Mittels $D_2 f$ sieht man, dass f als Polynom in Y ein einziges Minimum, nämlich in $-\sqrt[3]{X}$ hat. Der Wert von f dort ist $f(X, -\sqrt[3]{X}) = -4X^{4/3} + X^4 + X^{4/3} = X^4 - 3X^{4/3}$. Man sieht, dass dieser Wert nur für absolut gesehen kleine Werte von X negativ sein kann. Da das Analoge gilt, wenn man X mit Y vertauscht, ist die Menge der reellen Punkte von $V(f)$ in einem Quadrat enthalten, also beschränkt.

Für die komplexen Punkte gilt dies nicht!

Satz 3.26 *Eine algebraische Kurve $V(f)$ im $\mathbb{C}^2$ ist nicht beschränkt. Allgemeiner und genauer gilt für einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper K: Zu fast jedem $x \in K$ oder $y \in K$ gibt es ein y, bzw. x mit $f(x, y) = 0$*

Beweis: Fall 1. Y komme in f nicht vor, d.h. f sei ein Polynom in X allein. Da f nicht konstant ist, hat es Nullstellen (der Vielfachheit 1) $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dann ist $V(f)$ die Vereinigung der Geraden $\{(a_j, y) \mid y \in K\}$.

Fall 2. Y kommt in f vor. Schreibe f als Polynom in Y über $K[X]$. Als solches hat es einen Grad > 0 und als Leitkoeffizienten ein von 0 verschiedenes Polynom in X. Dieses hat nur endlich viele Nullstellen $a_1, \ldots, a_m$. Für $x \neq a_j$ für $j = 1, \ldots, m$ ist das Polynom $f(x, Y) \in K[Y]$ nicht konstant, hat also eine Nullstelle y, d.h. $f(x, y) = 0$. □

Beispiel 3.27 Der Graph der im Reellen differenzierbaren Funktion $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^5}$ ist $V(Y^3 - X^5)$. Diese Kurve hat eine Singularität, in $(0, 0)$, die man im Reellen nicht 'sieht'!

Beispiel 3.28 ELLIPTISCHE KURVEN (Diese haben etwas mit der Längenmessung auf Ellipsen zu tun, sind aber selber keine Ellipsen.) Sei $f(X) \in K[X]$ ein Polynom 3. Grades mit 3 verschiedenen Nullstellen. Eine Elliptische Kurve C lässt sich folgendermaßen schreiben (wenn K algebraisch abgeschlossen ist): $C := V(Y^2 - f(X)$. Man ergänzt sie durch einen Punkt N im Unendlichen. Die Geraden durch diesen Punkt seien die Parallelen zur Y-Achse. Durch folgende geometrische Konstruktion macht man $C \cup \{N\}$ zu einer Gruppe: N ist das neutrale Element. Ist $P \in C$, so gehe $-P$ durch Spiegelung an der X-Achse hervor, wobei $-N = N$ sei. Sind $P, Q \in C$, so sei g die Gerade durch P, Q, die im Falle $P = Q$ die Tangente an C in P sei. Diese Gerade schneidet $C \cup \{N\}$ in drei Punkten, die (teilweise oder alle) zusammenfallen können. Wenn P, Q, R die drei Schnittpunkte sind, so sei $P + Q = -R$.

Die Gruppengesetze sind trivial zu zeigen – bis auf die Assoziativität!

Elliptische Kurven spielen in der modernen Zahlentheorie eine immense Rolle. Sie werden zum Beispiel beim Beweis der Fermatschen Vermutung benutzt.

4 Morfismen affiner Varietäten

In diesem Paragrafen bezeichne K einen algebraisch abgeschlossenen Körper

4.1 Seien $V \subset K^n$, $W \subset K^m$ affine Varietäten. Dabei sei $V = V(\mathfrak{a})$, $W = V(\mathfrak{b})$ mit Radikalidealen $\mathfrak{a} \subset K[X_1, \dots, X_n]$, $\mathfrak{b} \subset K[Y_1, \dots, Y_m]$, ferner $A = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$, $B = K[Y_1, \dots, Y_m]/\mathfrak{b}$. Dann lässt sich V mit $\mathrm{Alg}_K(A, K)$ und W mit $\mathrm{Alg}_K(B, K)$ identifizieren.

Definition 4.2 *Ein* **Morfismus** $\alpha : V \to W$ *sei dann durch einen K-Algebrenhomomorfismus $\varphi : B \to A$ induziert, d.h. $\alpha = \varphi^*$, mit anderen Worten $\alpha(h) = h \circ \varphi$ für $h \in \mathrm{Alg}_K(A, K)$*

Bemerkung 4.3 Wenn man V, W mit $\mathrm{Spmax}(A)$, bzw. $\mathrm{Spmax}(B)$ identifiziert, wird α durch $\mapsto \varphi^{-1}()$ beschrieben.

4.4 Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K[Y_1, \dots, Y_m] & & K[X_1, \dots X_n] \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \\ K[Y_1, \dots, Y_m]/\mathfrak{b} & \xrightarrow{\varphi} & K[X_1, \dots X_n] \end{array}$$

lässt sich kommutativ durch einen K-Algebrenhomomorfismus $\psi : K[Y_1, \dots, Y_m] \to K[X_1, \dots X_n]$ ergänzen, indem man in $K[X_1, \dots X_n]$ für $i = 1, \dots, m$ einen Repräsentanten g_i von $\varphi \circ \kappa(Y_i)$ wählt und $\psi(Y_i) := f_i$ definiert.

Das m-tupel $(g_1, \dots, g_m)$ beschreibt dann auch eine Abbildung $K^n \to K^m$, die V nach W abbildet – und zwar wie α!

