http://www.math.uni-bonn.de/people/ebert/ Dr. Johannes Ebert
Sommersemester 2009

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG TOPOLOGIE II

Aufgabenblatt 1
Abgabe: Mittwoch, 22.4.09 in der Vorlesung.

Aufgabe 1.1. Wie in der Vorlesung sei $\mathbf{Top}_2$ die Kategorie der Raumpaare, d.h., ein Objekt ist ein Paar (X, Y) von topologischen Räumen mit $Y \subset X$ und ein Morphismus von (X_0, Y_0) nach (X_1, Y_1) ist eine stetige Abbildung $f : X_0 \to X_1$ mit $f(Y_0) \subset Y_1$. Präzisieren und zeigen Sie die Aussage: die Zuordnungen $(X, Y) \mapsto X$, $(X, Y) \mapsto Y$ und $(X, Y) \mapsto X/Y$ sind Funktoren. Erklären Sie zwei von der Identität verschiedene natürliche Transformationen zwischen diesen Funktoren.

Aufgabe 1.2. In der Vorlesung Topologie I haben Sie den Begriff der Homotopie von stetigen Abbildungen kennengelernt. Zeigen Sie: Homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y, wobei X und Y beliebige topologische Räume sind. Für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ bezeichne $[f]$ die Homotopieklasse von $[f]$. Zeigen Sie, dass die folgenden Daten eine Kategorie definieren:

- Die Objekte sind die topologischen Räume;
- die Morphismen von X nach Y sind die Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y;
- Verknüpfung von Morphismen ist durch $[f] \circ [g] := [f \circ g]$ definiert.

Hierbei muss natürlich bewiesen werden, dass die Verknüpfung wohldefiniert ist. Diese Kategorie wird mit **HoTop** bezeichnet und heißt die *Homotopiekategorie der topologischen Räume*.

Aufgabe 1.3. Es sei G eine Gruppe. Man kann G als eine Kategorie auffassen, indem wir $\mathsf{Ob}(\underline{G}) = \{*\}$ und $\mathsf{Mor}_{\underline{G}}(*, *) = G$ mit der durch die Gruppenstruktur auf G definierten Verknüpfung setzen.

(1) Zeigen Sie die folgenden Aussagen. Gruppenhomomorphismen $f : G \to H$ liefern Funktoren $\underline{f} : \underline{G} \to \underline{H}$ und jeder Funktor entsteht auf diese Weise durch einen eindeutigen Homomorphismus. Diese Konstruktion ist verträglich mit der Komposition von Homomorphismen.
(2) Seien $f_0, f_1 : G \to H$ Gruppenhomomorphismen. Beschreiben Sie explizit, was eine natürliche Transformation $\underline{f}_0 \to \underline{f}_1$ ist.
(3) Was ist ein Funktor $X : \underline{G} \to \mathbf{Top}$? Für zwei Funktoren $X, Y : \underline{G} \to \mathbf{Top}$: Was ist eine natürliche Transformation $X \to Y$?

Aufgabe 1.4. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Konstruktion der freien abelschen Gruppe, welche von einer gegebenen Menge erzeugt wird, in der Sprache der Kategorien zu verstehen. Es sei **Ab** die Kategorie der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Ferner sei **Set** die Kategorie der Mengen und Abbildungen.

Indem jeder abelschen Gruppe A die zugrundeliegende Menge A zugeordnet wird und jeder Gruppenhomomorphismus $A \to B$ als eine Abbildung von Mengen aufgefasst wird, wird ein Funktor $V : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$, der *Vergißfunktor*, definiert.

Zeigen Sie: für jedes $S \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Set})$ existiert ein $F(S) \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Ab})$ und eine Abbildung $j : S \to V(F(S))$, so dass für jedes $A \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Ab})$ und jede Abbildung $f : S \to V(A)$ genau ein Gruppenhomomorphismus $g : F(S) \to A$ existiert mit $g \circ j = f$. Zeigen Sie, dass $F(S)$

durch diese Eigenschaft bis auf einen eindeutigen Isomorphismus bestimmt ist. Eine jede solche Gruppe heißt *die von S erzeugte freie abelsche Gruppe*.

Zeigen Sie, dass die Zuordnung $S \mapsto F(S)$ einen kovarianten Funktor $\mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ definiert. Präzisieren und zeigen Sie die Aussage, dass eine natürliche Bijektion

$$\Phi : \mathsf{Mor}_{\mathbf{Ab}}(F(S); A) \cong \mathsf{Mor}_{\mathbf{Set}}(S, V(A))$$

existiert. Setze $A = F(S)$. Was ist $\Phi^{-1}(j) \in \mathsf{Mor}_{\mathbf{Ab}}(F(S), F(S))$?

Was passiert, wenn in dieser Aufgabe die Kategorie $\mathbf{Ab}$ durch die Kategorie $R - \mathbf{Mod}$ der Linksmoduln über einem beliebigen Ring R ersetzen?

Hintergrund: Eine natürliche Bijektion wie oben gesehen heißt eine *Adjunktion*; F heißt *linksadjungiert* zu V und V *rechtsadjungiert* zu F. Solche adjungierten Funktorpaare spielen eine wichtige Rolle in vielen Situationen.