Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung nach Gauss

Lemma 9.6 *Seien p eine Primzahl und a, b positive ganze Zahlen, die kleiner als p sind. Dann kann p kein Teiler von ab sein.*

Proof: Angenommen p wäre ein Teiler von ab. Sei dann c die kleinste positive ganze Zahl, derart, dass p ein Teiler von ac ist. Dabei kann $c = b$, aber auch $c < b$ sein. Jedenfalls ist $c < p$.

Dividiere p durch c mit Rest: $p = qc + \gamma$ mit $0 \leq \gamma < c$. Da p prim und $c < p$ ist, kann c kein Teiler von p und folglich γ nicht gleich 0 sein. Es ist aber p ein Teiler von $a\gamma = ap - qac$, im Widerspruch zur Minimalität von c. □

Corollary 9.7 *Ist p eine Primzahl und ein Teiler von ab, wo a, b natürliche Zahlen sind. Dann ist p ein Teiler (mindestens) einer der Zahlen a, b.*

Dividiere andernfalls a und b durch p mit Rest: $a = pq_1 + \alpha,\ b = pq_2 + \beta$ mit $1 \leq \alpha, \beta < p$. Dann ist p auch ein Teiler von $\alpha\beta = (a - pq_1)(b - pq_2) = ab - pq_1 b - pq_2 a + p^2 q_1 q_2$. Dies widerspricht dem Lemma.

Corollary 9.8 *Ist eine Primzahl Teiler eines Produkts $a_1 \cdots a_m$ natürlicher Zahlen, so teilt sie einen der Faktoren.*

Proposition 9.9 *Sei eine natürliche Zahl wie folgt auf zwei Weisen in Primfaktoren zerlegt:*

$$p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$$

Dann stehen links und rechts dieselben Primfaktoren, und zwar auch jeder Primfaktor gleich oft.

Proof: Ist eine Primzahl p Teiler einer Primzahl q, so muss $p = q$ sein. Da nach dem letzten Korollar, jedes p_i eines der q_j teilt und umgekehrt, müssen rechts und links dieselben Primzahlen stehen, allenfalls noch verschieden oft. Ist der Faktor p auf der rechten Seite m-mal und auf der linken Seite n-mal vertreten und $n \leq m$, so dividiere auf beiden Seiten durch p^n. Dann taucht p links nicht mehr und rechts $(m - n)$-mal auf. Das geht aber nur, wenn $m - n = 0$ ist. □

21 Vorkurs-Aufgaben

1. In einer Beschreibung wird die Größe eines Balkons als 80 cm^2 angegeben. Was sagen Sie dazu? Zeichnen Sie ein Rechteck von 80 cm^2 Flächeninhalt, oder schneiden Sie ein solches aus, vorausgesetzt, ein DIN A4-Blatt reicht dazu. Wie viele cm^2 enthalten $0,8$ m^2, wie viele ein Quadrat mit der Seitenlänge 80 cm?

2. Ein Kaufmann hat 100 kg Gurken. Diese bestehen (gewichtsmäßig) zu 99 Prozent aus Wasser. Wieviel kg Wasser müssen sie durch Austrocknen verlieren, damit sie nur noch zu 98 Prozent aus Wasser bestehen?

3. Eine Aktie hat am Montagmorgen den Kurs 100 Euro. Im Laufe des Montags gewinnt (bzw. verliert) sie 10 Prozent. Im Laufe des Dienstags verliert (bzw. gewinnt) sie 10 Prozent. Wie hoch ist der Kurs am Dienstagabend? (Ist die Gleichheit beider Ergebnisse erklärlich?)

4. a) Wieviel Prozent de Bruttopreises beträgt die Mehrwertsteuer bei einem Mehrwertsteuersatz von 16 Prozent? b) Was bedeutet prozentual jeder 2-te, bzw. jeder 3-te, ... bzw. jeder 6-te? c) Jeder wievielte einer Bevölkerung ist 5 Prozent (bzw. 10, bzw. 20 Prozent) dieser Bevölkerung?

5. Seien a, b, c positive (ganze) Zahlen. a) Wann gilt $\dfrac{a+b}{a+c} = \dfrac{b}{c}$? b) Wann gilt $\dfrac{a+b}{a+c} \geq \dfrac{b}{c}$?

6. Finden Sie (etwa durch Probieren) ganze Zahlen m, n mit $\dfrac{m}{3} + \dfrac{n}{5} = \dfrac{1}{15}$ und vergessen Sie dabei nicht, dass es auch negative ganze Zahlen gibt.

7. Finden Sie untereinander verschiedene ganze Zahlen $k, l, m, n > 0$ mit $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = 1$

8. Berechnen Sie $\dfrac{\frac{3}{2} + \frac{5}{7}}{\frac{2}{3} + \frac{7}{5}}$ und $\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{3+6}}$.