Beweis: Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$. Wir müssen zeigen, dass das von $Y_1 - f_1(a), \dots, Y_m - f_m(a)$ erzeugte maximale Ideal von $K[Y_1, \dots, Y_m]$ unter ψ das Urbild des maximalen Ideals $\mathfrak{m}_a = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ von $K[X_1, \dots, X_n]$ ist. Dazu genügt es, $\psi(Y_i - f_i(a)) \in \mathfrak{m}_a$ zu zeigen. Nach Definition von ψ ist $\psi(Y_i - f_i(a)) = f_i(X_1, \dots, X_n) - f(a_1, \dots, a_n)$. Die Behauptung folgt dann aus $X_i \equiv a_i \mod \mathfrak{m}_a$. –

Bemerkung 4.5 Jeder Morfismus ist stetig in Bezug auf die Zariski-Topologien, und im Fall $K = \mathbb{C}$ auch in Bezug auf die euklidischen Topologien.

Beispiele 4.6 a) Sei K aufgefasst als affine Gerade und C die Neilsche Parabel $V(Y^2 - X^3) \subset K^2$. Betrachte den Morfismus $f : KC$, $t \mapsto (t^2, t^3)$. Diese Abbildung ist bijektiv. Die Umkehrabbildung wird durch $(0,0) \mapsto 0$, $(x, y) \mapsto y/x$ für $x \neq 0$ beschrieben.

Trotzdem ist f kein Isomorfismus. Die Umkehrabbildung ist kein Morfismus. Am einfachsten sieht man dies daran, dass der entsprechende Ringhomomorfismus $K[X,Y]/(Y^2-X^3) \to K[T],\ x \mapsto T^2, y \mapsto T^3$ zwar injektiv, aber nicht surjektiv ist; T liegt nicht im Bild. (x, y sind die Restklassen von X, Y.)

b) Die (affine) Parabel $V(Y - X^2) \subset K^2$ ist vermöge der Abbildung $(x, y) \mapsto x$ isomorf zur Geraden. Der Umkehrmorfismus ist $x \mapsto (x, x^2)$.

c) Sei $\mathrm{char} K \neq 2$. Der Morfismus $V(X^2+Y^2-1) \to K,\ (x, y) \mapsto x$ ist surjektiv. Bis auf die Punkte ± 1 hat jedes $x \in K$ zwei Urbilder.

d) $V(XY - 1) \to K,\ (x, y) \mapsto x$ hat endliche Fasern, nämlich einelementige für $x \neq 0$, und eine leere Faser $f^{-1}(0)$.

Definition 4.7 *Ein Morfismus $\varphi : V \to W$ heißt endlich, wenn der zugehörige K-Algebrenhomomorfismus $K[W] \to K[V]$ endlich, (d.h. $K[V]$ vermöge φ^* ein endlich erzeugter $K[W]$-Modul) ist.*

Satz 4.8 *Die Fasern eines endlichen Morfismus sind endliche Mengen.* prp
Obiges Beispiel zeigt, dass die Umkehrung nicht gilt.

Der Satz folgt direkt aus folgendem

Lemma 4.9 *Sei $A \subset B$ eine endliche Ringerweiterung. Über jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von A liegen nur endlich viele Primideale von B.*

Beweis: Sei $\mathfrak{b}$ der Durchschnitt der Primideale von B über $\mathfrak{p}$. Dann ist $B' := B/\mathfrak{b}$ endlich über $A' := A/\mathfrak{p}$. Die Primideale von B über $\mathfrak{p}$ entsprechen (bijektiv) denen von B' über (0), d.h. den Primidealen von $S^{-1}B'$, wo $S := A' - \{0\}$ sei. Da B' ein endlich erzeugter A'-Modul ist, ist $S^{-1}B'$ ein endlich erzeugter $S^{-1}A'$-Vektorraum, also von endlicher Länge über $S^{-1}A'$, ja erst recht “ber $S^{-1}B'$. Als artinscher Ring hat er nur endlich viele Primideale. □

Definition 4.10 *Eine normale affine Varietät ist eine irreduzible affine Varietät, deren lokale Ringe ganz abgeschlossen sind.*

Man beachte, dass das Wort ‘normal’ hier weder etwas mit dem Begriff ‘normale Körpererweiterung’ noch mit dem Begriff ‘normaler topologischer Raum’, ja nicht einmal mit Noethers Normalisierungsatz zu tun hat!

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass man irreduzible affine Varietäten ‘normalisieren’ kann, benötigen dafür einige Vorbereitungen.

Lemma 4.11 *Sei A ein Integritätsring, $L \supset Q(A)$ eine algebraische Körpererweiterung und B der ganze Abschluss von A in L. Dann ist $L = \{b/a \mid a \in A, b \in B\}$. Insbesondere gibt es eine K-Basis von L, die aus Elementen von B besteht.*

Beweis: Sei $x \in L$. Es gibt eine Gleichung $x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ mit $c_i \in K$, d.h. $c_i = a_i/a$ mit $a_i, a \in A,\ a \neq 0$. Somit ist $(ax)^n + a_1(ax)^{n-1} + aa_2(ax)^{n-2} + \cdot + a^{n-1}a_n = 0$, d.h. $b = ax$ ist ganz über A, gehört somit zu B. Also ist $x = b/a$ mit $a \in A,\ b \in B$ □

Satz 4.12 *Sei A ein noetherscher Integritätsring, $L \supset Q(A)$ eine endliche Körpererweiterung und B der ganze Abschluss von A in L. Ferner existiere eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene) $Q(A)$-lineare Abbildung $S : L \to Q(A)$ mit $S(B) \subset A$. Dann ist B endlich über A.*

Im Allgemeinen braucht B nicht endlich über A zu sein. Siehe BIV §8 Aufgaben 4 und 5.

