Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 5 J. Ebert / L. Buggisch

Abgabetermin: 30.6.2017

Frageaufgabe 1. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 2. Es seien N^n, M^m Mannigfaltigkeiten und $L^{n-m} \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit. Ferner sei $f : M \to N$ und für ein $p \in f^{-1}(L)$ gelte $f \pitchfork_p L$. Zeigen Sie, dass Karten (U, h) und (V, k) von M beziehungsweise N existieren, so dass gilt:

a) $h(p) = 0$,

b) $k(f(p)) = 0$,

c) $L \cap V = k^{-1}(\mathbb{R}^{n-m} \times 0)$,

d) bezüglich dieser Karten ist f von der Form $x \mapsto (0, x) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$.

Veranschaulichen Sie sich diese Situation graphisch. Hinweise: ein Großteil der Arbeit ist bereits getan. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ und $L = \mathbb{R}^{n-m} \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ (oder offene Teilmengen darin), $p = 0$ und $f(p) = 0$ und $f^{-1}(0) = \{0\}$ (denn $f^{-1}(L)$ ist eine 0-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M und daher diskret. Des weiteren ist die Komposition $\mathbb{R}^m \overset{f=(f_1,f_2)}{\to} \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \overset{\mathrm{pr}}{\to} \mathbb{R}^m$ aufgrund der Transversalitätsbedingung in 0 regulär: hier lässt sich der Rangsatz anwenden. Sie können also annehmen, dass $f(x) = (f_1(x), x)$ gilt, und ein geschickt gewählter Diffeomorphismus einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ tut das gewünschte.

Aufgabe 3. Es sei $V \to M^m$ ein reelles Vektorbündel vom Rang $n > m$. Zeigen Sie, dass V einen nirgends verschwindenden Schnitt hat, und folgern Sie, dass ein Bündel $W \to M$ existiert und ein Isomorphismus $W \oplus \mathbb{R} \cong V$. Hinweis: wie weit hilft der Transversalitätssatz für Schnitte?

Aufgabe 4. Man kann zeigen, dass jede nichtleere, kompakte, zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit diffeomorph zu S^1 oder $[0, 1]$ ist. Benutzen Sie dieses Wissen, um folgende Aussage zu zeigen: ist M eine kompakte, nichtleere Mannigfaltigkeit mit Rand, so gibt es keine C^∞-Abbildung $r : M \to \partial M$ mit $r|_{\partial M} = \mathrm{id}$.
Tip: Beweis durch Widerspruch. Wähle einen regulären Wert $q \in \partial M$ von r und ∂r. Wieviele Randpunkte hat die hübsche Untermannigfaltigkeit $r^{-1}(q) \subset M$?

Aufgabe 5. Seien M_0 und M_1 Mannigfaltigkeiten mit Rand, und der Einfachheit halber als kompakt vorausgesetzt. Es seien $A_i \subset \partial M_i$ offen und abgeschlossen (also Vereinigung von Wegekomponenten) und $\eta : A_0 \cong A_1$ ein Diffeomorphismus. Sei

$$M_0 \cup_\eta M_1 := M_0 \coprod M_1 / \sim,$$

wobei $\sim$ die von der Forderung $M_0 \supset A_0 \ni a \sim \eta(a) \in A_1 \subset M_1$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Benutzen Sie Kragen um die Ränder von M_0 und M_1, um auf $M_0 \cup_\eta M_1$ die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit zu definieren. Sei nun M_0' eine weitere Mannigfaltigkeit mit Rand, $A_0' \subset \partial M_0'$ offen und abgeschlossen sowie $\psi : M_0 \to M_0'$ ein Diffeomorphismus mit $\psi(A_0) = A_0'$. Zeigen Sie, dass für eine geeignete Wahl von η' ein Diffeomorphismus

$$M_0 \cup_\eta M_1 \cong M_0' \cup_{\eta'} M_1$$

existiert.

Aufgabe 6. Man beobachte, dass

$$S^{k-1} \times S^{n-k} = \partial(D^k \times S^{n-k}) = \partial(S^{k-1} \times D^{n-k+1}).$$

Dies ist sinnvoll für $-1 \leq k \leq n+1$, wenn die Konvention $S^{-1} = \emptyset$ benutzt wird. Sei M^n eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand) und $\varphi : S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k+1} \to M$ eine offene Einbettung. Betrachte $M_0 := M \setminus \varphi(S^{k-1} \times \overset{\circ}{D}{}^{n-k+1})$ mit Rand. Die Einbettung φ induziert einen Diffeomorphismus

$$\eta : \partial M_0 \cong S^{k-1} \times S^{n-k}$$

(wie?). Wir sagen, dass die Mannigfaltigkeit

$$M_\varphi := M_0 \cup_\eta (S^{k-1} \times D^{n-k+1})$$

durch eine *elementare Chirurgie entlang* φ aus M erhalten werden. Zeichnen Sie Bilder dieser Situation für $n \geq 2$ und $-1 \leq k \leq n+1$.