9. Bringen Sie auf einen Bruchstrich (mit nicht zu großem Nenner!)
$$\frac{a}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{a}{k!(n-k)!}$$

10. Bringen Sie auf einen Bruchstrich: $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ac} + \dfrac{c}{ab}$ und $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c}$

11. Lösen Sie die folgenden Gleichungen, oder zeigen Sie, dass es in dem einen oder anderen Fall nicht möglich ist:
$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{6}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{x}} = 1\ , \quad \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{7}{6} + \frac{1}{x}} = 1$$

12. Geben Sie systematisch alle Tripel (a, b, c) ganzer Zahlen an, für die folgendes gilt:
$$0 < a \leq b \leq c \ \text{ und } \ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \in \mathbb{Z}$$
Ohne einen Text, der beweist, dass Sie wirklich alle möglichen Tripel gefunden haben, ist Ihre Lösung nichts wert!

13. Sei p eine Primzahl und k eine ganze Zahl mit $1 \leq k \leq p-1$. Sie dürfen annehmen, dass (der Binomialkoeffizient) $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ eine ganze Zahl ist. Zeigen Sie, dass $\binom{p}{k}$ durch p teilbar ist.

14. Schreiben Sie $\tan x + \cot x$ als rationalen Ausdruck in $\sin 2x$.

15. a) Kürzen Sie den Bruch $\dfrac{x^{12}-x^3}{x^6}$ so gut es allgemein möglich ist.
b) Kann man denselben Bruch als Differenz zweier Potenzen von x schreiben, wo jeder Exponent auch negativ sein darf (aber nicht muss)? c) Kann man dasselbe für den Kehrwert des Bruches machen?

16. Das entsprechende wie oben für den Bruch $\dfrac{t^7-t^2+t}{t^5}$

17. Berechnen Sie $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ und zeigen Sie, dass $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}>2$ ist, wenn $a>b>0$ gilt.

18. Seien $a,b,c,d\in\mathbb{Q}_+$ und es gelte $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$.

Zeigen Sie: Dann gilt $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$ und folglich $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\neq\dfrac{a+c}{b+d}$.

19. Sei Q eine Menge von Primzahlen und S die Menge aller $s\in\mathbb{N}_1$, deren Primfaktoren sämtlich zu Q gehören. Zeigen Sie, dass die Menge $A:=\left\{\dfrac{a}{s}\mid a\in\mathbb{Z},s\in S\right\}$ ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist.

20. Zeigen Sie: Die abbrechenden Dezimalbrüche bilden einen Unterring von $\mathbb{Q}$. Ist dieser Unterring von $\mathbb{Q}$ ein Körper? Ist er einer der Ringe, die in der vorangehenden Aufgabe konstruiert wurden?

21. Zeigen Sie, dass die Menge $\{-1,\ 0,\ 1\}$ auf folgende Weise zu einem Körper wird: Die Multiplikation ist die Übliche. Die Addition $\oplus$ wird definiert durch $1\oplus1:=-1$, $(-1)\oplus(-1):=1$ und $a\oplus b:=a+b$ in allen übrigen Fällen. (Den Beweis der Assoziativität der Addition und der Distributivität brauchen Sie jeweils nur für einen weniger trivialen Spezialfall auszuführen. Es gibt auch einen Beweis, der die Assoziativität der Addition und die Distributivität auf die entsprechenden Gesetze in $\mathbb{Z}$ zurückführt.)

22. Zeigen Sie: Die Gleichung $x^2+x+1=y^2$ hat in ganzen Zahlen nur die Lösungen $x=0,y=1$ und $x=-1,y=1$. (Die linke Seite liegt echt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen, wenn $x>0$ oder $x<-1$ ist.)

23. Zeigen Sie: Zu jeder ungeraden Zahl $u\in\mathbb{N}$ gibt es ein $m\in\mathbb{N}$ mit $u^2=8m+1$.

24. a) Zeigen Sie $a^2+b^2\geq 2ab$ für alle $a,b\in\mathbb{Q}$. (Tipp: $x^2\geq0$.)

b) Folgern Sie $a^2+b^2\geq ab$ für $a,b\in\mathbb{R}$. (Beachten Sie, dass $2ab\geq ab$ nicht immer richtig ist! Unterscheiden Sie 2 Fälle.)

c) Folgern Sie (aus a)), dass $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$ für alle $a,b,c\in\mathbb{R}$ gilt.