Beweis: Für einen A-Untermodul $M \subset L$ definiere $M := \{x \in L \mid S(xM) \subset A\}$. Da S auch A-linear ist, ist M auch ein A-Modul. Ferner ist $M_1 \supset M_2$, falls $M_1 \subset M_2$ ist.

Aus $BB \subset B$ und $SB \subset A$ folgt $B \subset B$. Sei jetzt $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von L über $Q(A)$ mit $b_i \in B$. Sei $M := Ab_1 + \cdots + A_{bn} \subset B$. Dann ist $B \subset B \subset M$. Da A noethersch ist, genügt es, eine injektive A-lineare Abbildung $\varphi : M \hookrightarrow A^n$ anzugeben.

Dies geschieht durch $\varphi(x) := \big(S(xb_1), \ldots, S(xb_n)\big)$. Denn nach Definition von M ist $S(xb_i) \in A$. Um noch die Injektivität zu zeigen, nehmen wir $\varphi(x) = 0$ an. Das bedeutet $Sxb_i = 0$ für jedes i und deshalb $S(xy) = 0$ für jedes $y \in L$, da S eine K-lineare Abbildung und $b_1, \ldots, b_n$ eine K-Basis von L ist. Deshalb muss $x = 0$ sein, was die Injektivität von φ impliziert. □

Korollar 4.13 *Ist in obiger Situation A ganz abgeschlossen und $L \supset Q(A)$ eine separable Körpererweiterung, so ist B endlich über A.*

Beweis: In diesem Fall erfüllt die Spur S der Körpererweiterung obige Bedingungen: $S(B) \subset A$, da die Spur ganze Elemente in solche abbildet und A in $Q(A)$ ganz abgeschlossen ist. Ferner ist die Spur einer separablen endlichen Körpererweiterung nichttrivial. □

Korollar 4.14 *Sei A eine affine integre K-Algebra und $L \supset Q(A)$ eine endliche Körpererweiterung. Dann ist der ganze Abschluss B von A in L endlich über A. Dies gilt insbesondere für $L = Q(A)$, d.h. der ganze Abschluss von A (in seinem Quotientenkörper) ist endlich über A.*

Beweis: Nach dem noetherschen Normalisierungssatz gibt es algebraisch unabhängige $x_1, \ldots, x_r \in A$, derart dass A endlich über $K[x_1, \ldots, x_r]$ ist. Dann ist B auch der ganze Abschluss von $K[x_1, \ldots, x_r]$ in L. D.h. wir dürfen $A = K[x_1, \ldots, x_r]$ annehmen, insbesondere auch, dass A ganz abgeschlossen ist.

Ist N die normale Hülle von L über $Q(A)$ und B' der ganze Abschluss von A in N, so ist B ein A-Untermodul von B'. Es genügt also zu zeigen, dass B' endlich über A ist.

Da N über $Q(A)$ normal ist gibt es einen Körperturm $Q(A) \subset N_{in} \subset N$, derart, dass $N_{in} \subset N$ separabel und $Q(A) \subset N_{in}$ rein inseparabel ist.

Da der separable Fall bereits erledigt ist, dürfen wir also $N = N_{in}$ annehmen. Wir haben den Beweis jetzt also auf folgenden Fall reduziert: $A = K[x_1, \ldots, x_r]$, wobei die x_i so gut wie Unbestimmte sind, $L \supset Q(A)$ eine endliche rein inseparable Körpererweiterung, die oBdA nichttrivial ist.

Sei $p = \mathrm{char} K \neq 0$. Dann gibt es eine Potenz q von p mit $L \subset Q(A)^{1/q}$. Dann ist $K^{1/q}[x_1^{1/q}, \ldots, x_r^{1/q}]$ ganz über A und ganz abgeschlossen in $Q(A)^{1/q}$. Demnach ist $B = L \cap K^{1/q}[x_1^{1/q}, \ldots, x_r^{1/q}]$.

Nun ist $K[x_1^{1/q}, \ldots, x_r^{1/q}]$ ein freier A-Modul. Eine Basis besteht aus den (endlich vielen) Elementen $(x_1^{1/q})^{\alpha_1} \cdots (x_r^{1/q})^{\alpha_r}$ mit ganzen α_i mit $0 \leq \alpha_i < q$. Ferner ist $K^{1/q}[x_1^{1/q}, \ldots, x^{1/q}]$ frei (aber nicht notwendig endlich erzeugt) über $K[x_1^{1/q}, \ldots, x^{1/q}]$. Eine Basis ist eine Basis von $K^{1/q}$ über K. Insgesamt ist $K^{1/q}[x_1^{1/q}, \ldots, x^{1/q}]$ frei über $K[x_1, \ldots, x_r]$.

Es gibt also eine A-lineare Abbildung $s : K^{1/q}[x_1^{1/q}, \ldots, x^{1/q}] \to A$ mit $s(1) \neq 0$. Da $L = \{b/a \mid b \in B, a \in A\}$ ist, wird durch $S(b/a) := s(b)/a$ eine $Q(A)$-lineare Abbildung definiert, die die Bedingungen von Satz 4.11 erfüllt. $\square$

Theorem 4.15 *Es gibt zu jeder irreduziblen affinen Varietät V eine normale affine Varietät $\overline{V}$ zusammen mit einem endlichen birationalen Morfismus $\overline{V} \to V$.*

5 Projektive Räume

5.1 Sei K ein Körper. Gemeinhin wird der K^n als geometrisches Objekt betrachtet, insbesondere, wenn $K = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$ ist. Er ist „der“ **n-dimensionale affine Raum**über K.

