

# ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG KOBORDISMEN-THEORIE

JOHANNES EBERT

17. OKTOBER

## Präsenzaufgaben.

**Aufgabe 0.1.** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung und  $L \subset N$  eine Untermannigfaltigkeit. Nimm an dass  $f \pitchfork L$ . Zeige, dass  $f^{-1}(L) \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit ist.

**Aufgabe 0.2.** Sei  $M$  eine 1-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeige, dass  $M$  diffeomorph zu einer disjunkten Vereinigung von Kopien von  $\mathbb{S}^1$  und  $[0, 1]$  ist. Tip: Nimm zunächst an, dass  $M$  ohne Rand, zusammenhängend und orientiert ist. Benutze, dass  $TM$  dann trivial ist, um ein geeignetes Vektorfeld zu produzieren, dessen Fluss einen Diffeomorphismus  $\mathbb{S}^1 \rightarrow M$  liefern wird.

**Aufgabe 0.3.** Sei  $M^m$  eine kompakte Mannigfaltigkeit und  $f_i : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$   $i = 0, 1$ , Einbettungen. Zeige, dass, falls  $n \geq 2m + 2$  gilt,  $f_0$  und  $f_1$  isotop sind. Sei allgemeiner  $K^k$  eine Mannigfaltigkeit und  $L \subset K$  abgeschlossen. Sei  $F : K \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine glatte Abbildung, so dass für alle  $x \in L$  die Abbildung  $F_x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y \mapsto F(x, y)$  eine Einbettung ist. Sei  $n \geq 2m + 1 + k$ . Man zeige, dass  $G : K \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$  existiert mit  $G|_{L \times M} = F|_{L \times M}$ , so dass  $G_x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y \mapsto G(x, y)$  eine Einbettung ist.

## Hausaufgaben.

**Aufgabe 0.4.** Sei  $r \leq n \leq m$  und sei  $M_r \subset \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  die Menge aller Matrizen mit Rang  $r$ . Zeige, dass  $M_r$  eine  $r(m + n - r)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Tip: nutze die transitive Gruppenwirkung  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \times \text{GL}_m(\mathbb{R})$ .

**Aufgabe 0.5.** Seien  $X, Y, Z$  Mannigfaltigkeiten,  $j : X \rightarrow Y \times Z$  eine Einbettung und  $\text{pr} : Y \times Z \rightarrow Z$  die Projektion. Sei darüber hinaus  $z \in Z$  und  $s_z : Y \rightarrow Y \times Z$  die Abbildung  $y \mapsto (y, z)$ . Zeige, dass  $s_z$  genau dann transvers zu  $j$  ist, wenn  $z$  ein regulärer Wert von  $\text{pr} \circ j$  ist.

24. OKTOBER

**Präsenzaufgaben.**

**Aufgabe 0.6.** (Der Bordismusring) Man gehe die Details des Beweises durch, dass die unorientierten Bordismusgruppen  $\mathcal{N}_*$  und die orientierten Bordismusgruppen  $\Omega_*$  tatsächlich abelsche Gruppen sind. Man zeige, dass  $\mathcal{N}_0 = \mathbb{Z}/2$ , dass  $\mathcal{N}_k$  eine 2-Torsionsgruppe ist,  $\Omega_0 = \mathbb{Z}$ . Was ist  $\mathcal{N}_1, \Omega_1$ ? Ferner zeige man, dass das kartesische Produkt  $\mathcal{N}_*$  zu einem kommutativen Ring und  $\Omega_*$  zu einem graduiert-kommutativen Ring macht.

**Aufgabe 0.7.** (Der Tangentialhalbraum) Es sei  $W$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $M$ . Man definiere die "Halbraumbündel" in  $TW|_M$  der nach innen bzw. außen zeigenden Tangentialvektoren in sinnvoller Art und Weise. Ferner zeige man, dass diese Halbraumbündel nirgends verschwindende Schnitte besitzen und dass der Raum der nirgends verschwindenden Schnitte konvex und damit zusammenziehbar ist. Dies definiert den Begriff des Normalvektorfeldes eindeutig bis auf Homotopie.