25. a) In $\mathbb{Q}$ gelte $0<a<b$. Zeigen Sie: Für ganze $n\geq1$ gilt $a^n<b^n$. (Vollst. Ind.)

b) Seien $a>1$ rational und $m<n$ ganze Zahlen. Zeigen Sie $a^m<a^n$.

c) Zeigen Sie: Für ganze $n\geq3$ gilt $2^{n!}>(n+1)!$.

d) Zeigen Sie: Für ganze $n\geq4$ gilt $2^{[n]}>n!>2^n$. (Hier bezeichnet $2^{[n]}$den Potenzturm von 2 mit n Stockwerken.)

26. Berechnen Sie: a) 2^4 und 4^2, b) 3^4 und 4^3, c) $(6\pm4)^3$ und $6^3\pm4^3$.

27. Berechnen Sie $2^3\cdot2^3$, sowie $(2\cdot3)^3$ und schließlich $2^{(3\cdot3)}$.

28. Berechnen Sie a) 2^2-2^1 und 2^{2-1}, b) 2^5-2^2 und 2^{5-2}, c) 2^2+2^2 und 2^{2+2}.

29. Schreiben Sie als Potenzen von 10: a) hunderttausend, b) zehn Millionen, c) eine Milliarde, d) eine Billion, e) one billion (amerikanisch).

Was sind demgemäß die Logarithmen zur Basis 10 der genannten Zahlen?

30. Schreiben Sie in der Form 10^xm die folgenden Längeneinheiten:

 1 μm (Mikrometer), 1 nm (Nanometer), 1 pm (Picometer), 1 Å (Ångström)

31. Schreiben Sie $(7a^7 + 6a^6)^2$ als Summe von Potenzen von a mit ganzzahligen Koeffizienten.

32. Berechnen Sie $\sqrt{9+16}$ und $\sqrt{9} + \sqrt{16}$.

 Bemerkung zu dieser und anderen Aufgaben: Dass für eine Funktion f (von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) die Gleichung $f(a+b) = f(a)+f(b)$ allgemein (d.h. für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$) gilt, ist eher die Ausnahme. Erfüllt eine stetige Funktion f diese Eigenschaft, so gilt $f(x) = cx$ mit einer Konstanten c.

33. Berechnen Sie 2^{4^2} und $(2^4)^2$.

34. Berechnen Sie $2^{3^{1+1}}$ und $2^{3^1} \cdot 2^{3^1}$.

35. Berechnen Sie $2^{3^2} \cdot 2^{3^2}$ und $(2^3 \cdot 2^3)^2$.

36. Finden Sie, wenn möglich, eine natürliche Zahl n mit $((3^3)^3)^n = 3^{3^3}$.

37. a) Geben Sie allgemeine Formeln für $(a + b)^3$ und $(a + b)^4$ an.
 b) Berechnen Sie (mit Hilfe der vorigen Aufgabe) $10\ldots01^4$, wo zwischen den beiden Einsen 999 (oder allgemeiner $n-1$) Nullen stehen. Geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an, d.h. in ähnlicher Weise wie hier die Basis der zu berechnenden Potenz angegeben ist.

38. Berechnen Sie $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ und allgemein $(a-b)\sum_{j=0}^n a^{n-j}b^j$. (Dabei ist $\sum_{j=0}^n a^{n-j}b^j = a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n$.)

39. Auf das erste Feld eines Schachbretts sei 1 Reiskorn gelegt, auf das zweite 2 Reiskörner, auf das dritte 4 usw., nämlich jeweils auf ein Feld doppelt soviele wie auf das vorangehende. (Vernachlässigen Sie das Problem, dass möglicherweise die Felder zu klein für die Anzahl der Reiskörner werden, die auf sie gelegt werden sollen.)

 a) Berechnen Sie in möglichst wenigen Schritten exakt die Anzahl N der Reiskörner, die insgesamt auf das Schachbrett gelegt werden sollen, im Dezimalsystem. (Ich habe Verständnis dafür, wenn Sie diese Rechnungen nicht ausführen wollen. Dann müssen Sie aber angeben, wie eine möglichst effiziente Berechnung zu erfolgen hat. Beachten Sie, dass man auch mit einem Taschenrechner, der nur 10 Stellen anzeigt, die Hand- und Kopfrechenarbeit auf wenige Additionen reduzieren kann. Wie?)
 b) Berechnen Sie N im Binärsystem.
 c) Zerlegen Sie N in zwei ganzzahlige Faktoren, die annähernd gleich groß sind.
 d) Zeigen Sie, dass N durch 17 teilbar ist.

40. Zeigen Sie (etwa mit Induktion): a) Für alle ganzen Zahlen $n \geq 3$ ist $n^2 > 2n + 1$.

 b) Für alle ganzen Zahlen $n \geq 5$ ist $2^n > n^2$.

41. Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n + 1)! - 1$. (Dies geschieht mit vollständiger Induktion ohne Mühe.)

42. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $2 \cdot 5^{3n+1} + 4^n$ durch 11 teilbar, d.h. es gibt zu jedem n ein (von n abhängiges) $k \in \mathbb{N}$ mit $11 \cdot k = 2 \cdot 5^{3n+1} + 4^n$. (Tipp: Induktion.)

43. 101 ist eine Primzahl. Ist auch 10101 eine solche? Gibt es überhaupt unter den natürliche Zahlen, die sich im Dezimalsystem abwechselnd mit den Ziffern 1 und 0 schreiben lassen, außer 101 weitere Primzahlen? (Wende 2mal die geometrische Reihe an.) Können Sie das Ergebnis Ihrer Betrachtung verallgemeinern?

44. a) Zeigen Sie, dass mit Ausnahme von 2 und 3 jede Primzahl von der Gestalt $6m \pm 1$ mit einer natürlichen Zahl m ist.
b) Welche Primzahlen p, q gibt es, die der Gleichung $q = 2p^2 + 1$ genügen?

45. Zeigen Sie, dass man n verschiedene Gegenstände, etwa die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ auf $n!$ verschiedene Weisen in eine Reihenfolge bringen kann.

46. Seien $m, n \in \mathbb{N}_1$. Zeigen Sie: $\dfrac{19^m}{17^n}$ ist nicht ganz.

47. Etwas zum Knobeln: Gibt es eine quadratische Tischplatte, die man mit Postkarten lückenlos und ohne Überlappungen bedecken kann? Die Länge einer Postkarte verhält sich zur Breite wie $\sqrt{2} : 1$. (Natürlich soll die Kantenlänge der Tischplatte nicht 0 sein.)
(Nehmen Sie an, die Tischplatte sei n Kartenbreiten plus m Kartenlängen breit. Wie viele Karten brauchen Sie, um eine Fläche entsprechenden Ausmaßes zu bedecken?)

48. Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n}\ , \quad \sum_{n=-3}^{4} n(n+2)$

49. Seien $p_1, \ldots, p_n$ verschiedene Primzahlen mit $n \geq 2$. Zeigen Sie: Der Nenner von $a := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j}$ in der Standardform (d.h. gekürzt mit positivem Nenner) ist $p_1 \cdots p_n$. (D.h. nach erfolgter Addition der auf den kleinsten gemeinsamen Nenner gebrachten Summanden kann man nicht kürzen.) Insbesondere gilt $a \notin \mathbb{Z}$. (Wenn Sie die erste Aussage nicht sofort beweisen können, zeigen Sie zunächst die letzte. Ist $p_1 \cdots p_{n-1} a \in \mathbb{Z}$?)

50. Zeigen Sie: Für $n \geq 2$ ist $a := \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ keine ganze Zahl. (Tipp: Sei m das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner. Was gilt für $am/2$? Betrachte die größte 2-Potenz unter den Nennern.)

51. Zeigen Sie: Für $n \geq 2$ ist $a := \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$ keine ganze Zahl.

52. Betrachten Sie

$$K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}\ , \quad L := \{a + 2b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}\ ,$$

$$R := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}\ , \quad S := \{a + 2b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}\ .$$

a) Zeigen Sie: K und L sind Teilkörper von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie ferner $K = L$.
b) Zeigen Sie: R und S sind beide keine Teilkörper, aber Teilringe von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie ferner $R \supset S$ und $R \neq S$.

53. Sei $a > 0$ eine irrationale reelle Zahl und $n \geq 2$ ganz. Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{a}$ ebenfalls irrational ist.

54. Seien p, q verschiedene Primzahlen. a) Zeigen Sie, dass $\dfrac{\ln p}{\ln q}$ irrational ist. (Tipp: Ansonsten erhielte man einen Widerspruch zur eindeutigen Primfaktorzerlegung.)
b) Folgern Sie, dass es höchstens eine Primzahl gibt, deren (natürlicher) Logarithmus rational ist. (In Wahrheit gibt es – für den natürlichen (!) Logarithmus – keine solche.)
c) Zeigen Sie, dass $\log_p(q)$ irrational ist.

55. Im „großen Brockhaus - Kompaktausgabe“ findet sich unter dem Stichwort ‘reell’ der Satz: „Jede r[eelle] Zahl besitzt genau eine Darstellung als Dezimalzahl.“ Was sagen Sie dazu?

56. Berechnen Sie ohne Rechner
a) $\sin\pi + \sin\pi$ und $\sin(\pi+\pi)$, b) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$,
c) $\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})$ und $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}$. Welches Ergebnis ist größer?
d) Bestimmen Sie die Werte des Sinus bei $\pi/6, \pi/4, \pi/3$ auf elementargeometrische Weise.

57. Finden Sie verschiedene $a, b \in \mathbb{N}$, derart dass $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ beide irrational sind, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ aber rational ist.

58. Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ irrational ist.

59. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Polynoms $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ mit $a_j \in \mathbb{Z}$. Zeigen sie: Ist $\alpha \notin \mathbb{Z}$, so ist $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

60. Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{mk+l}$, wo $m, l > 0$ sind, für diejenigen x, für welche die Reihe konvergiert.

61. Zeigen Sie a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \infty$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty$, c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k} < \infty$.

62. Zeigen Sie a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$.

63. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$?

64. Geben Sie divergente Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ an, derart dass die Folgen $(a_n+b_n)_n$ und $(a_nb_n)_n$ beide konvergieren.

65. Geben Sie Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ rationaler Zahlen an, für die $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$ gilt.

66. Sei $(a_n)_n$ eine (in $\mathbb{R}$) konvergente Folge reeller Zahlen. Unter welcher notwendigen und hinreichenden Bedingung konvergiert dann auch die Folge $((-1)^n a_n)_n$?

67. $(a_n)_n$ sei eine Nullfolge, $(b_n)_n$ eine beschränkte, aber nicht nowendig konvergente Folge. Was kann man über die Konvergenz der Folge $(a_nb_n)_n$ sagen?

68. $(a_n)_n$ sei eine konvergente, $(b_n)_n$ eine divergente Folge. Was kann man über die Konvergenz der Folge $(a_n + b_n)_n$ sagen?

69. Sei $(a_n)_n$ eine Nullfolge und $(b_n)_n$ eine Folge mit $|b_n| \le |a_n|$ für alle n. Ist dann auch $(b_n)_n$ eine Nullfolge?

70. Sei $0 < \vartheta < 1$ und $(a_n)_n$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $a_{n+1}/a_n \le \vartheta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Ist die Folge $(a_n)_n$ dann eine Nullfolge?

71. Seien $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$. Zeigen Sie: Ist (a_n) eine Folge, in der alle rationalen Zahlen ρ mit $b \le \rho \le c$ vorkommen, so divergiert sie. (Bemerkung: Es gibt solche Folgen.)

72. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (wobei die uneigentlichen Grenzwerte $\infty, -\infty$ zugelassen sind):
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{-n}$. c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}$. d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$.
e) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty} (1-\frac{1}{n})$, d.h. den $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$, wobei die a_n rekursiv durch $a_2 := 1 - \frac{1}{2}$, $a_{n+1} := a_n(1-\frac{1}{n+1})$ definiert sind.

73. Sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $a_n = n^{-1}$ für gerade n und $a_n = -n^{-2}$ für ungerade n. Was gilt für das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Konvergenz, bestimmte Divergenz, keins von beiden?

74. Es sei $a_n := n^{-1}$, wenn n das Quadrat einer ganzen Zahl ≥ 1 ist. Für die anderen ganzen Zahlen ≥ 2 sei $a_n := n^{-2}$.

    a) Ist die Folge $(a_n)_n$ eine monotone Nullfolge? b) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

75. Sei $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge ganzer Zahlen. Konvergiert dann in jedem Fall die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n_k}$?

76. Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n^2}$ konvergent? Wie sieht gegebenenfalls der Limes als Dezimalbruch ('Kommazahl') aus? Ist der Limes rational? (Sie dürfen Ihre Schulkenntnis über die Dezimalzahldarstellung rationaler Zahlen verwenden. Diese ist nämlich von einer bestimmten Stelle an periodisch.)

77. Geben Sie eine *nicht* konvergente Folge (a_n) und eine Zahl a an, die folgende Bedingung erfüllen: „Es gibt ein $\varepsilon > 0$, derart dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt."

78. Geben Sie eine gegen a konvergente Folge (a_n) an, die folgende Bedingung *nicht* erfüllt: „Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, derart dass für alle $\varepsilon > 0$ und $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt."

79. a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Finden Sie $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass $(x^2 - axy + by^2)(x^2 + axy + by^2) = x^4 + 4c^2y^4$ für alle reellen x, y gilt. Welche bemerkenswerte Identität ergibt sich für $c = 1$?

    b) Der Ausdruck $n^4 + 4^n$ wird für $n = 1$ eine Primzahl. Gibt es weitere natürliche Zahlen n, derart dass $n^4 + 4^n$ eine Primzahl ist? (benutzen Sie a).)

80. Berechnen Sie ohne Taschenrechner $\dfrac{8^{8^{1/3}} - (8^8)^{1/3}}{\frac{3}{5} + \frac{5}{13}}$

81. Begründen Sie die sogenannte p, q-Formel für die Lösung einer quadratischen Gleichung.

82. Bestimmen Sie die reellen Nullstellen des Polynoms $x^8 - 25x^6 - (42x^3 - 216)(x-5)(x+5)$.

83. Sie beginnen zu sparen: Am ersten Tag sparen Sie 1 Euro, am zweiten 2 Euro, am dritten 3 usw. Wann haben Sie (mindestens) 1000 Euro gespart?