Es gibt gute Gründe, neben dem n-dimensionalen affinen auch auch den **n-dimensionalen projektiven Raum** über K als zumindest gleichberechtigtes geometrisches Objekt zu betrachten.

Was ist nun „der“ projektive n-dimensionale Raum über K, der $\mathbb{P}^n_K$? Abstrakt gesehen ist er (nach Emil Artin) ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum V in anderer Sprechweise. Seine Punkte sind die 1-dimensionalen Untervektorräume (d.h. die „Geraden durch 0) von V. seine Geraden die 2-dimensionalen Untervektorräume von V, usw., seine k-dimensionalen linearen Teilmengen sind die $(k+1)$-dimensionalen Untervektorräume von V.

Die ‘Inzidenz’ eines Punktes, der durch den 1-dimensionalen Untervektorraum P gegeben ist, mit einer linearen Teilmenge, die durch den Untervektorraum U gegeben ist, (d.h., dass der Punkt auf der linearen Teilmenge liegt) bedeutet dann natürlich $P \subset U$. Wenn man, wie gewohnt, Geraden, Ebenen usw. als Mengen der Punkte, die mit ihr inzidieren, interpretieren will, muss man einen k-dimensionalen Teilraum des projektiven Raumes als Menge aller eindimensionalen Untervektorräume eines $(k+1)$-dimensionalen Untervektorraumes U von V auffassen. Allgemein werden wir den zum Vektorraum V gehörenden projektiven Raumes $\mathbb{P}(V)$ als Menge der 1-dimensionalen Teilräumen von V betrachten. Für $V = K^{n+1}$ schreiben wir auch $\mathbb{P}^n_K$. (Da bekanntlich jeder $(n+1)$-dimensionale K-Vektorraum zu K^{n+1} isomorf ist, bedeutet es keine Einschränkung, den $\mathbb{P}^n_K$ zu betrachten.)

5.2 Den $\mathbb{P}^n_K$ kann man auch als $(K^{n+1} - \{0\})/\sim$ beschreiben, wo $v \sim v'$ durch $\lambda v = v'$ für geeignetes $\lambda \in K^\times$ definiert ist. Die Äquivalenzklasse von $(a_0, \ldots, a_n)$ modulo ‘$\sim$’ wird mit $[a_0 : a_1 : \ldots : a_n]$ bezeichnet. (Für diese ‘projektiven Koordinaten gilt: Erstens ist $(a_0, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, zweitens ist $[a_0 : \ldots : a_n] = [b_1 : \ldots : b_n]$ genau dann, wenn ein $\lambda \in K^\times$ existiert, so dass $b_i = \lambda a_i$ für $i = 0, \ldots, n$ gilt.

5.3 Der Zusammenhang zum affinen Raum K^n ist der folgende:

Die Teilmenge $H_0 := \{[0 : a_1 : \ldots : a_n]\}$ des $\mathbb{P}^n_K$ ist ein $(n-1)$-dimensionaler linearer Teilraum, eine sogenannte **Hyperebene**. (Man kann sie auf naheliegende Weise mit dem $\mathbb{P}^n_K$ identifizieren.) Es ist $\mathbb{A}^n_0 := \mathbb{P}^n_K - H_0 = \{[a_0 : \ldots : a_n] \mid a_0 \neq 0\}$. Die Abbildung

$$\alpha_0 : \mathbb{A}^n_0 \longrightarrow K^n,\ [a_0 : a_1 : \ldots : a_n] \mapsto \left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0}\right)$$

ist bijektiv. Die Umkehrabbildung ist $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto [1 : a_1 : \ldots : a_n]$.

Entsprechend definiert man $H_i := \{a_0 : \ldots : a_n] \mid a_i = 0\}$ und setzt $\mathbb{A}_i := \mathbb{P}^n - H_i$.

Der affine Raum K^n wird also zum projektiven Raum $\mathbb{P}^n_K$, indem man die 'dünne' Menge H_0 hinzufügt. Diese nennt man manchmal die 'unendlich ferne Hyperebene'. Dabei sollte man jedoch bedenken, dass man den affinen Raum K^n als Komplement jeder beliebigen Hyperebene des $\mathbb{P}^n_K$ erhält. Was man als 'unendlich fern' betrachtet, hängt ab von der gewählten Einbettung $K^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$.

5.4 Affine Überdeckung. Analog zur oben gewählten Hyperebene $H = H_0$ können wir zu jedem $i = 0, \ldots, n$ die Hyperebene $H_i := \{[a_0 : \ldots : a_n] \mid a_i = 0\}$ betrachten. Da $H_0 \cap \ldots \cap H_n = \emptyset$ ist, wird $\mathbb{P}^n_K$ durch die $n+1$ offenen Mengen $\mathbb{P}^n_K - H_i$, deren jede zum K^n homöomorf ist, überdeckt.

5.5 Mannigfaltigkeit Für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist $\mathbb{P}^n_K$ eine (analytische, also erst recht differenzierbare, also erst recht stetige) Mannigfaltigkeit. Die Karten sind die α_i, die analog zu α_0 definiert sind. Wir betrachten (der Einfachheit halber) die Übergangsabbildung von α_0 zu α_1. Wir betrachten das Inverse der 0-ten Karte und die 1-te Karte

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto [1 : a_1 : \ldots : a_n], \quad [b_0 : b_1 : \ldots : b_n] \mapsto (b_0/b_1, b_2/b_1, \ldots, b_n/b_1)$$

Ihre Verkettung ist auf $K^n - L$ definiert, wo $L := \{[a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 = 0\}$ ist, und bildet $(a_1, \ldots, a_n)$ nach $(1/a_1, a_2/a_1, \ldots, a_n/a_1)$ ab. Diese Abbildung ist sicherlich analytisch.