**Hausaufgaben.**

**Aufgabe 0.8.** (Zum Orientierungsbegriff) Es sei  $V \rightarrow X$  ein Vektorbündel. Wir definieren die Orientierungsüberlagerung  $\text{Or}(V) \rightarrow X$  als Menge aller Paare  $(x, \omega)$ , wo  $x \in M$  und  $\omega_x$  eine Orientierung von  $V_x$ . Man führe eine Topologie auf  $\text{Or}(V)$  ein, so dass die Abbildung  $\text{Or}(V) \rightarrow X, (x, \omega) \mapsto x$  eine 2-blättrige Überlagerung ist. Man zeige, dass eine Orientierung von  $V$  und ein Schnitt in  $\text{Or}(V) \rightarrow X$  "dasselbe" ist, wobei das Wort "dasselbe" geeignet zu interpretieren ist. Ist  $M$  eine Mannigfaltigkeit, so setzen wir  $\text{Or}(M) := \text{Or}(TM)$ .

- (1) Interpretiere und beweise: Die Mannigfaltigkeit  $\text{Or}(M)$  ist "in kanonischer Weise" orientiert.
- (2) Ist  $f : N \rightarrow M$  ein lokaler Diffeomorphismus (d.h., eine glatte Abbildung, deren Differential  $T_x f$  für jedes  $x \in N$  ein linearer Isomorphismus ist), so gibt es genau einen Lift  $\tilde{f} : \text{Or}(N) \rightarrow \text{Or}(M)$ , welcher orientierungserhaltend ist.
- (3) Die Zuordnung  $M \mapsto \text{Or}(M)$  definiert einen Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit lokalen Diffeomorphismen in die Kategorie der orientierten Mannigfaltigkeiten und orientierungserhaltender lokaler Diffeomorphismen.

Dies bedeutet, dass die Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit eine wirklich kanonische Konstruktion ist, im Gegensatz beispielsweise zur universellen Überlagerung. Man vergegenwärtige sich diesen Punkt am Beispiel der reell-projektiven Räume  $\mathbb{R}P^n$ , welche bekanntlich genau dann orientierbar sind, wenn  $n$  ungerade ist. Die Gruppe  $\mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{R})$  operiert auf  $\mathbb{R}P^n$  und man zeige, dass diese Operation genau dann zu einer Wirkung auf  $\mathbb{S}^n$  geliftet werden kann, wenn  $n$  gerade ist.

31. OKTOBER

**Präsenzaufgaben.**

**Aufgabe 0.9.** Es sei  $M$  eine geschlossene, orientierte  $n$ -dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit und  $V \rightarrow M$  ein orientiertes Vektorbündel mit Eulerzahl 0. Man beweise, dass ein Schnitt von  $V$  ohne Nullstellen existiert.

**Aufgabe 0.10.** Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $N$  und  $V \rightarrow M$  sei ein Vektorbündel. Ferner sei  $s : N \rightarrow V$  ein Schnitt ohne Nullstellen. Wir definieren die relative Eulerzahl  $\text{Eul}(V; s)$  wie folgt: man setze  $s$  zu einem auf ganz  $M$  definierten Schnitt  $t$  von  $V$  fort, welcher transvers zum Nullschnitt ist und nehme die Schnittzahl von  $t$ . Dies hängt nicht von der Wahl von  $t$  ab. Nun nehme man an, dass  $s_0, s_1$  zwei nullstellenfreie Schnitte auf dem Rand sind, welche homotop sind (als nullstellenfreie Schnitte) und zeige  $\text{Eul}(V; s_0) = \text{Eul}(V; s_1)$ . Insbesondere kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $|s(x)| \equiv 1$  gilt, dass also  $s$  ein Schnitt des Sphärenbündels  $SV \rightarrow N$  ist. Zeige dann, dass die Differenz  $\text{Eul}(V; s_1) - \text{Eul}(V; s_0)$  nur von den Daten  $N, V|_N$  und  $s_i$  abhängt (und nicht von  $M$ ). Hinweis: man führe das Problem auf den Zylinder  $[0, 1] \times N$  zurück. Sind  $s_0, s_1$  zwei Schnitte in  $SV \rightarrow N$ , so kann man den Schnittindex  $\sharp(s_0, s_1) \in \Omega_0$  definieren. Man zeige, dass  $\text{Eul}(V; s_1) - \text{Eul}(V; s_0) := \pm \sharp(s_0, s_1)$  gilt.