84. Ein Aufzug bewegt sich mit 4 m/sec aufwärts. Eine kleine Eisenkugel fällt auf das Dach der Aufzugkabine. Und zwar wurde sie in dem Augenblick losgelassen, als das Kabinendach 22,1 m entfernt war. Wie lange dauert es, bis die Kugel aufprallt, und welche Weglänge hat sie zurückgelegt? (Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand. Rechnen Sie mit der Erdbeschleunigung 10 m/sec^2.)

85. Zeigen Sie, dass Gleichungen der Form $x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ genau eine reelle Lösung haben, und geben Sie für diese eine Formel an.

86. Seien $p, q \in \mathbb{R}$. Beschreiben Sie die Menge der $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + pxy + qy^2 = 0$.

87. In der Musik werden zwei Tonintervalle als „gleichgroß" bezeichnet – und auch als gleichgroß empfunden, wenn die beiden Tonfrequenzverhältnisse des jeweils höheren Tones zum jeweils tieferen Ton eines Intervalles gleich sind.
    a) Die Frequenzverhältnisse sind bei einer (reinen) Oktave 2, bei einer reinen Quint $\frac{3}{2}$, bei einer reinen großen Terz $\frac{5}{4}$.

Wenn man von einem Grundton aus 4 reine Quinten auf- und anschließend 2 Oktaven absteigt, ist man dann eine reine große Terz oberhalb des Grundtones gelandet? (Auf dem Klavier mit seiner temperierten Stimmung käme man vom c auf das e; „Syntonisches“ oder „didymisches Komma“)
Könnte man dieses eventuell erreichen, indem man andere Anzahlen von Quinten und Oktaven auf- und absteigt?
b) Die Oktave sei in n ($\in \mathbb{N}_1$) gleichgroße Tonschritte (Intervalle) geteilt. Was ist das Frequenzverhältnis der beiden Töne eines solchen Tonschrittes? (Für $n = 12$ erhält man die 12 Halbtonschritte der temperierten Stimmung.)
c) Gesucht ist ein $n \in \mathbb{N}_1$, so dass für die Unterteilung der Oktave in n gleichgroße Tonschritte folgendes gilt:
Wenn man vom Grundton der Oktave geeignet viele solche Tonschritte aufsteigt, landet man eine reine Quinte oberhalb des Grundtones.
Frage: Gibt es ein solches n ?
d) Wenn man von einem Grundton aus einerseits 6 reine Quinten auf- und anschließend 3 Oktaven absteigt, andererseits 6 reine Quinten ab- und anschließend 4 Oktaven aufsteigt, trifft man dann auf exakt denselben Ton? (Beim ersten Verfahren landet man auf dem *fis*, beim zweiten auf dem *ges*, wenn man jeweils mit dem c beginnt. „Pythagoreisches Komma“)

88. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}^2$ der Menge aller Paare rationaler Zahlen durch die Definitionen $(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b')$ und $(a,b)(a',b') := (aa', bb')$
zwar zu einem Ring, aber nicht zu einem Körper wird.

89. a) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a + b\sqrt{2} = 0$. Zeigen Sie $a = b = 0$. b) Folgern Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ (a,b) \mapsto a + b\sqrt{2}$ injektiv ist (sobald Sie den Begriff ‘injektiv’ kennen).

90. a) Wird durch die Angabe „$f(x)$ sei diejenige reelle Zahl y, für die $y^4 = x$ gilt“ eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert?
b) Was ‘muss’ man in a) ändern, damit eine Abbildung definiert wird? (Mindestens zweierlei!)

91. a) Wird durch die Angabe „$f(x)$ sei diejenige reelle Zahl y, für die $\sin y = x$ gilt“ eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert?
b) Was ‘muss’ man in a) ändern, damit eine Abbildung definiert wird? (Mindestens zweierlei!)

92. Für jede reelle Zahl x sei $f(x)$ die Stelle unmittelbar vor dem Komma in der Dezimalbruchentwixklung von x. Was muss man präzisieren, damit f zu einer Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird?

93. Sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad 3. Für jedes reelle x sei $f(x)$ die kleinste reelle Zahl y mit $p(y) = x$. Beschreibt f eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? (Sie dürfen verwenden, dass jedes Polynom 3. Grades mindestens eine, aber höchstens 3 reelle Nullstellen hat.)

94. Untersuchen Sie die beiden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = x^3 + x,\ f_2(x) = x^3 - x$ auf Injektivität und Surjektivitat.

95. Für jedes $x \in [-1, 1]$ sei $f(x)$ die kleinste (bzw. größte) reelle Zahl $y > 0$ mit $\sin(1/y) = x$. In welchem der beiden Fälle wird eine Abbildung $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ beschrieben?

