VORLESUNG ANALYSIS I, WINTERSEMESTER 2014/15

JOHANNES EBERT

1. Literatur

Aus der Vielzahl an einführenden Lehrbüchern zur Analysis werde ich folgende drei Werke zur Vorbereitung der Vorlesung heranziehen.

- Otto Forster *Analysis I* [1]. Dieses Buch ist recht preisgünstig zu erwerben und ist zu Recht das populärste Lehrbuch zur Analysis in deutscher Sprache. Siehe http://www.amazon.de/Analysis-1-Otto-Forster/dp/3528672242.
- Konrad Königsberger: *Analysis I* [2]. Es gibt inzwischen eine neuere Auflage, siehe http://www.amazon.de/Analysis-1-Springer-Lehrbuch-Konrad-Königsberger/dp/354040371X.
- Theodor Bröcker: *Analysis I* [3]. Dieses Buch kann von der homepage des Autors heruntergeladen werden: http://www.mathematik.uni-regensburg.de/broecker/.

2. Zusammenfassung der Vorlesungsinhalte

2.1. Reelle Zahlen.

13.10. Natürliche, und ganze Zahlen; $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$. Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$. Körperaxiome; Beispiel eines endlichen Körpers: $\mathbb{F}_2$. Einfache Folgerungen aus den Axiomen. Potenzen, Summenzeichen, Produktzeichen, Fakultät, Binomialkoeffizienten. Formulierung des binomischen Lehrsatzes. Beispiel $n = 1, 2$. Das Prinzip der vollständigen Induktion. Literatur [1], §1,2, [2], §1, [3] , §1.

16.10. Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten. Beziehung zum Pascal'schen Dreieck. Beweis des binomischen Lehrsatzes durch vollständige Induktion. Rechentricks: Indexverschiebung, hilfreiche Addition von Nullen. Kombinatorische Interpretation der Binomialkoeffizienten. Axiome eines angeordneten Körpers, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Die Anordnung von $\mathbb{Q}$.

20.10. Veranschaulichung der Anordnung als Zahlengerade. Rechenregeln für $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Quadrate sind positiv. Absolutbetrag. Eigenschaften des Absolutbetrages; insbesondere die wichtige Dreiecksungleichung. Das Archimedische Axiom. $\mathbb{Q}$ ist archimedisch angeordnet. Minimum und Maximum einer Teilmenge $S \subset \mathbb{K}$ eines angeordneten Körpers. Ist $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper, so ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, welche durch $\frac{p}{q} \mapsto \frac{p \cdot 1}{q \cdot 1}$ definiert ist, injektiv, mit Addition, Multiplikation und Anordnung verträglich. Auf diese Art ist $\mathbb{Q}$ als Unterkörper eines jeden angeordneten Körpers zu verstehen.

23.10. Nichtexistenz einer rationalen Wurzel von 2 als Motivation für das Vollständigkeitsaxiom. Notation für abgeschlossene und offene Intervalle. Definition von Intervallschachtelungen in einem archimedisch angeordneten Körper.

Vollständigkeitsaxiom durch Intervallschachtelungen: Ist eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben, so existiert ein Element $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Dieses x ist eindeutig bestimmt. Definition der reellen Zahlen als archimedisch angeordneter vollständiger Körper. Eine reelle Zahl ist ein Element von $\mathbb{R}$. Dieser Körper wird in der Vorlesung "Logische Grundlagen der Mathematik" konstruiert, in der Analysis-Vorlesung werden wir $\mathbb{R}$ als gegeben betrachten. Ebenfalls stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ durch die Axiome. In der Tat ist $\mathbb{R}$ "bis auf einen geeigneten Äquivalenzbegriff" eindeutig durch die Axiome charakterisiert. Alle Eigenschaften angeordneter Körper, die wir bisher bewiesen haben, gelten in $\mathbb{R}$. Dass eine Wurzel von 2 in $\mathbb{R}$ existiert, werden wir später beweisen. Bemerkung: es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ begrifflich zu erfassen; ich bin [2] gefolgt. Die Bücher [1] und [3] nehmen einen anderen (äquivalenten) Weg.

2.2. **Folgen und Reihen, Konvergenz.**

27.10. Anschauliche Diskussion/Motivation des Konvergenzbegriffes. Formale Definition der Konvergenz. Mit dem Grenzwertbegriff verbundene Definitionen: Divergenz, Grenzwert (=Limes), $\lim_n a_n = a$, $a_n \to a$. Bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$. Nullfolgen. Negation der Konvergenz. "Für fast alle ". Konvergente Folgen sind beschränkt, und der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. Ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = [a_n, b_n]$, eine Intervallschachtelung, so ist $b_n - a_n$ eine Nullfolge. Ist $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ die durch die Intervallschachtelung definierte reelle Zahl, so gilt $\lim_n a_n = \lim_n b_n = x$. Erste konkrete Beispiele von Folgen: Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen Null. $\frac{1}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergiert ebenfalls gegen Null. Nützliche Beobachtung: ist (a_n) eine Nullfolge und $|b_n| \leq |a_n|$, so ist (b_n) ebenfalls eine Nullfolge. Die Folge $a_n = n^k$, $k > 0$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

30.10. Konvergenzbetrachtung der Folge (q^n) für $q \in \mathbb{R}$. Es gilt: für $|q| > 1$ und $q = (-1)^n$ divergiert (q^n). Für $q = 1$ gilt $\lim_n q^n = 1$ (dies ist trivial). Für $|q| < 1$ ist (q^n) eine Nullfolge. Für den Beweis schreibe $|q| = \frac{1}{1+\eta}$ mit $\eta > 0$ und wende die Bernoulli-Ungleichung an.

Verallgemeinerung: für $|q| < 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist $(n^k q^n)$ eine Nullfolge. Beweis durch Induktion über k. Im Induktionsschritt schreibt man $n^k q^n = a_n b_n$, wobei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt ist. Daraus folgt, dass $(n^k q^n)$ eine Nullfolge ist. Ein wichtiger Beweisschritt war ferner, q als Produkt $q = rs$ zu schreiben, mit $0 \leq s < 1$ und $|r| < 1$.