7. NOVEMBER

**Aufgabe 0.11.** Für einen topologischen Raum  $X$  sei  $\text{Cov}(X)$  die Kategorie der Überlagerungen (Objekte sind Überlagerungen, Morphismen sind fasertreue Abbildungen). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine 1-Äquivalenz, worunter eine Abbildung verstanden sei, die eine Bijektion  $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  und für alle  $x \in X$  einen Isomorphismus  $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y; f(x))$  induziert. Zeige, dass  $f$  eine Äquivalenz von Kategorien  $\text{Cov}(Y) \rightarrow \text{Cov}(X)$  induziert und dass für jede Überlagerung  $Z \rightarrow Y$  gilt: die Menge der Schnitte von  $Z \rightarrow Y$  ist in Bijektion mit der Menge der Schnitte von  $f^*Z \rightarrow X$ .

**Aufgabe 0.12.** Man wiederhole den Begriff eines  $G$ -Prinzipalbündels  $P \rightarrow X$  wobei  $G$  eine topologische Gruppe ist. Konstruiere zu jedem Vektorbündel  $V \rightarrow X$  ein  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ -Prinzipalbündel  $\text{Fr}(V) \rightarrow X$ , so dass  $\text{Fr}(V) \times_{\text{GL}_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \cong V$  ist. Formuliere die Begriffe eines orientierten Vektorbündels und eines Vektorbündels mit Metrik in der Sprache der Prinzipalbündel.

**Aufgabe 0.13.** Sei  $A$  eine lokal-kompakte topologische Gruppe. Was ist ein  $A$ -Gruppenbündel? Zeige, dass ein  $A$ -Gruppenbündel "dasselbe" ist wie ein  $\text{Aut}(A)$ -Prinzipalbündel.

14. NOVEMBER

**Aufgabe 0.14.** Es seien  $E$  und  $X$  Mannigfaltigkeiten, wobei  $X$  der Einfachheit als zusammenhängend vorausgesetzt ist. Ferner ist  $f : E \rightarrow X$  eine glatte *eigentliche Submersion*. Zeige, dass  $f : E \rightarrow X$  ein Faserbündel mit Strukturgruppe  $\text{Diff}(M)$  und Faser  $M$  ist ( $M$  ist das Urbild eines beliebigen Punktes in  $X$ ).

**Aufgabe 0.15.** Es sei  $P \rightarrow X$  ein  $G$ -Prinzipalbündel und  $U \subset X$  offen. Man zeige, dass die drei folgenden Daten äquivalent sind:

- (1) Schnitte von  $P|_U \rightarrow U$ .
- (2)  $G$ -äquivariante Abbildungen  $P|_U \rightarrow G$ .
- (3) Trivialisierungen von  $P$  über  $U$ .

21. NOVEMBER

Wir nehmen für alle im folgenden auftretenden topologischen Gruppen  $G$  an, dass ein  $G$ -Hauptfaserbündel  $EG \rightarrow BG$  existiert, so dass  $EG$  schwach zusammenziehbar ist,  $BG$  den Homotopietyp eines  $CW$ -Komplexes hat und parakompakt ist.

**Aufgabe 0.16.** Sei  $\phi : G \rightarrow H$  ein (stetiger) Homomorphismus. Zeige, dass  $\phi$  eine Abbildung  $B\phi : BG \rightarrow BH$  induziert, welche eindeutig bis auf Homotopie ist, so dass  $B(\phi \circ \psi) \sim B\phi \circ B\psi$  und  $B\text{id} = \text{id}$ . Sind die Homomorphismen  $\phi_0$  und  $\phi_1$  homotop, wobei verlangt wird, dass alle Abbildungen  $\phi_t$  in einer Homotopie wieder Homomorphismen sind, so sind  $B\phi_0$  und  $B\phi_1$  homotop.

**Aufgabe 0.17.** Zeige, dass  $\pi_{n+1}(BG) \cong \pi_n(G)$  für alle  $n$  gilt. Folgere, dass ein Homomorphismus  $\phi : G \rightarrow H$ , welcher eine schwache Homotopieäquivalenz ist, eine schwache Homotopieäquivalenz  $B\phi : BG \rightarrow BH$  induziert.

**Aufgabe 0.18.** Ist  $g \in G$  und  $c_g : G \rightarrow G$  Konjugation mit  $g$ , so ist  $Bc_g$  homotop zur Identität.

**Aufgabe 0.19.**  $B(G \times H) \simeq BG \times BH$ . Ist  $H \subset G$  eine Untergruppe, so dass  $G \rightarrow G/H$  ein  $H$ -Prinzipalbündel ist (das geschieht beispielsweise, wenn  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe der Liegruppe  $G$  ist), so ist  $EG \times_G G/H \simeq BH$ .