96. a) Durch f seien jedem $n \in \mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen $m < n$ zugeordnet. Ist das eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$?
b) Durch f sei jedem $n \in \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen $m < n$ zugeordnet. Ist das eine Abbildung $\mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$? (Mit $P(\mathbb{N})$ sei die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, die sogenannte Potenzmenge von $\mathbb{N}$, bezeichnet.)

97. Untersuchen Sie folgende „Abbildungen“ darauf, ob sie wirklich Abbildungen sind, und ob sie gegebenenfalls injektiv oder surjektiv oder beides sind.
a) $f : [0,1[\to [0,1[$ mit $f(x) = x + \frac{1}{2}$ für $x < \frac{1}{2}$ und $f(x) = x - \frac{1}{2}$ für $x \geq \frac{1}{2}$.

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ordne jedem $n \in \mathbb{N}$ diejenigen $m \in \mathbb{N}$ zu, die $\geq 2n$ sind.
c) $f :]-\pi, \pi[\to [-1, 1],\ x \mapsto \cos x$.
c') Ersetzen Sie cos durch sin und π durch $\pi/2$.
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x - e^{-x^3}$.
e) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch „$g(y) = x \iff y = x^3 - x$".
f) $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$. (Anschauliche Begründung reicht.)

98. Seien $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:
a) Sind α und β beide injektiv (bzw. surjektiv), so ist es auch $\beta \circ \alpha$.
b) Ist $\beta \circ \alpha$ injektiv, so ist es auch α.
c) Ist $\beta \circ \alpha$ surjektiv, so ist es auch β.
d) Geben Sie zwei Beispiele, wo $\beta \circ \alpha$ bijektiv ist, aber weder β injektiv noch α surjektiv ist. Wählen Sie im ersten Beispiel für X, Y, Z endliche Mengen und im zweiten $X = Y = Z = \mathbb{N}$.

99. a) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv sind:

$$f_1(x) := \begin{cases} 1 - x & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ x & \text{sonst} \end{cases}, \quad f_2(x) := \begin{cases} x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x^{-1} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

b) Tun Sie dasselbe für die Abbildung $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_3(x) := \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

100. Sei $E \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^3 & \text{falls} \quad x \in E \\ x & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} - E \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität
a) im Falle $E = \mathbb{Q}$, b) im Falle $E = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

101. Sei $P(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ und F die Menge aller unendlichen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0,\ 1\}$. Geben Sie eine bijektive Abbildung $f : P(\mathbb{N}) \to F$ an und zeigen Sie, dass es keine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ gibt.

102. Geben Sie eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ und eine ebensolche Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ an.

103. Beschreiben Sie in einem Venn-Diagramm mit den Mengen A, B, C die Mengen $A \cup (B \cap C)$ und $(A \cup B) \cap C$.

104. Zeigen Sie $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C) = (A \cap C) - B$.

105. Zeigen Sie $(A \cup C) - (B \cup C) = A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

106. (Etwas zum Knobeln.) Sei $n > 0$ ganz. In jeder Zeile einer symmetrischen $n \times n$-Matrix A mögen die Zahlen $1, \ldots, n$ in irgendeiner Reihenfolge stehen. Zeigen Sie:
a) Ist n ungerade, so stehen in der Diagonale von A alle Zahlen $1, \ldots, n$ in irgendeiner Reihenfolge.
b) Ist n gerade, so steht nicht jede der Zahlen $1, \ldots, n$ in der Diagonale.
Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle (vorkommenden) i, j gilt.

107. Machen Sie sich ein (inneres) Bild der Funktion $\sin \frac{1}{x}$ und überlegen Sie sich (zumindest anschaulich), warum

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \quad \text{nicht existiert, aber} \quad \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ist.}$$

108. Konstruieren Sie eine (unendliche) aufsteigende Folge endlicher Mengen $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ mit folgenden Eigenschaften:
1. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{\#\{n \in M_i \mid n \text{ gerade }\}}{\#M_i} = 1.$
Vergleichen Sie diese Aufgabe mit Beipiel 7 des Paragrafen über unendliche Summen!

109. In einem populärwissenschaftlichen Artikel steht – in etwa – folgendes: „Die Wahrscheinlichkeit eines Nachbebens nimmt mit der Zeit exponentiell ab. Unmittelbar nach dem Hauptbeben hat sie ihr Maximum, 10 Tage später beträgt sie nur noch 10 % hiervon, nach 100 Tagen nur noch 1 %, usw.“ Was sagen Sie dazu?

110. Was sagen Sie dazu, wenn jemand meint, die Anzahl der bei einer internationalen Konferenz benötigten Simultandolmetscher hänge exponentiell von der Anzahl der gesprochenen Sprachen ab? (Wieviele Dolmetscher werden benötigt, wenn jeder nur für 2 Sprachen zuständig ist?)