Monotonie des Grenzwertes: ist $a_n \to a$, $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ für alle n, so ist $a \leq b$. Die Verschärfung $(a_n < b_n) \Rightarrow a < b$ ist im Allgemeinen *falsch*, wie $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$ zeigt. Rechenregeln für den Grenzwert: ist $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so gilt $(a_n + b_n) \to (a + b)$ und $(a_n b_n) \to (ab)$. Ist außerdem $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$, so folgt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Beginn des Beweises.

3.11. Rechenregeln für den Grenzwert: Fortsetzung des Beweises. Anwendung: Existenz (und Eindeutigkeit) der k-ten Wurzeln nichtnegativer reeller Zahlen: für $y \geq 0$ existiert genau ein x mit $x^k = y$. Die Eindeutigkeit folgt aus den Regeln für die $<$-Beziehung. Für die Existenz der Wurzeln werden zunächst Intervalle $[a_n, b_n]$ konstruiert, so dass gilt $a_n^k \leq y \leq b_n^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $|b_n - a_n| \leq \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}|$. Wegen letzterer Ungleichung ist $|a_n - b_n|$ eine Nullfolge, und die Intervalle bilden eine Intervallschachtelung, welche eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ definiert. Behauptung: $x^k = y$. Es gilt $a_n \to x$ und $b_n \to x$. Aus den Rechenregeln für den Grenzwert folgt $a_n^k \to x^k$ und $b_n^k \to x^k$. Aus der Monotonie des Grenzwertes folgt dann $\lim_n a_n^k \leq y \leq \lim_n b_n^k$, d.h. $x^k = y$. **: Bemerkung:** Dieser Beweis benutzt fast alles, was bisher entwickelt worden ist, und ist eine hervorragende Gelegenheit, die ersten Wochen dieser Vorlesung nachzuarbeiten.

Die Wurzeln sind das erste Beispiel reeller Zahlen, welche als Grenzwerte von Folgen überhaupt erst definiert werden können. Um diese Technik weiter zu entfalten, ist ein Kriterium nötig, um aus einer Folge (a_n) die Konvergenz ablesen zu können, ohne den Grenzwert im vorneherein zu kennen. Ein solches Kriterium ist das *Cauchy'sche Konvergenzkriterium.* Definition "monotone Folge" und "Teilfolge".

6.11. Satz von Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. Beweis in drei Schritten.

(1) Die Folge $(a_n)_n$ ist beschränkt. Also gilt $-C \leq a_n \leq C$ für alle n. Setze $b_1 := -C$, $c_1 = C$. Man konstruiert eine Intervallschachtelung $(I_k)_k$, $I_k = [b_k, c_k]$, so dass gilt: es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in I_k$, d.h. $b_k \leq a_n \leq c_k$. Man konstruiert die Intervallschachtelung, indem man das Intervall I_k in zwei Hälften teilt. In (mindestens) einer dieser Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder; man wähle eine der Hälften und nenne sie I_{k+1}. Die Folgen der Intervallgrenzen $(b_k)_k$ und $(c_k)_k$ konvergieren gegen ein $a \in \mathbb{R}$ (hier wird die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ benutzt).
(2) Nun konstruiert man eine Teilfolge $a_{\alpha(k)}$ von $(a_n)_n$, so dass für alle k gilt: $a_{\alpha(k)} \in I_k$, also $b_k \leq a_{\alpha(k)} \leq c_k$. Dies geschieht induktiv.
(3) Aufgrund des Sandwich-Lemma ist $a_{\alpha(k)}$ konvergent, genauer gesagt $\lim_k a_{\alpha(k)} = a$.

Zum Nacharbeiten: man vergleiche die Strategie der Intervallhalbierung mit dem Beweis der Existenz von Wurzeln. Definition Cauchy-Folge. Cauchy'sches Konvergenzkriterium: Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Dass eine konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, ist der einfache Teil des Beweises. Die Umkehrung wird in drei Schritten gezeigt. Sei (a_n) eine Cauchy-Folge.

(1) Cauchy-Folgen sind beschränkt. Dies ist analog zu dem Beweis, dass konvergente Folgen beschränkt sind.
(2) Wegen des Satzes von Bolzano-Weierstrass und des ersten Beweisschrittes besitzt also $(a_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. Sei $(a_{n_k})_k \to a$ eine konvergente Teilfolge.
(3) Behauptung: die ganze Folge a_n konvergiert ebenfalls gegen a. Dies beruht auf der Abschätzung $|a - a_n| \leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n|$.

Bemerkungen: Inhaltlich decken sich die Beweise aus der Vorlesung mit denjenigen aus [2], S. 50 und S. 52. In [1] und [3] werden andere Zugänge zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gewählt, dementsprechend sind die Beweise dort anders. Man kann den Satz von Bolzano-Weierstrass und das Cauchy'sche Konvergenzkriterium als alternative Definition der Vollständigkeit heranziehen. **Sehr wichtige Bemerkung:** Bis hierhin haben Sie viele neue Dinge gelernt, aber die Denkweise war noch recht nahe an der Schulmathematik ("wie kann man einen Grenzwert ausrechnen?"). Die beiden Sätze der heutigen Vorlesungsstunde sind der erste große Schritt, der auch über die Denkweise über die Schulmathematik hinausgeht und bereiten Anfängern daher erfahrungsgemäß große Schwierigkeiten. Sie sind aber die Grundlage für alles, was folgt; und die Wichtigkeit dieser Sätze kann nicht oft genug betont werden. Wer eine Prüfung in Analysis bestehen möchte, muss diese Sätze und ihre Beweise am Ende des ersten Semesters verstanden haben.