28. NOVEMBER

**Aufgabe 0.20.** Es sei  $V \rightarrow X$  ein orientiertes Vektorbündel. Aus der langen exakten Sequenz des Paares  $(V, V_0)$  erhält man, indem man  $H^*(V; V_0)$  durch  $H^{*-n}(X)$  ersetzt (Thom-Isomorphismus),  $V_0$  durch das Sphärenbündel  $S \subset V$  und  $V$  durch  $X$ , die *Gysin-Sequenz*. Man schreibe die Gysin-Sequenz auf.

Man berechne mit Hilfe der Gysin-Sequenz die Kohomologieringe  $H^*(\mathbb{K}\mathbb{P}^n; \mathbb{F})$ , wobei  $(\mathbb{K}, \mathbb{F}) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$  oder  $(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$ . Ferner betrachte man für  $p \in \mathbb{N}$  die Wirkung von  $\mathbb{Z}/p$  auf der Sphäre  $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  durch Multiplikation mit  $e^{2\pi i/p}$ . Man berechne die Kohomologie der Linsenräume, d.h. der Quotienten  $\mathbb{S}^{2n+1}/(\mathbb{Z}/p)$ .

**Aufgabe 0.21.** Zeige, dass  $\mathbb{S}^n \star \mathbb{S}^m \cong \mathbb{S}^{m+n+1}$  gilt und folgere, dass der Join von  $k$  Kopien von  $\mathbb{S}^1$  gleich  $\mathbb{S}^{2k-1}$  ist. Man zeige, die Milnor-Konstruktion in diesem Fall das Hopf-Bündel ergibt.

**Aufgabe 0.22.** Es sei  $H \subset G$  eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe. Man zeige, dass  $T(G/H) \cong G \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  gilt. Wie bereits gesehen, kann man  $BH \rightarrow BG$  als das  $G/H$ -Bündel  $EG \times_G (G/H) \rightarrow BG$  realisieren. Da die Strukturgruppe auf der Mannigfaltigkeit  $G/H$  durch Diffeomorphismen operiert, können wir das vertikale Tangentialbündel  $T_v(EG \times_G (G/H))$  bilden. Man zeige, dass dies isomorph zu  $EG \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  ist.

## 5. DEZEMBER

**Aufgabe 0.23.** Sei  $s$  ein Schnitt des Bündels  $L^{\otimes d} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ,  $s \not\equiv 0$ . Man berechne die Eulerzahl von  $V := s^{-1}(0)$ . Tip:

- (1) da  $TV$  ein komplexes Vektorbündel ist, ist die Eulerklasse gleich der höchsten Chernklasse;
- (2) Was ist das Normalenbündel von  $V$ ?
- (3)  $c(T\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$
- (4) Poincaré-Dualität.

**Aufgabe 0.24.** Es sei  $F$  eine charakteristische Klasse mit Werten in  $H^{**}(X; R) := \prod_{k \geq 0} H^k(X; R)$ , die für beliebige orientierte Vektorbündel definiert ist. Es gelte  $F(\bar{X} \times \mathbb{R}) = 1$  und  $F(V \oplus W) = F(V)F(W)$ . Man zeige, dass  $[M] \mapsto F([M]) := \langle F(TM); [M] \rangle$  einen Ringhomomorphismus  $\Omega_* \rightarrow R$  definiert.



## 12. DEZEMBER

**Aufgabe 0.25.** Man benutze die Pontrjagin-Thom-Konstruktion, um die Gruppen  $\pi_{n+1}(\mathbb{S}^n)$  zu berechnen (behandle die Fälle  $n = 1$ ,  $n = 2$  und  $n \geq 3$  separat).

**Aufgabe 0.26.** Es sei  $f : M^m \rightarrow N^n$  eine Abbildung glatter orientierter geschlossener Mannigfaltigkeiten. Man bette  $M^m$  ein in  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion ist nun eine Abbildung  $\Sigma^{m+k} N_+ \rightarrow \text{Th}(\nu_M^{N \times \mathbb{R}^{n+k}})$ . Zusammen mit dem Thom-Isomorphismus erhält man eine Abbildung  $f_! : H^r(M) \rightarrow H^{r+n-m}(N)$ . Man zeige, dass  $f_!$  Poincaré-dual zur gewöhnlichen Abbildung  $f_* : H_*(M) \rightarrow H_*(N)$  ist. Ist  $f$  eine Überlagerung, so ist  $f_!$  der Transfer. Ist  $f$  das Sphärenbündel eines orientierten Vektorbündels, so ist  $f_!$  die Abbildung in der Gysin-Sequenz mit demselben Namen.