Natürlich kann man bei diesen Betrachtungen $0, 1$ durch beliebige i, j ersetzen.

5.6 Geometrie im projektiven Raum zu betreiben, ist manchmal vorteilhaft. Z.B. schneiden sich in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2_K$ je zwei verschiedene Geraden in genau einem Punkt. Die Ausnahme der Parallelität gibt es nicht. Allgemeiner gilt für algebraisch abgeschlossenes K, dass zwei Kurven im $\mathbb{P}^2_K$ der Grade m, n, die keine 'Komponente' gemeinsam haben, genau mn Schnittpunkte haben, wenn man mit 'Vielfachheiten' zählt. (Satz von Bezout.) Wollte man diesen Satz für die affine Ebene K^2 aussprechen, käme man nicht ohne Betrachtung von 'Schnittpunkten im Unendlichen' aus. Man würde in Wahrheit die projektive Ebene zumindest implizit betrachten. Eine 'elliptische Kurve' kann man mit einer Gruppenstruktur versehen, aber über einem algebraisch abgeschlossenen Körper nur als projektive Kurve. Der Satz von Riemann-Roch gilt nur für projektive Kurven. Auch ist es einfacher, die Lösungsmenge etwa der Fermatgleichung $X^n + Y^n + Z^n = 0$ als singularitätenfreie Kurve, denn als Fläche mit einer Singularität zu betrachten. Usw., usf.

5.7 (Topologie) Sei im Rest des Paragrafen $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Dann besitzt der K^{n+1} und damit auch $K^{n+1} - \{0\}$ auf kanonische Weise eine Topologie, die euklidische Topologie. (Diese ist 'basisunabhängig'. D.h., jeder Isomorfismus von K^{n+1} mit einem $(n+1)$-dimensionalen K-Vektorraum V liefert auf V dieselbe Topologie. Das liegt daran dass die Vektorraumautomorfismen des K^{n+1} umkehrbar stetig sind.)

Sei $\kappa : K^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$ die kanonische Projektion. Wir versehen $\mathbb{P}^n_K$ mit der feinsten Topologie, für die κ stetig ist, d.h. U heißt offen in $\mathbb{P}^n_K$, wenn $\kappa^{-1}(U)$ offen in $K^{n+1} - \{0\}$ ist. Dann ist X abgeschlossen in $\mathbb{P}^n_K$ genau dann, wenn $\kappa^{-1}(A)$ abgeschlossen in $K^{n+1} - \{0\}$ ist.

Man sieht leicht das Folgende: Sei H_0 die in (5.3) angegebene Hyperebene des $\mathbb{P}^n_K$. Die auf $\mathbb{P}^n_K - H_0$ als Teilraum von $\mathbb{P}^n_K$ induzierte Topologie stimmt mit derjenigen überein, die durch die Identifizierung mit K^n gegeben wird.

Satz 5.8 $\mathbb{P}^n_K$ *mit der angegebenen Topologie ist hausdorffsch.*

Beweis: Seien $p, q \in \mathbb{P}^n_K$ verschiedene Punkte. Es gibt offenbar eine Hyperebene H des $\mathbb{P}^n_K$, auf der weder p noch q liegen. Da K^n hausdorffsch ist, gibt es in $\mathbb{P}^n_K - H$ disjunkte offene Umgebungen von p und q. Diese sind auch offene Umgebungen in $\mathbb{P}^n_K$, da $\mathbb{P}^n_K - H$ offen in $\mathbb{P}^n_K$ ist. □

5.9 Betrachte die surjektive kanonische Abbildung $\kappa : K^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$ und in $K^n - \{0\}$ die Einheitssfäre S um den Nullpunkt. Diese hat die Dimension n für $K = \mathbb{R}$, bzw. $2n+1$ für $K = \mathbb{C}$. Diese wird durch κ stetig und surjektiv auf $\mathbb{P}^n_K$ abgebildet.

Daraus folgt, dass $\mathbb{P}^n_K$ kompakt ist.

Neben der 1-Punkt-Kompaktifizierung, die aus dem K^n die n- bzw. $2n$-dimensionale Sfäre macht, gibt es die Kompaktifizierung zum projektiven Raum.

5.10 Die stereografische Projektion. Betrachte $\mathbb{R}^{n+1}$ als Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit den Koordinaten (y, x), $y \in \mathbb{R}, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wie üblich definiert durch $S^n = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid y^2 + |x|^2 = 1\}$, wo $|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$ ist. Sei $p = (1, 0) \in S^n$ der 'Nordpol'. Die stereografische Projektion ist die Projektion $\pi : S^n - \{p\} \to R^n$ von p aus auf die Hyperebene $y = 0$. Sie wird durch $\pi(y, x) = \dfrac{x}{1-y}$ beschrieben. (Dies erhält man direkt mit Hilfe des Strahlensatzes.)

Die Umkehrabbildung ist $\varphi : x \mapsto \left(\dfrac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}, \dfrac{2x}{|x|^2 + 1} \right)$.

Ist $p' := (-1, 0)$ der 'Südpol', so kann man die analoge Projektion auch vo Südpol aus betrachten: $\pi' : S^n - \{p' \to \mathbb{R}^n,\ (x, y) \mapsto \dfrac{x}{1+y}$. Die Umkehrabbildung ist dann $\varphi'(x) = \left(\dfrac{-|x|^2 + 1}{|x|^2 + 1}, \dfrac{2x}{|x|^2 + 1} \right)$.