10.11. Satz von der monotonen Konvergenz: ist $(a_n)_n$ eine monotone (d.h. entweder monoton steigende oder monoton fallende) Folge, und ist $(a_n)_n$ beschränkt, so ist $(a_n)_n$ konvergent. Der Beweis basiert auf dem Satz von Bolzano-Weierstrass. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $(a_n)_n$ als monoton steigend vorausgesetzt werden, andernfalls betrachte man $(-a_n)_n$. Da (a_n) beschränkt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \to a$. Es gilt dann $a_{n_k} \leq a$ für alle k und $a_n \leq a$ für alle n. Daraus folgt durch eine einfache Überlegung, dass $a_n \to a$.

Definition unendlicher Reihen. Damit verbundene Definition: Partialsumme. Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge. Die Umkehrung ist *falsch*, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt. Sind die Folgenglieder $a_n \geq 0$, so konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$ genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist (dies ist eine Umformulierung des Satzes über monotone Konvergenz).

Beispiele: die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^\infty q^k$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$, und der Grenzwert ist $\sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q}$. Dies folgt aus der geometrischen Summenformel und der Tatsache, dass $q^n \to 0$ für $|q| < 1$. Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ ist *divergent*, weil die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist. Es gilt nämlich $\sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{m}{2}$ (Nikolaus von Oresme). Für $k > 1$ *konvergiert* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k}$ aber, denn es gilt $\sum_{n=1}^{2^m-1} \leq \sum_{r=0}^{m-1} 2^r \frac{1}{(2^k)^r} = \sum_{r=0}^{m-1} (2^{1-k})^r$. Weil $k > 1$ ist, ist $0 < 2^{1-k} < 1$, und daher gilt wegen der geometrischen Summenformel $\sum_{r=0}^{m-1} (2^{1-k})^r = \frac{1-(2^{1-k})^m}{1-2^{1-k}} < \frac{1}{1-2^{1-k}}$. Daher ist die Folge der Partialsummen beschränkt, und weil die Folgenglieder ≥ 0 sind, ist die Reihe konvergent.

13.11. Das Majorantenkriterium: seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen, $b_n \geq 0$ und $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n. Falls $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Das Majorantenkriterium ist der wichtigste Konvergenztest. Man beachte, dass im Umkehrschluss gilt: ist $\sum_n a_n$ divergent, so auch $\sum_n b_n$. Definition Absolute Konvergenz. Majorantenkriterium zeigt absolute Konvergenz. Das Leibnizsche Konvergenzkriterium liefert viele Beispiele konvergenter, aber nicht absolut konvergenter Reihen.

Quotientenkriterium: sei $a_n \neq 0$. Man betrachte die Folge $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Falls ein $q < 1$ existiert mit $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ für fast alle n, so konvergiert $\sum_n a_n$ absolut. Falls $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ für fast alle n, so divergiert $\sum_n a_n$. Man beachte, dass die Bedingung "$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ für fast alle n" *nicht* hinreichend für die Konvergenz von $\sum_n a_n$ ist.

Man kann das Quotientenkriterium in eine griffigere Form bringen, falls $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| =: r$ existiert. Dann gilt: ist $r < 1$, so konvergiert $\sum_n a_m n$ absolut. Ist $r > 1$, so divergiert die Reihe. Für $r = 1$, so bringt das Quotientenkriterium keine Information.

17.11. Beweis des Quotientenkriteriums. Definition der Exponential-, Sinus- und Cosinusreihe. Alle diese drei Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine genauere Untersuchung der Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\exp(x)$ wird später mit Hilfsmitteln der Differentialrechung vorgenommen.

2.3. **Stetige Funktionen.**

20.11. Der Funktionsbegriff. Beispiele: Polynomfunktionen, rationale Funktionen, Wurzelfunktionen. Betragsfunktion, signum-Funktion (oder Vorzeichenfunktion). Veranschaulichung von Funktionen durch ihren Graphen. Summen, Produkte und Quotienten von Funktionen. Komposition von Funktionen. Definition der Steigkeit einer Funktion (ϵ-δ-Definition). Konstante Funktionen, die Identität und die Betragsfunktion sind in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Folgenkriterium für Stetigkeit. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig bei $x_0 \in I$, wenn für jede Folge $(x_n)_n$ in I mit $x_n \to x_0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \ \ (= f(x_0))$. Anschauliche Diskussion der $\epsilon - \delta$-Stetigkeit und der Folgenstetigkeit. Das Folgenkriterium erlaubt es, Sätze über konvergente Folgen zu Sätzen über stetige Funktionen umzuformulieren. Summen und Produkte stetiger Funktionen sind wieder stetig. Gleiches gilt für Quotienten, sofern der Nenner niemals 0 wird. Aus der Stetigkeit der Identität und konstanter Folgen folgt also die Stetigkeit von Polynomfunktionen und rationalen Funktionen auf ihrem gesamten Definitionsbereich. Direkt aus Aufgabe 4, Blatt 4, folgt, dass die Wurzelfunktion $f(x) = x^{1/k}$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich, also $[0, \infty) := \{x | x \geq 0\}$ stetig ist. Kompositionen stetiger Funktionen sind wieder stetig. Diese Sätze zeigen die Stetigkeit einer ganzen Reihe von stetigen Funktionen, ohne jemals ein ϵ in die Hand nehmen zu müssen. Formulerung des Zwischenwertsatzes.

24.11. Beweis des Zwischenwertsatzes. Es wurde wieder die Methode der Intervallunterteilung angewandt, und der Beweis ist analog zum Beweis der Existenz k-ter Wurzeln in $\mathbb{R}$. Folgerung: das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion ist wieder ein Intervall. Konkrete Anwendung des Zwischenwertsatzes: Polynomfunktionen ungeraden Grades besitzen eine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Verallgemeinerte Intervalle. Kompakte Intervalle. Berührpunkte, innere Punkte und Randpunkte einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$. Beispiele für diese Begriffe.

