HOMOTOPIEINVARIANZ VON VEKTORBÜNDELN MITTELS FLÜSSEN

JOHANNES EBERT

Hier wird ein kurzer Beweis des folgenden Satzes, beruhend auf der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf glatten Mannigfaltigkeiten, gegeben.

Satz 1. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $V \to \mathbb{R} \times M$ ein glattes Vektorbündel. Sei $V_t := V|_{\{t\}\times M}$. Dann existiert ein Vektorbündelisomorphismus $\mathbb{R}\times V_0 \cong V$ von Vektorbündeln auf $\mathbb{R}\times M$.*

Der Satz hat ein wichtiges Korollar:

Korollar 1. *Ist $V \to N$ ein glattes Vektorbündel und sind die glatten Abbildungen $f_0, f_1 : M \to N$ glatt homotop, so sind die Vektorbündel f_0^*V und f_1^*V isomorph.*

Beweis. Wähle eine Homotopie $f : \mathbb{R}\times M \to N$ und wende den Satz auf das Bündel $f^*V \to \mathbb{R}\times M$ an. □

Die Wichtigkeit des Korollars wird sich erst nach und nach erweisen; für den Anfang sei gesagt, dass die Homotopieinvarianz es erlaubt, Vektorbündel mit den Methoden der algebraischen Topologie zu studieren. Das Korollar steht am Anfang von Theorien wie den "charakteristischen Klassen" und der "topologischen K-Theorie".

Satz und Korollar sind auch für topologische Vektorbündel auf allgemeinen topologischen Räumen X gültig und auch für sehr viel allgemeinere "Faserbündel". Allerdings ist die einschränkende Voraussetzung zu erfüllen, dass jede offene Überdeckung von X eine untergeordnete Teilung der Eins besitzt ("X is parakompakt"). Kompakte Hausdorffräume und metrische Räume sind parakompakt. Im Beweis von Satz 1 werden Teilungen der Eins ebenfalls eine wichtige Rolle spielen. Einen Beweis des allgemeinen Satzes findet man in [4]. Der hier wiedergegebene Beweis ist in der Literatur nur schwer zu finden, ich habe nur in dem recht alten, umfangreichen und daher schwer zugänglichem Opus [3], Volume II, ch VII.7.18, Theorem I, ein ähnliches Argument gefunden, das hier elementarer aufgearbeitet ist.

Für den Beweis betrachten wir ein glattes Vektorbündel $\pi : V \to N$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit sowie ein Vektorfeld X auf N (später wird $N = M \times \mathbb{R}$ sein und X das Vektorfeld $\partial/\partial t$). Der Beweis beginnt mit einer allgemeinen Konstruktion, ein Vektorfeld $\tilde{X}$ auf V zu konstruieren.

Lemma 1. *Unter den gemachten Voraussetzungen existiert ein Vektorfeld $\tilde{X}$ auf dem Totalraum von V mit folgenden Eigenschaften:*

- *Für alle $v \in V$ gilt: $(T_v\pi)(\tilde{X}(v)) = X(\pi(v))$.*
- *Sei, für $a \in \mathbb{R}$, $h_a : V \to V$ die Abbildung $h_a(v) := av$. Dann gilt $\tilde{X}(av) := (T_v h_a)(\tilde{X}(v))$.*

Wir nennen $\tilde{X}$ auch den "horizontalen Lift" von X. Die erste Eigenschaft drückt den Zusammenhang zwischen X und $\tilde{X}$ aus. Die zweite Eigenschaft ist eine Linearitätsaussage; schließlich wollen wir V nicht nur als beliebige Mannigfaltigkeit betrachten, sondern als Vektorbündel mit der dazugehörigen linearen Struktur (mehr dazu später).

Beweis von Lemma 1. Falls V trivial ist; $V = N \times \mathbb{R}^n$, geht der Beweis ganz flott: es gibt dann nämlich eine kanonische Identifizierung $T_{(x,v)}(M\times\mathbb{R}^n) = (T_xM)\times\mathbb{R}^n$, man setzt einfach $\tilde{X}(x, v) := (X(x), 0)$ und rechnet die gewünschten Eigenschaften schnell nach.