Für $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ sehen wir $\pi \circ \varphi'(x) = \pi\left(\frac{-|x|^2+1}{|x|^2+1}, \frac{2x}{|x|^2+1}\right) = \left(1 + \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\right)^{-1} \frac{2x}{|x|^2+1} = \frac{|x|^2+1}{2|x|^2} \frac{x}{|x|^2+1} = \frac{x}{|x|^2}$.

Sei jetzt $n = 1, 2$ oder 4, und $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{H}$ aufgefasst, ferner $\psi(x) = \varphi'(\overline{x})$, wobei $\overline{x}$ das Konjugierte von x bezeichnet, so sieht man, dass φ, ψ die S^n durch zweimal K überdecken, wie es bei der projektiven Geraden über K der Fall ist. Siehe das Folgende.

5.11 Die projektive Gerade. Die **projektive Gerade** $\mathbb{P}^1_K$ wird durch die beiden offenen Mengen $\{[a_0 : a_1] \mid a_i \neq 0\}$ mit $i = 0, 1$ überdeckt. Man hat stetige Abbildungen $\varphi_i : K \to \mathbb{P}^1_K$ mit $\varphi_0(a) = [1 : a]$, $\varphi_1(a) = [a : 1]$. Da $[1 : a] = [a^{-1} : 1]$ ist, gilt $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_0(a) = a^{-1}$ und $\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1(a) = a^{-1}$.

Mit Hilfe der stereografischen Projektion (oder auch unmittelbar) erkennt man, dass $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ homöomorf zur 1-Sfäre S^1, und $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ homöomorf zur 2-Sfäre ist. Mit Abschnitt 5.9 erhält man Abbildungen

$$\kappa_{\mathbb{R}} : S^1 \to S^1, \quad \kappa_{\mathbb{C}} : S^3 \to S^2.$$

$\kappa_{\mathbb{R}}$ ist gegeben durch $z \mapsto z^2$, wenn man S^1 mit dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ identifiziert. $\kappa_{\mathbb{C}}$ ist die berühmte Hopf-Abbildung, die wir jetzt ein wenig studieren wollen. (Auch der Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen liefert eine Hopf-Abbildung $S^7 \to S^4$. Entsprechendes gilt für die Oktaven.)

5.12 Die Fasern von $\kappa := \kappa_{\mathbb{C}}$ sind 1-Sfären. Denn sei $q \in S^2,\ x \in \kappa^{-1}(q)$, so ist die Abbildung $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\} \longrightarrow \kappa^{-1}(q),\ \lambda \mapsto \lambda x$ stetig und bijektiv, also ein Homöomorfismus, da S^1 kompakt ist.

Wir wollen zeigen, dass je zwei solche Fasern in $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ wie zwei ringförmige Kettenglieder in einer 'normalen Kette' ineinander hängen.

Ohne Einschränkung ist eine Fasern diejenige, auf derder Punkt $(1, 0) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ liegt. Sie ist $\{(\lambda, 0) \in \mathbb{C}^2 \mid |\lambda| = 1\} = \{(\cos t, \sin t, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq t < 2\pi\}$. Ihr Bild unter der stereografischen Projektion ist $\{\frac{\sin t}{1-\cos t} \mid 0 \leq t < 2\pi\}(\cup\{\infty\})$, also die Gerade $x_2 = x_3 = 0$, (nach Geschmack vereinigt mit $\{\infty\}$).

Dann betrachten wir eine weitere Faser: $\{(\lambda a, \lambda b] \mid |\lambda| = 1\}$, wo $a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1$ ist. Ihre Projektion auf die Ebene $\mathbb{R}^2$ der – reell gesehen – letzten beiden Komponenten ist injektiv ud hat als Bild einen Kreis um 0. Deshalb läuft diese Faser topologisch gesehen wie ein Kreis um die Gerade $xx_2 = x_3 = 0$ herum.

6 Projektive Varietäten

Satz 6.1 *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines graduierten Ringes $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$. So ist das graduierte Ideal $\mathfrak{p}' := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(\mathfrak{p} \cap A_i)$ ebenfalls ein Primideal.*

Beweis: Angenommen $\mathfrak{p}'$ wäre nicht prim. Seien dann $s, t \in A - \mathfrak{p}'$ mit $st \in \mathfrak{p}'$ mit minimaler Summe ihrer Grade. Seien $s = s_0 + \cdots + s_n,\ t = t_0 + \cdots + t_m$ mit $s_i, t_i \in A_i$ und $s_n, t_m \notin \mathfrak{p}'$. Dann ist $s_n t_m \in \mathfrak{p} \cap A_{n+m} \subset \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ prim, folgt $s_n \in \mathfrak{p}$ oder $t_m \in \mathfrak{p}$, etwa $s_n \in \mathfrak{p}$. Dann ist $s_n \in A_n \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$. Also ist auch $s_n t \in \mathfrak{p}'$. Sei $s' := s - s_n = s_0 + \cdots + s_{n-1}$. Dann ist $s't = st - s_n t \in \mathfrak{p}'$. Wegen der Minimalität von $n + m$ und $t \notin \mathfrak{p}'$ folgt $s' \in \mathfrak{p}'$, also $s \in \mathfrak{p}'$ – ein Widerspruch. □

Korollar 6.2 *Jedes minimale Primoberideal eines graduierten Ideals ist graduiert.*

Korollar 6.3 *Ist $\mathfrak{a}$ ein graduiertes Ideal des graduierten Ringes $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$, so ist auch $\sqrt{\mathfrak{a}}$ graduiert.*

Analog zu affinen Varietäten im K^n definieren wir jetzt projektive Varietäten im $\mathbb{P}^n_K$.