27.11. Die Berührpunkte von A sind genau die möglichen Grenzwerte in A liegender konvergenter Folgen. Verallgemeinerung des Konvergenzbegriffes. Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $a \notin A$ ein Berührpunkt von A. Ferner sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $\lim_{x\to a} f(x) = y$ gilt, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

(1) Die Funktion $\tilde{f} : A \cup \{a\} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in A$ und $\tilde{f}(a) = y$ ist stetig in a.
(2) Für jede Folge $a_n \to a$, $a_n \in A$, gilt $f(a_n) \to y$.
(3) Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für $x \in A$, $|x - a| < \delta$ gilt: $|f(x) - y| < \epsilon$.

Der Beweis der Äquivalenz dieser drei Bedingungen ist eine Reformulierung der Stetigkeit beziehungsweise des Satzes, dass Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent sind.

Supremum und Infimum von Teilmengen von $\mathbb{R}$. Das Supremum ist eine kleinste obere Schranke, das Infimum eine größte untere Schranke. Achtung: das Supremum darf auf keinen Fall mit dem Maximum verwechselt werden (wenn das Maximum existiert, so ist es aber gleich dem Supremum). Satz: Jede nach oben beschrïkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum, und $\sup(A)$ ist ein Berührpunkt von A. Jede nach unten beschrïkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum, und $\inf(A)$ ist ein Berührpunkt von A. Beweis durch die Intervallhalbierungsmethode. Man konstruiert Folgen (a_n) und (b_n), so dass $a_n \in A$, b_n ist obere Schranke von A, (a_n) monoton steigend und (b_n) monoton fallend und dass $b_n - a_n \to 0$. Der gemeinsame Grenzwert $\lim_n a_n = \lim_n b_n =: s$ ist das gesuchte Supremum.

1.12 Satz vom Maximum: Eine auf einem kompakten Intervall stetige Funktion nimmt dort Maximum und Minimum an. Genauer gesagt: ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren $c_0, c_1 \in [a, b]$ mit $f(c_0) \leq f(x) \leq f(c_1)$ für alle $x \in [a, b]$. Für den Beweis genügt es, c_1 zu konstruieren (also das Maximum), die Existenz von c_0 folgt aus der Betrachtung von $-f$. Der erste Beweisschritt besteht darin, zu zeigen, dass f nach oben beschränkt ist. Dies gelingt durch Widerspruch: wäre f nicht nach oben beschränkt, so gäbe es eine Folge x_n in $[a, b]$ mit $f(x_n) \geq n$. Nach Bolzano-Weierstraß gibt es dann eine konvergente Teilfolge $x - n_k \to x$. Es gilt $a \leq x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq b$ (Monotonie des Grenzwertes). Der springende Punkt des Beweises ist, dass $x \in [a, b]$ und damit im Definitionsbereich der Funktion f liegt. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $f(x_{n_k})$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Damit ist die Beschränktheit von f nachgewiesen. Da $\sup(f([a, b])$ ein Berührpunkt von $f([a, b])$ ist, gibt es ferner eine Folge x_n in $[a, b]$ mit $f(x_n) \to \sup(f([a, b])$. Wieder nach Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x$. Dann gilt $f(x) := \lim f(x_{n_k})$, und x ist das gesuchte Element $c_1 \in [a, b]$. Bemerkung: der Satz vom Maximum ist eine hervorragende Gelegenheit, Ihr Verständnis der Vorlesung zu testen.

Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion: ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ steng monoton steigend (oder fallend), so ist $J = f(I)$ ein Intervall, $f : I \to J$ ist bijektiv, und die Umkehrfunktion $g : J \to I$ ist wieder stetig. Als Anwendung ergibt sich ein neuer Beweis, dass die Wurzelfunktion stetig ist.

2.4. **Differenzierbare Funktionen.**

1.12. Definition der Differenzierbarkeit. Sei $I \subset \mathbb{R}$, $x \in I$ ein Punkt, welcher Berührpunkt von $I \setminus \{x\}$ ist. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f *differenzierbar* in x ist, falls der Grenzwert $\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $f'(x) := \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ bezeichnet und heißt *Ableitung* von f bei x. Schreibweisen: die Funktion $\Delta_x f : I \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$, $\Delta_x f(y) := \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ wird als *Differenzenquotient* bezeichnet. Man bemerke, dass nach Definition $f(y) = f(x) + (\Delta_x f)(y)(y - x)$ gilt. Oft ist es übersichtlicher, y als $x + h$ zu schreiben. Der Differenzenquotient ist dann $\Delta_x f(x + h) = \frac{1}{h}(f(x + h) - f(x))$ und die Ableitung $f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x + h) - f(x))$. Die Bedingung, dass x Berührpunkt von $I \setminus \{x\}$ ist, ist nötig, um den Grenzwert $\lim_{y\to x} \Delta_x f(y)$ bilden zu können. Ist I ein Intervall, das nicht nur einen Punkt hat, so hat jeder Punkt $x \in I$ diese Eigenschaft.

Bemerkung: die Differenzierbarkeit ist eine der wichtigsten Definitionen der gesamten Mathematik.

4.12. Umformulierung der Differenzierbarkeit (der Nutzen dieser Umformulierung wird sich bald erweisen). Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar bei x_0 mit Ableitung $L \in \mathbb{R}$, falls man $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$ schreiben kann, wobei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine bei x_0 stetige Funktion mit $\varphi(x_0) = 0$ ist. Beispiel: die

Funktion $f(x) = x^n$. In diesem Fall gilt

$$(x_0 + h)^n = x_0^n + nx_0^{n-1}h + \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k} \right) h,$$

wie man mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schnell einsieht. Der Ausdruck in der Klammer ist die Funktion $\varphi(x_0 + h) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k}$, welche stetig ist und $\varphi(x_0) = 0$ erfüllt. Also ist $f(x) = x^n$ differenzierbar mit Ableitung nx^{n-1}. Folgerung der Umformulierung: ist f differenzierbar bei x_0, so ist f stetig bei $x - 0$. Rechenregeln für die Ableitung: Summenregel, Produktregel, Quotientenregel. Ableitung von Polynomen und rationalen Funktionen. Definition der Begriffe "stetig differenzierbar", "k-mal stetig differenzierbar" und der höheren Ableitungen. Notation $\frac{d}{dx} f(x) :) f'(x)$.