111. Lösen Sie folgende Gleichungen: a) $2^x + 2^{111110} = 2^{111111}$ b) $2^{x^2} = 512^{x+28}$ c) $x^{(x^x)} = (x^x)^x, \ x > 0$

112. Man kann sich auf verschiedene *einfache* Weisen klar machen, dass es irrationale Zahlen α, β gibt, derart dass α^β rational ist:

a) Betrachte $\alpha_0 := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ist α_0 rational, so ist man fertig. Ist hingegen α_0 irrational, so ist es leicht, hierzu ein irrationales β konkret anzugeben, so dass α_0^β rational ist. Finden Sie ein solches β. (Man weiß, dass α_0 irrational ist. Ich kenne allerdings keinen einfachen Beweis hierfür.)

b) Es gibt (genau) eine reelle Zahl β, derart dass $\sqrt{2}^\beta = 3$ ist. (In der Analysis zeigt man dies mit dem sogenannten Zwischenwertsatz.) Zeigen Sie, dass dieses β nicht rational sein kann.

113. Welche Zahl ist größer: a) $999999999^{1000000001}$ oder $1000000001^{999999999}$?

114. Sei (a_n) eine Folge natürlicher Zahlen mit $a_n \leq 1000000$. Was gilt?

☐ Jede der natürlichen Zahlen ≤ 1000000 kommt in der Folge mindestens einmal vor.

☐ Jede der natürlichen Zahlen ≤ 1000000 kommt in der Folge unendlich oft vor.

☐ Mindestens eine der natürlichen Zahlen ≤ 1000000 kommt in der Folge unendlich oft vor.

Ratschläge für das erste Semester

1. Die Mathematik ist zwar für jeden, der sich mit ihr beschäftigt, ein schwierige Sache. (Übrigens auch für mich.) Bedenken Sie aber: Schwierige und interessante Probleme zu lösen und schwierige und interessante Theorien zu verstehen, kann richtig Spaß machen.
Betrachten Sie das Studium der Mathematik als Herausforderung!

2. Freuen Sie sich darüber, dass die Mathematik an der Uni sich deutlich von der an der Schule unterscheidet. Sie wollen doch nicht etwa nur den Schulstoff wiederkäuen?

3. Das erste Semester ist zum Studieren da und nicht zum Eingewöhnen!
Es beginnt mit dem ersten Vorlesungstag!

4. Reden Sie über alle auftauchenden mathematischen Probleme mit ihren Kommiliton(inn)en, den Übungsgruppenleiter(inne)n und den Lehrenden. Bilden Sie kleine Arbeitsgruppen.

5. Bereiten Sie den Vorlesungsstoff regelmäßig nach. Das heißt, lernen Sie den Stoff sofort und nicht erst zu den Prüfungen. Aber Achtung: Wissen ist Silber, Verstehen ist Gold! Es kann auch nicht schaden, sich gelegentlich mit der Problematik, die in den nächsten Vorlesungsstunden behandelt wird, anhand eines Buches oder Skriptes schon im Voraus ein wenig vertraut zu machen.

6. Denken Sie über eine Übungsaufgabe, deren Lösung nicht auf der Hand liegt, geduldig und ausdauernd nach. Genießen Sie das Erlebnis, eine Aufgabe, die zunächst nicht angreifbar erschien, schließlich doch gelöst zu haben!

7. Versehen Sie Ihre Lösungen der Übungsaufgaben ausreichend mit Text. Schreiben Sie im Zweifel lieber zuviel als zuwenig Text! Drücken Sie sich möglichst klar aus.

8. Jede Mühe, die Sie sich geben, bei den Übungsaufgaben das Rechnen durch Denken zu ersetzen, zahlt sich im Laufe Ihres Studiums vielfach aus!

9. Wenn Sie einmal zur Lösung einer Übungsaufgabe in Ihrer Arbeitsgruppe nichts haben beitragen können, so sollten Sie die Lösung doch zumindest verstehen.

10. Ziehen Sie am Ende des ersten, und erst recht am Ende des zweiten Semesters eine ehrliche Bilanz!
    Wenn Sie das Studienfach nach einem halben oder ganzen Jahr wechseln oder auch die Uni verlassen, so haben Sie eine wichtige Erfahrung gemacht. Wenn Sie sich hingegen mehrere Jahre mit einem Fach herumquälen, das Ihnen nicht liegt, und Sie am Ende möglicherweise nicht einmal einen Abschluss schaffen, ist das wirklich schlimm.

11. Die Semesterferien sind sicher auch zur Erholung da, aber nicht nur! Was Sie im ersten Semester gelernt haben, brauchen Sie im zweiten. Usw.