Definition 6.4 *Sei $N \subset K[X_0, \ldots, X_n$ eine Menge von homogenen Polynomen (in n+1 Unbestimmten). Die durch N definierte* **projektive Varietät** *$V_{proj}(N)$ sei die Menge $\{[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_K \mid f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ für alle $f \in N\}$.*

Dies ist wohldefiniert, da für ein homogenes Polynom vom Grad d gilt: $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \ldots, a_n)$.

Definition 6.5 *Eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^n_K$ ist eine wie oben durch eine Menge von homogenen Polynomen definierte projektive Varietät.*

Ist $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so ist jede Zariski-abgeschlossene Menge auch euklidisch abgeschlossen. Die sieht man unmittelbar aus der Definition der Topologie auf $\mathbb{P}^n$ in Abschnitt 5.7.

6.6 Ist N eine Menge homogener Polynome, so ist das von ihr erzeugte Ideal $\mathfrak{a}$ graduiert, und jedes Polynom aus $\mathfrak{a}$ annulliert die Punkte von $V_{proj}(N)$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{a}$ graduiert, so ist $V_{aff}(\mathfrak{a})$ die Vereinigung 1-dimensionaler Teilräume von K^{n+1}. Denn für $f \in \mathfrak{a}$ gilt, dass die homogenen Summanden von f auch zu $\mathfrak{a}$ gehören. Das bedeutet, man kann $V_{proj}(\mathfrak{a})$ definieren. Und man hat $V_{proj}(N) = V_{proj}(\mathfrak{a})$ unter den obigen Voraussetzungen.

Insbesondere gibt es zu jeder Menge N homogener Polynome eine endliche Teilmenge N' mit $V_{proj}(N) = V_{proj}(N')$.

6.7 Wie bei den affinen Varietäten gibt es im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Körpers K eine bijektive Beziehung zwischen den graduierten Radikalidealen von $K[X_0, \ldots, X_n]$ und den Zariski-abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{P}^n_K$.

6.8 Sei K^n in $\mathbb{P}^n_K$ durch $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto [1 : a_1 : \ldots : a_n]$ eingebettet. Wir wollen beschreiben, durch welche Polynommenge N' der Durchschnitt $V_{proj}(N) \cap K^n$ beschrieben wird:

$$N' = \{f(1, X_1, \ldots, X_n) \mid f(X_0, \ldots, X_n) \in N\}$$

Umgekehrt gibt es zu jeder in K^n Zariski-abgeschlossenen Menge $V(M)$ eine Menge homogener Polynome N in $K[X_0, \ldots, X_n$ mit $N' = M$, also $V_{proj}(N) \cap K^n = V_{aff}(M)$. Sei nämlich $f \in M$ vom Grad d. Jedes in f vorkommende Monom vom Grade $r(\leq d)$ werde mit X_0^{d-r} multipliziert. Dieses Vorgehen ist erfolgreich, aber nicht allzu kanonisch.

Definition 6.9 *Eine quasiprojektive Varietät ist der Durchschnitt einer Zariski-abgeschlossenen mit einer Zariski-offenen Teilmenge des* $\mathbb{P}^n_K$.

Affine Varietäten sind mithin quasiprojektiv.

7 Morfismen projektiver Varietäten

7.1 Wir beginnen mit sogenannten **rationalen Funktionen** auf einem projektiven Raum $\mathbb{P}^n_K$. Eine solche wird definiert durch einen Bruch $\frac{f}{g}$, wobei $f.g$ (zueinander teilerfremde) homogene Polynome aus $K[X_0, \ldots, X_n]$ vom gleichen Grad sind.

Ein solcher Bruch definiert offenbar eine Abbildung $V - V(g) \to K$.

Wie meromorfe Funktionen in der Funktionentheorie sind rationale Funktionen nicht überall definiert. Nun kann man auf dem $\mathbb{P}^1_K$ (allgemeiner auf jeder Kurve) eine rationale Funktion auch als richtige Abbildung nach $\mathbb{P}^1_K = K \cup \{\infty\}$ auffassen, indem man die Punkte, wo der Nenner 0 wird auf ∞ abbildet. Aber dies ist auf dem $\mathbb{P}^2_K$ nicht mehr möglich. Nämlich dem Punkt $[1:0:0] \in \mathbb{P}^2_K$ wird durch den Bruch X_1/X_2 nichts rechtes, auch nicht ∞, zugeordnet. (Man spricht in diesem Fall auch von einem Unbestimmtheitspunkt der rationalen Funktion.)

Trotzdem hat diese rationale Funktion einen Zariski-dichten Definitionsbereich, der natürlich auch Zariski-offen ist.

Definition 7.2 *(vorläufige!) Eine rationale Funktion auf einer projektiven Varietät $V \subset \mathbb{P}^n_K$ ist die Einschränkung einer rationalen Funktion von $\mathbb{P}^n_K$ auf V, deren Definitionsbereich auf V dicht ist.*

Wir treffen hier auf die Schwierigkeit, dass der Definitionsbereich einer rationalen Funktion nicht eindeutig definiert ist. Da $K[X_0, \ldots, X_n]$ faktoriell ist, kann man einen Bruch von Polynomen (bis auf Faktoren aus $K^\times$) eindeutig kürzen. Dies gilt nicht mehr allgemein auf V. Zwei Brüche f_1/g_1 und f_2/g_2 können verschiedene Definitionsbereiche haben, die beide dicht sind, aber auf dem Durchschnitt, der immer noch dicht ist, übereinstimmen. Diese betrachtet man als gleiche rationale Funktionen. (Der Durchschnitt zweier offener dichter Mengen ist offen und dicht.)