8.12. Kettenregel für Ableitungen. Umkehrfunktionen differenzierbarer Funktionen sind differenzierbar, Berechnung der Ableitung. Beispiel: die Wurzelfunktionen $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dx}(x^{1/k}) = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1}$. Allgemeiner: für alle $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ist die Funktion $x \mapsto x^{\frac{m}{n}}$ differenzierbar auf $(0, \infty)$ und es gilt $\frac{d}{dx}(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}}$.

Das lokale Verhalten differenzierbarer Funktionen: hat $f : I \to \mathbb{R}$ ein lokales Maximum oder Minimum bei $x \in I$ und ist I ein offenes Intervall, so gilt $f'(x) = 0$. Bemerkung: es ist wichtig, dass I ein offenes Intervall ist, der Satz ist falsch für zum Beispiel $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$; das einizge Maximum ist $x = 1$. Mittelwertsatz der Differentialrechnung: ist $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b), so gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $\frac{[f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Mit anderen Worten: die Sekantensteigung entspricht dem Wert der Ableitung an einer Zwischenstelle. Für den Beweis wird zunächst der Spezialfall $f(a) = f(b)$ betrachtet (Satz von Rolle). In diesem Fall wird die Existenz einer Nullstelle von f' behauptet, und dies folgt aus dem Satz vom Maximum. Bemerkung: für den Mittelwertsatz ist nicht vorausgesetzt, dass die Funktion f in den Endpunkten a, b differenzierbar ist. Daher muss die Stetigkeit von f in den Punkten a, b gesondert gefordert werden. Ein typischer Fall ist die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Diese ist differenzierbar auf $(0, 1]$, aber nicht im Punkte 0: $\frac{1}{h}(f(0 + h) - f(0)) = \frac{1}{h}\sqrt{h} = \sqrt{\frac{1}{h}} \to \infty$ für $h \to 0$. Der Mittelwertsatz gilt aber auch für diese Funktion.

11.12. Beweis des Mittelwertsatzes durch Reduktion auf den Satz von Rolle. Anwendungen des Mittelwertsatzes: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b).

(1) f ist konstant gdw. $f' \equiv 0$.
(2) f ist monoton wachsend (bzw. fallend) gdw. $f' \geq 0$ (bzw. $f' \leq 0$).
(3) Ist $f' > 0$ (bzw. $f' < 0$), so ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend). Die Umkehrung dieser letzten Aussage gilt nicht, wie das Beispiel der Funktion $f(x) = x^3$ zeigt.
(4) Sei zusätzlich f zweimal stetig differenzierbar auf $[a, b]$, $a < x < b$ und $f'(x) = 0$. Falls $f''(x) > 0$ (bzw. $f'' < 0$), so besitzt f bei x ein lokales Minimum (bzw. Maximum).

Funktionenfolgen. Sei $I \subset \mathbb{R}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n : I \to \mathbb{R}$ gegeben, und des weiteren eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. f_n heißt *punktweise konvergent* gegen f, falls für jedes $x \in I$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. In Symbolen:

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(x, \epsilon) : \forall n \geq n_0 : \; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Die zentrale Fragestellung ist jetzt, ob der Grenzwert einer konvergenten Folge stetiger Funktionen wieder stetig ist. Dies ist im allgemeinen falsch, wie das Beispiel $I = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ lehrt. Es gilt

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

und die Grenzfunktion f ist bei $x = 1$ unstetig. Die Frage, ob die Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist, hängt mit der Frage nach der *Vertauschbarkeit von Grenzprozessen* zusammen. Sei f_n stetig auf I und $f_n \to f$ konvergiere punktweise. Die Stetigkeit von f ist äquivalent dazu, dass für jede in I konvergente Folge $x_m \to x$ gilt:

$$\lim_m f(x_m) = f(\lim_m x_m)$$

Man ist nun versucht,

$$\lim_m f(x_m) = \lim_m \lim_n f_n(x_m) \stackrel{???}{=} \lim_n \lim_m f_n(x_m) = \lim_n f_n(x) = f(x) = f(\lim_m x_m)$$

zu argumentieren, und so die Stetigkeit von f zu zeigen. Die erste Gleichung ist die punktweise Konvergenz $f_n \to f$, die dritte folgt aus der Stetigkeit von f_n, die vierte ist wieder die punktweise Konvergenz $f_n \to f$, und die fünfte die Voraussetzung $x_m \to x$. Das Problem ist die zweite Gleichung, die leider im allgemeinen falsch ist.

Die Lösung besteht im Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz*. Man sagt, f_n konvergiere gleichmäßig gegen f, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(x, \epsilon) : \forall n \geq n_0, \forall x \in I : \; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Man mache sich klar, worin der Unterschied zur punktweisen Konvergenz liegt (zu Hause, in Ruhe). Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist wieder stetig (folgt in der nächsten Vorlesung).

15.12. Beweis des Satzes, dass die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist. Begriff Supremumsnorm $\|f\|_I := \sup\{|f(x)| | x \in I\} \in \mathbb{R}$.

Es gilt: $f_n \to f$ gleichmäßig auf I genau dann wenn $\|f - f_n\|_I$ eine Nullfolge ist. Außerdem gilt folgende Version des Cauchy-Konvergenzkriteriums: eine Funktionenfolge f_n konvergiert genau dann gleichmäßig wenn für alle $\epsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $\|f_n - f_m\| < \epsilon$.

Gleichmäßige Konvergenz und Differenzierbarkeit: sei $a < b$ und $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Ferner sei die Funktionenfolge $(f_n')_n$ gleichmäßig konvergent und es gebe ein $x_0 \in [a,b]$, so dass die zahlenfolge $f_n(x_0)$ konvergiert. Dann konvergiert f_n gleichmäßig, die Grenzfunktion f ist differenzierbar und es gilt $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$; d.h. Grenzwertbildung und Differentation sind vertauschbar.