**Aufgabe 0.27.** Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$  geschlossen und orientiert und  $\mathbb{S}^{n+m} \rightarrow \text{Th}(\nu_M)$  die zugehörige Pontrjagin-Thom-Abbildung. Die Inklusion  $\nu_M \rightarrow M \times \mathbb{R}^{m+n}$  induziert eine Abbildung  $\text{Th}(\nu_M) \rightarrow \Sigma^{m+n} M_+ \rightarrow \mathbb{S}^{m+n}$ . Man zeige, dass der Grad der Komposition gleich der Eulerzahl des Vektorbündels  $TM$  ist und finde einen neuen Beweis der Gleichung  $\text{Eul}(TM) = \langle e(TM); [M] \rangle$ .

## 9. JANUAR

**Aufgabe 0.28.** Es sei  $f : M^m \rightarrow N^n$  eine Abbildung glatter orientierter geschlossener Mannigfaltigkeiten. Man bette  $M^m$  ein in  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion ist nun eine Abbildung  $\Sigma^{m+k} N_+ \rightarrow \text{Th}(\nu_M^{N \times \mathbb{R}^{n+k}})$ . Zusammen mit dem Thom-Isomorphismus erhält man eine Abbildung  $f_! : H^r(M) \rightarrow H^{r+n-m}(N)$ . Man zeige, dass  $f_!$  Poincaré-dual zur gewöhnlichen Abbildung  $f_* : H_*(M) \rightarrow H_*(N)$  ist. Ist  $f$  eine Überlagerung, so ist  $f_!$  der Transfer. Ist  $f$  das Sphärenbündel eines orientierten Vektorbündels, so ist  $f_!$  die Abbildung in der Gysin-Sequenz mit demselben Namen.

**Aufgabe 0.29.** Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$  geschlossen und orientiert und  $\mathbb{S}^{n+m} \rightarrow \text{Th}(\nu_M)$  die zugehörige Pontrjagin-Thom-Abbildung. Die Inklusion  $\nu_M \rightarrow M \times \mathbb{R}^{m+n}$  induziert eine Abbildung  $\text{Th}(\nu_M) \rightarrow \Sigma^{m+n} M_+ \rightarrow \mathbb{S}^{m+n}$ . Man zeige, dass der Grad der Komposition gleich der Eulerzahl des Vektorbündels  $TM$  ist und finde einen neuen Beweis der Gleichung  $\text{Eul}(TM) = \langle e(TM); [M] \rangle$ .

16. JANUAR

Es soll die rationale Kohomologie von  $\Omega_0^\infty \mathbf{Th}(V)$  für ein Thom-Spektrum berechnet werden. Zunächst das Resultat. Sei  $X$  ein Raum und  $V$  ein stabiles orientiertes Vektorbündel vom Rang  $d$ . Für ein  $x \in H^i(X; \mathbb{Q})$  sei  $\sigma(x) \in H^{i+d}(\Omega^\infty \mathbf{Th}(V); \mathbb{Q})$  wie folgt definiert. Für gegebenes  $n$  sei  $\text{th}(x)_n \in H^{i+d+n}(\text{Th}(V_n); \mathbb{Q})$  und über die Transgression erhalten wir  $\text{trg}^n \text{th}(x)_n \in H^{i+d}(\Omega^n \text{Th}(V_n); \mathbb{Q})$ . Für verschiedene Werte von  $n$  passen diese Elemente zusammen und definieren  $\sigma(x) \in H^{d+i}(\Omega^\infty \mathbf{Th}(V); \mathbb{Q})$ . Für einen  $\mathbb{Z}$ -graduierten Vektorraum  $V$  sei  $\Sigma^d V$  der graduierte Vektorraum mit  $(\Sigma^d V)_n = 0$  für  $n \leq 0$  und  $(\Sigma^d V)_n := V_{n-d}$  für  $n > 0$ . Die Konstruktion liefert einen Vektorraumhomomorphismus

$$\Sigma^d H^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\Omega_0^\infty \mathbf{Th}(V); \mathbb{Q})$$

und durch die universelle Eigenschaft einen Homomorphismus von Algebren

$$(1) \quad \Lambda \Sigma^d H^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\Omega_0^\infty \mathbf{Th}(V); \mathbb{Q})$$

von der freien graduiert kommutativen  $\mathbb{Q}$ -Algebra. Behauptung: 1 ist ein Isomorphismus.