Definition 7.3 *Genau genommen ist eine rationale Funktion also eine Äquivalenzklasse von Brüchen bezüglich der Äquivalenzrelation: 'gleich auf dem gemeinsamen Definitionsbereich (der Menge, wo beide definiert sind)'.*

Definitionen 7.4 *a) Sei V lokal abgeschlossen in der Zariskitopologie im $\mathbb{P}^n_K$. Eine reguläre Funktion auf V ist eine Abbildung (die überall auf V definiert ist) $\varphi : V \to K$, die eine rationale Funktion ist, derart dass für jedes $p \in V$ ein Bruch f/g von homogenen Polynomen gleichen Grades existiert, der φ in einer Umgebung von p definiert.*

b) Ein Morfismus $\varphi : V \to K^n$ ist eine Abbildung, deren Komponenten reguläre Funktionen sind.

Satz 7.5 *Seien $X \subset \mathbb{P}_K^n$, $Y \subset \mathbb{P}_K^m$ quasiprojektive Varietäten, $x \in X$ und $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung mit $\varphi(x) \in \mathbb{A}_i^m \cap \mathbb{A}_j^m$.*
Gibt es dann eine offene Umgebung U_i von x mit $\varphi(U_i) \subset \mathbb{A}_i^m$, derart dass $\varphi|_{U_i}$ regulär als Abbildung nach $\mathbb{A}_i^m$ ist, so gilt dasselbe für j anstelle von i.

Beweis: Wir können uns auf den Spezialfall $i = 0, j = 1$ beschränken. $\varphi|_{U_0}$ sei durch das $(m+1)$-tupel rationaler Funktionen $(1, f_1, \dots, f_m)$ definiert. D.h. $f_i(y)$ ist für jedes $y \in U_0$ definiert und $\varphi(y) = [1 : f_1(y) : \dots : f_m(y)]$. Da auch $\varphi(x) \in \mathbb{A}_1^m$ gilt, Setze $U_1 := \{y \in U_0 \mid f_1(y) \neq 0\}$. Dann ist U_1 offen in U_0 also auch in X. Und für $y \in U_1$ gilt $\varphi(y) = [1/f_1(y) : 1 : f_2(y)/f_1(y) : \dots : f_m(y)/f_1(y)]$. □

Definition 7.6 *Seien $X \subset \mathbb{P}_K^n$, $Y \subset \mathbb{P}_K^m$ quasiprojektive Varietäten. Ein Morfismus $\varphi : X \to Y$ ist eine Abbildung, derart dass zu jedem $x \in X$ mit $\varphi(x) \in \mathbb{P}^m - H_i$ eine offene Umgebung U von x mit $\varphi(U) \subset \mathbb{P}^m - H_i$ existiert, so dass $\varphi|_U : U \to \mathbb{P}_K^m - H_i \cong K^m$ regulär ist.*

Bemerkung 7.7 Ein Morfismus ist stetig in Bezug auf sowohl die Zariski-, als auch im Falle $K = \mathbb{C}$ die euklidische Topologien.

Dies folgt sofort aus folgender Tatsache:

Lemma 7.8 *Sei X ein topologischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. (D.h. die U_i sind offen und $X = \bigcup_{i \in I] U_i}$.) Eine Teilmenge T von X ist genau dann abgeschlossen in X, wenn jedes $T \cap U_i$ abgeschlossen in U_i ist.*

Beweis: Sei $V_i = X - U_i$. Dann ist $V_i \cup T$ abgeschlossen in X. Denn es gibt eine abgeschlossenen Menge X mit $S \cap U_i = T \cap U_i$, woraus $V_i \cup T = V_i \cup S$ folgt.

Dann ist $T = \bigcap_{i \in I}(V_i \cup T)$ abgeschlossen. □

7.9 Man kann Morfismen quasiprojektiver Varietäten $X \subset \mathbb{P}_K^n$, $Y \subset \mathbb{P}_K^m$ auch folgendermaßen definieren: Ein Morfismus $\varphi : X \to Y$ ist eine Abbildung $X \to Y$ derart, dass für jedes $x \in X$ ein $(m+1)$-tupel von homogenen Polynomen gleichen Grades $(f_0, \dots, f_m)$ existiert, die in einer Zariski-Umgebung U von x keine gemeinsame Nullstelle haben, so dass $\varphi(y) = [f_0(y) : \dots : f_m(y)]$ für alle $y \in U$ ist.

Wenn das nämlich so ist und etwa $\varphi(x) \in \mathbb{A}_0^m$ gilt, ferner φ auf U durch $[f_0 : \dots : f_m]$ definiert ist, so kann man auch φ auf $U \cap \varphi^{-1}(\mathbb{A}_0^m$ durch $1 : f_1/f_0 : \dots : f_m/f_0]$ definieren, wodurch ein Morfismus $U \to \mathbb{A}_0^m$ gegeben wird.

Die Umkehrung ist noch direkter.

7.10 Sei X eine irreduzible Varietät. Dann ist jede von 0 verschiedene rationale Funktion f in jedem Punkt einer gewissen offenen dichten Menge von X definiert und ungleich 0.

Denn sowohl der Definitionsbereich von f ist offen und nichtleer, als auch die Menge, wo der Zähler einer Darstellung von f nicht verschwindet. Da eine offene nichtleere Teilmenge eines irreduziblen Raumes dicht ist, folgt die Behauptung.

Es folgt, dass der Ring der rationalen Funktionen auf einer irreduziblen quasiprojektiven Varietät X ein Körper ist. Diesen Körper nennt man den **Funktionenkörper von** X.