ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG TOPOLOGIE II

Aufgabenblatt 2
Abgabe: Mittwoch, 29.4.09 in der Vorlesung.

Aufgabe 2.1. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Zuordnung $X \mapsto C_*(X)$ (X ist ein topologischer Raum und $C_*(X)$ sein singulärer Kettenkomplex) einen kovarianten Funktor $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ch}$ definiert.

Aufgabe 2.2. Es sei $C_* := (C_n, d_n)$ ein Kettenkomplex. In der Vorlesung wurde die $n$te Homologiegruppe definiert: $H_n(C_*) := \frac{\ker d_n}{\operatorname{im} d_{n+1}}$. Wenn $c \in C_n$ ein Zykel ist, d.h. $d_n(c) = 0$, so sei $[c] \in H_n(C_*)$ die von c repräsentierte Klasse. Sei B_* ein weiterer Kettenkomplex und $f_* : C_* \to B_*$ eine Kettenabbildung. Zeigen Sie, dass die Vorschrift $[c] \mapsto [f_n(c)]$ eine Abbildung $H_n(f) : H_n(C_*) \to H_*(B_*)$ definiert. Zeigen Sie ferner, dass $C \mapsto H_n(C_*)$, $f_* \mapsto H_n(F_*)$ einen kovarianten Funktor $\mathbf{Ch} \to \mathbf{Ab}$ definiert.

Aufgabe 2.3. Berechnen Sie die Homologie der folgenden Kettenkomplexe.

(1)
$$\ldots 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \ldots,$$
wobei p die Projektion modulo 2 ist, μ durch $\mu(1) = 2 + frm{-}e\mathbb{Z}$ definiert ist und die Folge von Gruppen auf beiden Seiten durch Null fortgesetzt wird.

(2)
$$\ldots 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}[x] \xrightarrow{ev_{-1}} \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots,$$
wobei $\Delta(a) = (a, a, 0)$, $f(a, b, c) = c + cx$ und $ev_{-1}(p(x)) = p(-1)$ die Auswertung des Polynoms bei -1 ist.

Aufgabe 2.4. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und $c \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt. Präzisieren und zeigen Sie: durch $F_c(x) := \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(x, c)$ wird ein kontravarianter Funktor $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ definiert. Ferner definiert $H_c(x) := \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(c, x)$ einen kovarianten Funktor $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Zeigen Sie, dass ein Morphismus $c \to d$ von $\mathcal{C}$ eine natürliche Transformation $F_c \to F_d$ definiert und zeigen Sie, dass jede natürliche Transformation auf diese Art entsteht. Zeigen Sie die analoge Aussage für die Funktoren H_c.

Aufgabe 2.5. Man sagt, dass eine Kategorie $\mathcal{I}$ *klein* ist, wenn die Klasse $\mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ eine Menge ist. Sei nun $\mathcal{I}$ eine kleine Kategorie, $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Ein *Kolimes* von F ist ein Objekt $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F$ von $\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\eta_i : F(i) \to \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F$ für jedes $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$, welche die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

- Sind $i, j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ und $f \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{I}}(i, j)$, so gilt $\eta_j \circ F(f) = \eta_i$.
- Es sei X ein Objekt von $\mathcal{C}$ und für jedes Objekt $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ sei ein Morphismus $\lambda_i : F(i) \to X$ gegeben, so dass $\lambda_j \circ F(f) = \lambda_i$ gilt, falls $i, j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ und $f \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{I}}(i, j)$. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi : \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F \to X$ mit $\varphi \circ \eta_i = \lambda_i$ für alle $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$.

Beweisen Sie:

(1) Falls der Funktor F einen Kolimes besitzt, so ist dieser bis auf einen eindeutigen Isomorphismus bestimmt.

(2) Jeder Funktor $F : \mathcal{I} \to \mathbf{Top}$ besitzt einen Kolimes. Hinweis: Setzen Sie

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F = \coprod_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})} F(i)/\sim$$

wobei $\sim$ eine geeignete Äquivalenzrelation ist.

(3) Es sei $\mathcal{I}$ eine Menge, welche als Kategorie aufgefasst werde indem man $\mathsf{Mor}_{\mathcal{I}}(i,j) = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\mathsf{Mor}_{\mathcal{I}}(i,i) = \{\mathrm{id}_i\}$ setzt. Aus welchen Daten besteht ein Funktor $F : \mathcal{I} \to \mathbf{Top}$ und was ist sein Kolimes?

(4) Definiere eine Kategorie $\mathcal{I}$ wie folgt. Setze $\mathcal{I} := \{a, b, c\}$. Die Morphismenmengen seien $\mathsf{Mor}_{\mathcal{I}}(x,x) = \{\mathrm{id}_x\}$ für alle $x \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$, $\mathsf{Mor}_{\mathcal{I}}(b,a) = \{f\}$, $\mathsf{Mor}_{\mathcal{I}}(b,c) = \{g\}$ und alle anderen Morphismenmengen seien leer. Beschreiben Sie die Daten, die ein Funktor $F : \mathcal{I} \to \mathbf{Top}$ definiert und beschreiben Sie den Kolimes. Unter welchem Namen kennen Sie diese Konstruktion aus Topologie I?

(5) Es sei G eine Gruppe. Die Kategorie $\underline{G}$ sei wie in Aufgabe 1.3 definiert. Vergegenwärtigen Sie sich die Beschreibung von Funktoren $X : \underline{G} \to \mathbf{Top}$ aus Aufgabe 1.3 (3). Was ist $\operatorname{colim}_{\underline{G}} X$?