18.12. Potenzreihen, also Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, wobei (a_k) eine feste Zahlenfolge ist und $x \in \mathbb{R}$. Dies kann als Funktionenfolge mit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ aufgefasst werden. Beispiele sind die geometrische Reihe, die Exponentialreihe und die Sinus- bzw. Cosinusreihe. Sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gegeben. Man setzt

$$R := \sup\{|y| | (a_k y^k) \text{ ist eine beschränkte Zahlenfolge}\},$$

wobei $R = \infty$ zu setzen ist, falls diese Menge nicht beschränkt ist. Man nennt R den *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Nun gilt:

(1) Für $|x| < R$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ konvergent.
(2) Für $|x| > R$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ divergent.
(3) Für $0 \leq r < R$ konvergiert die Reihe gleichmß̈ig auf $[-r, r]$,

Es wird keine Aussage über die Konvergenz für $|x| = R$ getroffen. Quotientenkriterium: falls $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k k}| =: Q$ existiert, so kann man den Konvergenzradius durch die einfache Formel $R = \frac{1}{Q}$ berechnen (hier ist ausnahmsweise $\frac{1}{0} = \infty$ zu setzen).

Folgerung: die Grenzfunktion f ist auf $(-R, R)$ stetig.

Man kann nun die formal abgeleitete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)x^k$ betrachten. Es gilt: Wenn die formal abgeleitete Reihe auch in $(-R, R)$ konvergiert, so ist die Grenzfunktion $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ auf $(-R, R)$ differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$ (man kann zeigen, dass der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe gleich dem Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe ist, aber das wird hier nicht benötigt).

Diskussion der Exponentialreihe $\exp : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$. Der Konvergenzradius ist, wie man mit dem Quotientenkriterium einsieht, gleich ∞. Also ist die Grenzfunktion exp auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Die abgeleitete Reihe der Expoentialreihe ist gleich der Exponentialreihe. Deshalb ist der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe ebenfalls ∞. Es ergibt sich, dass exp differenzierbar ist, und dass

$$\exp'(x) = \exp(x);\ \exp(0) = 1$$

gilt. Aus dieser Tatsache lassen sich alle Eigenschaften der Expoentialfunktion ableiten. Es gilt

(1) $\exp(-x)\exp(x) = 1$ (die Ableitung der Funktion $x \mapsto \exp(x)\exp(-x)$ ist Null)
(2) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = f$, so gilt $f(x) = f(0)\exp(x)$.
(3) Es gilt $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
(4) $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist streng monotn steigend und bijektiv.

Die Exponentialfunktion hat eine Umkehrfunktion $\ln = \log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, der natürliche Logarithmus. Es gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Aus dem Additionstheorem der Exponentialfunktion folgt, dass $\exp(nx) = \exp(x)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies rechtfertigt die Notation $e := \exp(1)$, $e^x := \exp(x)$.

5.1. Diskussion der Winkelfunktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$. Durch gliedweise Differentation der definierenden Potenzreihen ergibt sich $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$. Diese Differentialgleichungen, zusammen mit den trivialen Identitäten $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, sind alles, was nötig ist, um die Winkelfunktionen zu diskutieren. Zunächst gilt

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

Des weiteren gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y);\ \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).$$

Für die Addtionstheoreme gibt es zwei (eng verwandte) Merkregeln. Die erste benutzt die lineare Algebra. Man definiert für $x \in \mathbb{R}$ die 2×2-Matrix

$$R_x := \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

und die Addtionstheoreme lassen sich in der Formel $R_{x+y} = R_x R_y$ zusammenfassen. Die zweite Merkregel benutzt die komplexen Zahlen. Für $x, y \in \mathbb{R}$ betrachte die komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Man definiert

$$\exp(z) = e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Die Addtionstheoreme der Winkelfunktionen, zusammen mit dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion, ergeben die Formel $e^{z+w} = e^z e^w$, gültig für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Es wird sich später (Analysis II und Funktionentheorie) herausstellen, dass die Definition der Exponentialfunktion im Komplexen alles andere als zufällig und mehr als ein bloßer Rechentrick ist.

Der Cosinus besitzt eine Nullstelle $x_0 > 0$. Dies folgt durch eine Widerspruchsbeweis, den Mittelwertsatz der Differentialrechnung benutzend. Wir *definieren* die Kreiszahl π als das Doppelte der kleinsten Nullstelle von cos, also

$$\pi := 2\inf\{x \geq 0 | \cos(x) = 0\}.$$

Da $\inf\{x \geq 0 | \cos(x) = 0\}$ ein Berührpunkt der Menge $\{x \geq 0 | \cos(x) = 0\}$ ist, existiert eine Folge x_n positiver Zahlen mit $\cos(x_n) = 0$ und $x_n \to \pi/2$. Aus der Stetigkeit des Cosinus folgt $\cos(\pi/2) = 0$, und da $\cos(0) = 1$ gilt $\pi/2 > 0$. Aus den Additionstheoremen folgt, dass die Funktionen sin und cos 2π-periodisch sind, also $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x + 2pi) = \cos(x)$.

Geometrische Deutung der Winkelfunktionen: der Vektor $(\cos(t), \sin(t))$ liegt auf dem Einheitskreis $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\} \subset S^1$. t ist der Winkel zwischen den Vektoren $(1, 0)$ und $(\cos(t), \sin(t))$, gemessen im Bogenmaß. Die durch die Matrix R_t definierte lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist Rotation um den Winkel t. Ein rechter Winkel, im Bogenmaß gemessen, ist $\pi/2$. Die aus der Schule bekannte Interpretation der Kreiszahl als "2π= Bogenlänge des Einheitskreises" ist richtig, den dafür nötigen Begriff der Bogenlänge haben wir jedoch noch nicht entwickelt.

