ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HOMOLOGIE VON GRUPPEN, BLATT 2, 9.5.2018

JOHANNES EBERT

Aufgabe 1. Es sei G eine endliche Gruppe.

(1) Zeigen Sie, dass eine freie G-Auflösung $P_* \to \mathbb{Z}$ existiert, so dass jedes P_n ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul ist.
(2) Nun sei $\mathbb{F}$ ein Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung $|G|$ nicht teilt. Zeigen Sie, dass $H_k(G;\mathbb{F}) = 0$ für $k > 0$ gilt. Hinweis: ist V ein $\mathbb{F}$-Vektorraum mit einer G-Wirkung und $v \in V$, und $Q := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \in \mathbb{F}[G]$, so ist $Qv \in V^G$.
(3) Folgern Sie: die Homologiegruppen $H_k(G;\mathbb{Z})$ sind alle endlich (wenn $k > 0$).

Aufgabe 2. Es sei G eine endliche Gruppe, welche frei auf S^{n-1} operiere. Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt:

- Es gibt eine G-äquivariante CW-Struktur auf S^{n-1},
- die induzierte Wirkung von G auf $H_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ist trivial.

Zeigen Sie:

(1) Es existiert eine projektive G-Auflösung $P_* \to \mathbb{Z}$, so dass $P_{k+n} = P_k$ und $\partial_{n+k} = \partial_k$ für jedes $k \geq 0$ gilt. Folgern Sie, dass $H_{n+k}(G;\mathbb{Z}) \cong H_k(G;\mathbb{Z})$ gilt, falls $k > 0$.
(2) Des weiteren gilt $H_k(G;\mathbb{Z}) = H_k(S^{n-1}/G;\mathbb{Z})$ für alle $k = 0,\dots,n-2$.
(3) Finden Sie eine endliche Gruppe G, welche diese Eigenschaft für kein n besitzt und daher nicht frei auf einer Späre operieren kann.

Aufgabe 3. In der Situation der letzten Aufgabe: benutzen Sie die Konstruktion von P_*, um eine exakte Sequenz

$$0 \to H_n(G) \to H_0(S^{n-1}/G) \to H_{n-1}(S^{n-1}/G) \to H_{n-1}(G) \to 0$$

herzuleiten. Weil $H_{n-1}(S^{n-1}/G) = \mathbb{Z}$ und weil alle Homologiegruppen von G endlich sind, folgt: $H_n(G) = 0$.

Zeigen Sie ferner, dass die mittlere Abbildung in der Sequenz mit der Multiplikation mit $|G|$ identifiziert werden kann, und leiten Sie her, dass $H_{n-1}(G) \cong \mathbb{Z}/|G|$ gilt.

Aufgabe 4. Die *binäre Ikosaedergruppe* $\hat{G} \subset SU(2) \cong S^3$ ist eine Untergruppe mit folgenden Eigenschaften: $|G| = 120$, und G ist perfekt, also $G^{ab} = 0$. Folgern Sie:

$$H_k(\hat{G}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ \mathbb{Z}/120, & k = 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT MÜNSTER, EINSTEINSTRASSE 62, 48149 MÜNSTER, BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND