Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 4 J. Ebert / L. Buggisch

Abgabetermin: 14.6.2017

Frageaufgabe 1. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Präsenzaufgabe 2. Es sei $\pi : V \to M$ ein n-dimensionales Vektorbündel über einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Der Nullschnitt $s : M \to V$ ist dann eine Einbettung, und wir identifieren $s(M)$ und M. Zeigen Sie, dass es einen Bündelisomorphismus

$$TV|_M \cong V \oplus TM$$

gibt. Folgern Sie: Es gibt einen Bündelmonomorphismus

$$V \to (M \times \mathbb{R}^q),$$

wenn $q \geq 2(n+m)+1$. Hinweis: Man bette den Totalraum V in $\mathbb{R}^q$ ein. Diese Dimensionseinschränkung ist im Übrigen weit davon entfernt, optimal zu sein.

Präsenzaufgabe 3. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $d : M \to M \times M$ die Diagonalabbildung $d(x) = (x, x)$. Dies ist offensichtlich eine Einbettung. Zeigen Sie, dass

$$\nu(d) \cong TM,$$

d.h. das Normalenbündel der Diagonale ist isomorph zum Tangentialbündel von M. Hinweis: Es gilt allgemein $T(M \times N) \cong \mathrm{pr}_M^* TM \oplus \mathrm{pr}_N^* TN$.

Aufgabe 4. Seien V, W reelle endlichdimensionale Vektorräume und $U = V \oplus W$. Sind $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ Basen von V bzw W, so sei $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m)$ von $V \oplus W$ die entsprechende Basis von U. Nun seien zwei der Vektorräume V, W, U orientiert, und den dritten orientieren wir über folgende Vereinbarung: sind zwei der Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ positiv orientiert, so auch die dritte. Nun seien $V, W \to M$ reelle Vektorbündel und $U = V \oplus W$. Zeigen Sie: sind zwei der Vektorbündel V, W, U orientierbar, so auch das dritte.

Aufgabe 5. Zeigen Sie: zu jedem $R > 0$ gibt es ein $r > 0$, so dass für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < r$ ein Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert mit $f(0) = v$ und so dass f außerhalb der Scheibe vom Radius R die Identität ist. Hinweise:

a) $n = 1$: Sei $\eta : \mathbb{R} \to [0,1]$ glatt, mit Träger in $(-R, R)$ und $\eta \equiv 1$ nahe 0. Setze $f_t(x) := x + t\eta(x)z$ für $t \in [0,1]$.

b) Für beliebige n sei $z \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$f(x,y) = (x + \eta(x)\eta(\|y\|)z, y).$$

c) Allgemeiner Fall: man nehme das f aus dem letzten Schritt und probiere $A \circ f \circ A^{-1}$, wobei $A \in O(n)$.

Aufgabe 6. Es sei M eine zusammenhängende (und daher auch wegzusammenhängende) Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Seien $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r \in M$ Punkte mit $x_i \neq x_j$ sowie $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $f : M \to M$ so dass $f(x_i) = y_i$, für alle i. Überdies kann man f mit kompaktem Träger wählen, dass heißt $f = \mathrm{id}$ außerhalb einer kompakten Menge. Folgende Schritte spielen dabei eine Rolle.

a) Die Mannigfaltigkeit $M \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$ ist immer noch wegzusammenhängend (hier wird $n \geq 2$ benutzt). Ein high-tech-Beweis könnte darin bestehen, den Transversalitätssatz auf einen Weg $c : [0,1] \to M$, welcher $y, z \in M \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$ verbinde und die Untermannigfaltigkeit $\{x_1, \ldots, x_r\}$ anzuwenden, aber es geht auch elementar.

b) Mit Hilfe der Diffeomorphismen aus der letzten Aufgabe zeigt man: sind $x, y \in M$, so gibt einen Diffeomorphismus $fM \to M$ mit kompaktem Träger so dass $f(x) = y$.

c) Man kombinierere die beiden letzten Schritte zu einem Induktionsbeweis (über r).

Eine interessante Schlussfolgerung: sind $x_1, \ldots, x_r \in M$, dass gibt es eine Karte $h : U \cong B_1(0)$ von M mit $x_1, \ldots, x_r \in U$.