Der allgemeine Fall lässt sich auf diesen Fall mittels zweier einfacher, aber wichtiger, Argumente reduzieren: "Konvexität" und Benutzung einer Teilung der Eins. Sind $\tilde{X}_0$ und $\tilde{X}_1$ zwei solcher horizontaler Lifts und $\mu : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist auch $(\mu\circ\pi)\tilde{X}_0+(1-\mu\circ\pi)\tilde{X}_1$ ein horizontaler Lift. Dies ist unschwer nachzurechnen, hat aber folgende wichtige Konsequenz: man wähle $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung, $h_i : V|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}$ eine Bündelkarte und $(\mu_i)_{i\in I}$ ein untergeordnete Teilung der Eins. Der erste Schritt des Beweises versorgt uns mit horizontalen Lifts $\tilde{X}_i$ über U_i, und wir setzen $\tilde{X} := \sum_{i\in I}(\mu_i \circ \pi)\tilde{X}_i$, was nach dem Konvexitätsargument wieder ein horizontaler Lift ist. $\square$

Es sei noch angemerkt, dass das konstruierte $\tilde{X}$ noch von der Wahl des Bündelatlas und der Teilung der Eins abhängt. Identitäten wie $\widetilde{X+Y} = \tilde{X} + \tilde{Y}$ sind natürlich nur richtig, wenn beide Male dieselben Daten verwendet werden. Aber das ist hier nicht so wichtig. Begrifflich eleganter kann man das durch den Begriff des "Zusammenhanges" auf einem Vektorbündel formulieren, hier behelfe ich mir mit einer ad-hoc-Konstruktion, die für den Zweck ausreicht. Eine anschauliche Erklärung dieser Begriffe findet man in [5], ch. 12, nur ohne Anwendung auf die Homotopieinvarianz.

Wir wollen nun den Fluss von $\tilde{X}$ studieren und mit dessen Hilfe Satz 1 zeigen. Wie sieht das eben konstruierte Vektorfeld in lokalen Koordinaten aus?

Lemma 2. *Seien V, π, N, X wie gehabt und $\tilde{X}$ wie in Lemma 1 gefordert. In einer lokalen Trivialisierung $V|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ hat $\tilde{X}$ die folgende Form: $\tilde{X}(x,v) = (X(x), A(x)v)$, wo $A : U \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine glatte Abbildung ist.*

Man könnte jetzt einwenden, dass das Lemma eine Tautologie ist, denn schließlich ist $\tilde{X}$ so konstruiert worden (mit $A = 0$). Aber die Wahl der verschiedenen Karten und die Teilung der Eins haben gerade diese Struktur zerstört.

Beweis. Aufgrund der ersten Eigenschaft in Lemma 1 können wir auf jeden Fall $\tilde{X}(x,v) = (X(v), Y(x,v)) \in (T_xM) \times \mathbb{R}^n$ (hier wird dieselbe Identifikation wie im Beweis von Lemma 1 genutzt) schreiben, wo $Y : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion ist. Für festes x ist die Funktion $L_x : v \mapsto Y(x,v)$ glatt und *homogen vom Grade* 1, d.h. $L_x(av) = aL_x(v)$ für $a \in \mathbb{R}$. Auf den ersten Blick ist es etwas überraschend, dass L_x dann automatisch *linear* ist. Der Beweis ist aber einfach: ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ homogen vom Grad 1, so gilt also für $gt \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $F(tx) = tF(x)$. Ableiten nach t zeigt $(T_{tx}F)x = F(x)$ und für $t = 0$ folgt die Behauptung. Damit ist L_x linear, und alle Behauptungen bewiesen. $\square$

Wie verhalten sich jetzt die Flüsse von $\tilde{X}$ und X zueinander? Wir rechnen in Koordinaten in Lemma 2. Sei $(\alpha, \beta) : I \to U \times \mathbb{R}^n$ eine Integralkurve von $\tilde{X}$. Dann gilt zunächst: $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$, mit anderen Worten: α ist eine Integralkurve von X. Also folgt, wie die Bezeichnung "Lift" schon andeutete:

- Ist Φ ein Fluss für X und $\tilde{\Phi}$ einer für $\tilde{X}$, so gilt $\pi(\tilde{\Phi}(t,v)) = \phi(t, \pi(v))$ (für alle t, v...).

