Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 3 J. Ebert / L. Buggisch
Abgabetermin: 31.5.2017

Frageaufgabe 1. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Präsenzaufgabe 2. Zeigen Sie, dass ein n-dimensionales Vektorbündel $V \to M$ genau dann trivial ist, wenn n Schnitte $s_1, \ldots, s_n$ von V existieren, so dass die Vektoren $s_1(p), \ldots, s_n(p) \in V_p$ für jedes $p \in M$ linear unabhängig sind.

Präsenzaufgabe 3. Es sei $0 \to V_0 \xrightarrow{F} V_1 \xrightarrow{G} V_2 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln auf der Mannigfaltigkeit M (d.h. die induzierte Sequenz auf den Fasern ist exakt). Zeigen Sie, dass eine "Spaltung" existiert, also ein Bündelhomomorphismus $S : V_2 \to V_1$ mit $GS = \mathrm{id}$ und folgern Sie daraus die Existenz eines Isomorphismus $V_1 \cong V_0 \oplus V_2$. Hinweis: lokale Spaltungen können mit Hilfe des kleinen Rangsatzes konstruiert werden. Dann Teilungen der Eins!

Aufgabe 4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und 0 sei ein regulärer Wert von f. Es sei $M := f^{-1}(0)$ und $j : M \to U$ die Inklusion. Wir erhalten einen Bündelhomomorphismus

$$df : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}^n;\ (x, v) \mapsto (x, Df(x)v).$$

Dieser ist surjektiv, und daher ist $\ker(df)$ ein Vektorbündel.

a) Konstruieren Sie einen Bündelisomorphismus $TM \cong \ker(df)$.

b) Zeigen Sie, dass $M \times \mathbb{R}^m \cong TU|_M \cong TM \oplus \mathbb{R}^n$ gilt.

c) Wenden Sie die obige Aufgabe auf $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ an und zeigen Sie $TS^n \cong \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} | v \perp x\}$. Veranschaulichen Sie sich den oben erhaltenen Isomorphismus $TS^n \oplus \mathbb{R} \cong S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Bemerkung: aus dieser Aufgabe folgt, dass eine Mannigfaltigkeit M nur dann als reguläres Urbild einer differenzierbaren Abbildung zwischen offenen Teilmengen euklidischer Räume geschrieben werden kann, wenn TM "stabil trivial" ist in dem Sinne, dass $TM \oplus \mathbb{R}^n$ für irgendein n trivial ist. Man kann zeigen, dass $T\mathbb{CP}^n$ für $n > 1$ nicht stabil trivial ist.

Aufgabe 5. Es sei $L \to M$ ein 1-dimensionales reelles Vektorbündel. Man wähle eine Bündelmetrik auf L und betrachte das Sphärenbündel $S(L) \to M$. Zeigen Sie:

a) Die Einschränkung von π auf $S(L)$ ist eine 2-blättrige Überlagerung.

b) L ist trivial genau dann, wenn $\pi : S(L) \to M$ einen Schnitt hat, und das gilt genau dann, wenn die Überlagerung $S(L) \to M$ trivial ist.

c) Auf einer einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist jedes 1-dimensionale reelle Vektorbündel trivial.

Aufgabe 6. Man zeige, dass ein 1-dimensionales reelles orientierbares Vektorbündel $L \to M$ trivial ist. Hinweis: ist V ein 1-dimensionaler orientierter Vektorraum, so ist die Menge der orientierten Basen *konvex*. Teilungen der Eins helfen, einen Schnitt ohne Nullstelle zu konstruieren.