Wir arbeiten unter folgenden Voraussetzungen, welche beispielsweise für  $MTSO(n)$  erfüllt ist.

- (1)  $X_n$  ist ein endlicher CW-Komplex;
- (2)  $X_n \rightarrow X_{n+1}$  ist eine CW-Inklusion und  $\approx n$ -zusammenhängend (soll heißen: es gibt  $c \in \mathbb{Z}$ , so dass für alle  $n$  die Abbildung  $n+c$ -zusammenhängend ist).

**Schritt 1.** Sei  $H$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum und  $x \in H^i(X, H)$ . Zeige, dass Abbildungen  $\xi_n : \text{Th}(V_n) \rightarrow K(H, n + d + i)$  existieren, so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \text{Th}(V_n) & \longrightarrow & \text{Th}(V_{n+1}) \\ \downarrow \Sigma \xi_n & & \downarrow \xi_{n+1} \\ \Sigma K(H, d + n + i) & \longrightarrow & K(H, d + n + i + 1) \end{array}$$

strikt kommutieren, wo die horizontalen Abbildungen die Strukturabbildungen der Spektren sind. Hinweis: ein homotopiekommutatives Diagramm ist leicht herzustellen und benutze die Homotopieerweiterungseigenschaft für die Kofaserung  $\Sigma \text{Th}(V_n) \rightarrow \text{Th}(V_{n+1})$ .

**Schritt 2.** Die Abbildung  $\Omega^n \text{Th}(V_n) \rightarrow \Omega^{n+1} \text{Th}(V_{n+1})$  ist  $\approx n$ -zusammenhängend. Hinweis: dies ist  $\Omega^n$  der Komposition

$$\text{Th}(V_n) \rightarrow \Omega \Sigma \text{Th}(V_n) \rightarrow \Omega \text{Th}(V_{n+1}).$$

Da  $\text{Th}(V_n)$   $n+d-1$ -zusammenhängend ist, ist die erste Abbildung nach Freudenthal  $\approx 2n$ -zusammenhängend. Die zweite Abbildung ist nach der Generalvoraussetzung, dem Thom-Isomorphismus und dem Satz von Hurewicz ebenfalls  $\approx 2n$ -zusammenhängend.

**Schritt 3.** Die Identität  $H_i(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Q})$  definiert eine tautologische Kohomologieklass  $x_i \in H^i(X; H_i(X))$ . Für ein festes  $t$  definiert die Konstruktion aus dem ersten Schritt also eine Abbildung

$$\Xi_t : \Omega^\infty \mathbf{Th}(V) \rightarrow \prod_{i=0}^t K(H_i(X; \mathbb{Q}), i + d).$$

**Schritt 4.** Für  $j < t + d$  induziert  $\Xi_t$  einen Isomorphismus  $\pi_j(\Omega^\infty \mathbf{Th}(V)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_j(\prod_{i=0}^t K(H_i(X; \mathbb{Q}), i + d)) \otimes \mathbb{Q} = H_{j-d}(X; \mathbb{Q})$ . Dazu bemerkt man, dass

$$\pi_j(\Omega^\infty \mathbf{Th}(V)) \otimes \mathbb{Q} = \operatorname{colim}_n \pi_{j+n}(\mathbf{Th}(V_n)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \operatorname{colim}_n H_{j+n}(\mathbf{Th}(V_n); \mathbb{Q}) \rightarrow H_j(X; \mathbb{Q})$$

aus Isomorphismen besteht. In der Mitte ist der Hurewicz-Homomorphismus, und  $\pi_{j+n}(\mathbf{Th}(V_n)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_{j+n}(\mathbf{Th}(V_n); \mathbb{Q})$  ist ein Isomorphismus wenn  $j + n < \approx 2n$  (Serre's rationaler Hurewicz-Satz). Schließlich identifiziere man beide Abbildungen.

**Schritt 5.** Nach Serre-Klassen-Theorie ist  $\Xi_t$  ein rationaler Homologie-Isomorphismus.

**Schritt 6.**  $H^*(K(\mathbb{Q}, 2n); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\iota_{2n}]$  und  $H^*(K(\mathbb{Q}, 2n+1); \mathbb{Q}) = \Lambda(\iota_{2n+1})$  eine äußere Algebra. Dies sieht man durch Induktion unter Verwendung der Faserfolgen  $K(\mathbb{Q}, n) \rightarrow * \rightarrow K(\mathbb{Q}, n+1)$ .