Interessanter ist die zweite Komponente. Aus der Differentialgleichung und Lemma 2 folgt jedenfalls:

$$\dot{\beta}(t) = A(\alpha(t))\beta(t). \tag{1}$$

Indem man $C(t) := A(\alpha(t))$ setzt, erhält man eine Funktion $I \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ und die Gleichung hat nun die Form

$$\dot{\beta}(t) = C(t)\beta(t) \tag{2}$$

angenommen; d.h. es ist eine *lineare* Differentialgleichung mit zeitabhängigen Koeffizienten. Die Lösungstheorie dieser Gleichung ist sehr viel übersichtlicher (vgl. [1], S. 38):

Satz 2. *Ist $t_0 \in I$ ein offenes Intervall und $C : I \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine glatte Funktion, so existiert genau eine glatte Funktion $A : I \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass die eindeutige Lösung der Gleichung 2 mit dem Startwert $\beta(t_0) = \beta_0$ durch $\beta(t) = A(t)\beta_0$ gegeben ist.*

Insbesondere ist die Lösung von 2 auf ganz I definiert. Zusammen mit der obigen Beobachtung über den Zusammenhang von Φ und $\tilde{\Phi}$ schließen wir also: Haben wir eine Flusslinie von X gefunden, so finden wir eine von $\tilde{X}$, denn man muss nur das Definitionsintervall unterteilen und auf jedem Teilstück die durch den Satz garantierte Lösung nehmen. Mit anderen Worten:

- Ist X vollständig (d.h. besitzt es einen globalen Fluss), so ist auch $\tilde{X}$ vollständig.

Nehmen wir jetzt an, dass X vollständig ist und ist $\Phi : \mathbb{R} \times N \to N$ der globale Fluss, so gibt es einen Fluss $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times V \to V$, so dass gilt: $\pi(\tilde{\Phi}(t, v)) = \Phi(t, \pi(v))$. Außerdem gilt auch noch: Die Abbildung $\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(\Phi(t, x))$, welche durch $\tilde{\Phi}_t$ gegeben ist, ist ein linearer Isomorphismus.

Beweis von Satz 1. Die Arbeit ist nun im Wesentlichen getan. Es sei X das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial t}$ auf $\mathbb{R} \times M$. Der zugehörige Fluss ist $\Phi(t, s, x) = (s + t, x)$; insbesondere ist X vollständig. Wir wählen einen horizontalen Lift $\tilde{X}$ und betrachten den zugehörigen Fluss $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times V \to V$. Die Einschränkung $\varphi : \tilde{\Phi}|_{V_0} : \mathbb{R} \times V_0 \to V$ ein nun eine differenzierbare Abbildung, passt in ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times V_0 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times \pi"'] & & V \arrow[dl, "\pi"] \\
& \mathbb{R} \times M &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

und bildet Fasern isomorph auf Fasern ab und ist daher ein Vektorbündelisomorphismus (man muss nachrechnen, dass das Inverse wieder differenzierbar ist, was sich auf die Differenzierbarkeit der Inversion $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ herunterkocht). □

Literatur

[1] Bröcker: *Analysis III*, 1. Auflage, 1992.
[2] Bröcker, Jänich: *Einführung in die Differentialtopologie*
[3] Greub, Halperin, Vanstone: *Connections, curvature and cohomology, Volume II*
[4] tom Dieck: *Topologie*, 2. Auflage.
[5] J. M. Lee: *Manifolds and Differential Geometry.*

Mathematisches Institut, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster
E-mail address: `johannes.ebert@uni-muenster.de`