2.5. **Integralrechnung.**

8.1. Anschauliche Erklärung des Integrals als Inhalt der Fläche, die zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f liegt. Der Begriff "Flächeninhalt" ist (noch) nicht präzise definiert. Bei der Definition des Integrals gehen wir axiomatisch vor und übersetzen zunächst anschaulich klare Eigenschaften dieses Flächeninhaltes in mathematisch genaue Axiome. Später wird dann formal gezeigt, wie man die Axiome erfüllen kann.

Für $a < b$ sein ein Vektorraum $I_{a,b}$ von Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$ ausgezeichet, welche *integrierbare Funktionen* heißen sollen. Außerdem sei eine lineare Abbildung $\int_a^b : I_{a,b} \to \mathbb{R}$ gegeben, $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$. $I_{a,b}$ und das Integral gehorchen gewissen Axiomen: konstante Funktionen liegen in $I_{a,b}$, und wenn $f|_{[a,c]} \in I_{a,c}$ sowie $f|_{[c,b]} \in I_{c,b}$, so ist $f \in I_{a,b}$. Das Integral ist monoton ($f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geq 0$), intervalladditiv ($\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$) und normiert ($f \equiv C \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = C(b - a)$).

Das Ziel der weiteren Überlegungen ist die Konstruktion eines solchen Vektorraumes integrierbarer Funktionen und Integrals, welcher alle stetigen Funktionen enthält. Der erste Schritt ist die Betrachtung von Treppenfunktionen. Definition Treppenfunktion, Zerlegung, Verfeinerung einer Zerlegung. An eine Treppenfunktion angepasste Zerlegung. Ist $Z = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Zerlegung und $f(x) = f_i$ für $x_{i-1} < x < x_i$, so setzt man

$$\int_{a,Z}^{b} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - x_{i-1}).$$

Die Menge $T_{a,b}$ der Treppenfunktionen erfüllt die Axiome für die Menge der integrierbaren Funktionen und das Integral hängt nicht von der Wahl der angepassten Zerlegung ab. Der Beweis ist etwas technisch, aber die Hauptschwierigkeit liegt ausschließlich darin, geschickte Notation zu finden. Das Integral für Treppenfunktionen erfüllt die Axiome für das Integral (Beweis folgt in der nächten Stunde).

12.1. Ende des Beweises, dass das Integral von Treppenfunktionen die Integralaxiome erfüllt. Definition des Ober- und Unterintegrals einer beschränkten Funktion. Das Unterintegral $\int_{a,*}^{b} f(t)dt$ ist das Supremum aller $\int_a^b \phi(t)dt$, wobei $\phi \leq f$ eine Treppenfunktion ist. Analog ist das Oberintegral $\int_a^{b,*} f(t)dt$ das Infimum aller $\int_a^b \psi(t)dt$, wobei $\psi \geq f$ eine Treppenfunktion ist. Für jede Funktion f gilt $\int_{a,*}^{b} f(t)dt \leq \int_a^{b,*} f(t)dt$. f heißt Riemann-integrierbar, falls $\int_{a,*}^{b} f(t)dt = \int_a^{b,*} f(t)dt$ und das Riemann-Integral ist $\int_a^b f(t)dt := \int_{a,*}^{b} f(t)dt = \int_a^{b,*} f(t)dt$.

Bemerkung: Treppenfunktionen sind Riemann-integrierbar, und in diesem Fall stimmen das Integral für Treppenfunktionen und das Riemann-Integral überein (und wir können für beide Integralbegriffe dieselbe Notation verwenden, ohne ein Verwechselungsrisiko einzugehen).

Um mit dem Riemann-Integral arbeiten zu können, ist folgende Umformulierung der Definition nützlich (ich versuche, eine bessere Erklärung als in der Vorlesung zu geben). Für eine (beschränkte) Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(1) f ist Riemann-integrierbar.
(2) Für jedes $\epsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T_{a,b}$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ und $\int(\psi(t) - \phi(t))dt < \epsilon$.
(3) Es existieren Folgen $(\phi_n)_n$ und $(\psi_n)_n$ von Treppenfunktionen mit $\phi_n \leq f \leq \phi_n$ und $\lim_n \int_a^b(\psi(t) - \phi(t))dt = 0$.

Dass die zweite und dritte Eigenschaft äquivalent sind, ist kaum mehr als die Definition der Konvergenz. Für die Äquivalenz der ersten und zweiten Eigenschaft beachte man folgendes. Seien $M, N \subset \mathbb{R}$. Es gelte: $(x \in M, y \in N) \Rightarrow x \leq y$. Dann gilt $\sup(M) \leq \inf(N)$. Des weiteren sieht man

$$\sup(M) = \inf(N) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \exists x \in M, y \in N \text{ mit } y - x < \epsilon).$$

Diese Beobachtung, angewendet auf M = Menge der $\int_a^b \phi$ mit $\phi \leq f$ und N= Menge der $\int_a^b \psi$ mit $\psi \geq f$, zeigt die Implikation $2 \Rightarrow 1$.

Falls f Riemann-integrierbar ist, und ϕ_n, ψ_n wie in 3, so gilt ferner:

$$\int_a^b \phi_n(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b \psi_n(t)dt \text{ und } \lim_n(\int_a^b \psi(t)dt - \int_a^b \phi(t)dt) = 0$$

und daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt$.

Satz: Die Menge $R_{a,b}$ und das Riemann-integral erfüllen die Axiome für das Integral. Beweis, dass $R_{a,b}$ ein Vektorraum ist und das $\int_a^b$ linear ist. Der Beweis führt alles auf die Linearität des Integrals für Treppenfunktionen zurück.

15.1. Ende des Beweises, dass das Riemann-Integral alle Axiome erfüllt. Drei wichtige Abschätzungen: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:

(1) Ist $C_1 \leq f(x) \leq C_2$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt $C_1(b - a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq C_2(b - a)$. Das folgt sofort aus der Monotonie des Integrals. Insbesondere ist $(b - a)\inf\{f(x)|x \in [a, b]\} \leq \int_a^b f(t)dt \leq \sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$.
(2) Es gilt stets $|\int_a^b f(t)dt| \leq \|f\|_{[a,b]}|b - a|$ (auch für $b < a$).
(3) Ist f integrierbar, so auch $|f|$, und es gilt $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Die dritte Abschätzung kann als Version der Dreiecksungleichung angesehen werden. Sei f eine Treppenfunktion, mit angepasster Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und $f(x) = f_i$ für $x_{i--1} < x < x_i$. Dann gilt, nach der Dreiecksungleichung und weil $x_i > x - i - 1$:

$$|\int_a^b f(t)dt| = |\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f_i| \leq \sum_{i=1}^n |(x_i - x_{i-1})f_i| = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})|f_i| = \int_a^b |f(t)|dt,$$

also gilt die Ungleichung für alle Treppenfunktionen.

Sei f_n Riemann-integrierbar, und $f_n \to f$ gleichmäßig konvergent. Dann ist auch f integrierbar, und es gilt $\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wähle n_0 mit $\|f - f_n\|_{[a,b]} < \epsilon$ für alle $n \geq n - 0$, sowie Treppenfunktionen $\phi \leq f_{n-0} \leq \psi$ und $\int_a^b((\psi_n - \phi_n)dt < \epsilon$. Dann ist $f_{n_0} - \epsilon < f < f_{n_0} + \epsilon$ und daher $\phi - \epsilon < f < \psi + \epsilon$, und das impliziert

$$\int_a^b (\psi + \epsilon) - (\phi - \epsilon) \leq \epsilon(1 + 2(b - a)).$$

Daraus folgt, dass f integrierbar ist. Die Grenzwertformel ist einfach:

$$|\int_a^b (f - f_n)dt| \leq (b - a)\|f - f_n\|_{[a,b]} \to 0.$$

Um zu zeigen, dass stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind, ist ein neuer Begriff nötig. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmßig stetig*, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Zum Vergleich: f ist stetig auf ganz I, wenn gilt

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(x, \epsilon) > 0 : \forall y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Der Punkt ist, dass für gleichmäßige Stetigkeit das δ unabhängig von x gewählt werden kann. Beispiel: $I = (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Bekanntlich ist f stetig, und für $x \in (0, 1]$ und $\epsilon > 0$ ist $\delta(x, \epsilon) := \frac{\epsilon x^2}{1+\epsilon x}$ das beste also grösste δ, das die Stetigkeitsdefinition erfüllt. Nun beachte man, dass für $x \to 0$ $\frac{\epsilon x^2}{1+\epsilon x} \to 0$ gilt. Also kann man δ hier nicht unabhängig von x wählen, und daher ist f nicht gleichmäßig stetig.

19.1. Stetige Funktionen auf kompkaten Intervallen sind gleichmäßig stetig. Der Beweis basiert auf dem Satz von Bolzano-Weierstrass und wird durch Widerspruch geführt. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig, so gibt es $\epsilon > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ Punkte $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. Also gibt es Folgen $x_n, y_n \in [a, b]$ mit $|x_n - y_n| < 1/n$ und $< f(x_n - f(y_n)| \geq \epsilon$. Nach Wahl einer Teilfolge (Bolzano-Weierstrass) können wir annehmen, dass $x_n \to x$ und daher auch $y_n \to x$. Weil f stetig ist, folgt $\lim_n (f(x_n) - f(y_n)) = f(x) - f(x) = 0$, im Widerspruch zu $< f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ für alle n.

Anwendung: stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind Riemann-integrierbar. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt nämlich, dass es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, welche gleichmäßig gegen f konvergiert.

22.1. Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. Erster Hauptsatz: ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die durch $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ definierte Funktion auf $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$. Zweiter Hauptsatz: ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und ist $F' : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$. Der zweite Hauptsatz folgt aus dem ersten, sofern F' zusätzlich als steitg vorausgesetzt ist.

Die Berechnung von Integralen wird durch die Hauptsätze ermöglicht. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so nennen wir eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Stammfunktion*, falls $F'(x) = f(x)$ (für alle x) gilt. Jede stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion (1. Hauptsatz), und je zwei Stammfunktionen unterscheiden sich um eine Konstante. Ist F eine Stammfunktion der stetigen Funktion f, so gilt also

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Während das Berechnen von Ableiten mechanisch funktioniert, ist das Auffinden von Stammfunktionen ist eine hohe Kunst. Zunächst liefert jede Ableitungsformel eine Integralformel, durch Umkehrung. Die sogenannten *Grundintegrale* ergeben sich aus den Formeln

$$\frac{d}{dx}(x^s) = sx^{s-1};\ \frac{d}{dx}e^x = e^x;\ \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x);\ \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

sowie

$$\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x};\ \frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ \frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Die Produktregel der Differentiation liefert die *partielle Integration*:

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt,$$

wobei wir

$$[F]_a^b := F(b) - F(a)$$

setzen. Mit der partiellen Integration glückt zum Beispiel die Berechnung $(a, b > 0)$

$$\int_a^b \log(t)dt = \int_a^b (\frac{d}{dt}t)\log(t)dt = [x\log(x)]_a^b - \int_a^b t\frac{d}{dt}\log(t)dt = [x\log(x)]_a^b - \int_a^b t\frac{1}{t}dt = [x\log(x) - x]_a^b.$$

26.1. Substitutionsformel. Ist I ein Intervall, $\phi : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar, und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)ds.$$

Man kann sich die Formel auf folgende Art merken: man setze $s = \phi(t)$. Es gilt dann $\frac{ds}{dt} = \phi'(t)$, woraus ein Physiker $ds = \phi'(t)dt$ folgert. Diese Schlussweise ist mit dem in diesem Semester entwickelten Intrumentarium nicht mit mathematischem

Inhalt zu füllen, kann aber dennoch rigoros begründet werden (Analysis II). Das unbestimmte Integral ist dann

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(s)ds,$$

und ist F eine Stammfunktion von f, so berechet man weiter

$$\int f(s)ds = F(s) = F(\phi(t)),$$

wonit auch die Integrationsgrenzen korrekt werden. Die Handhabung der Substitutionsformel verlangt einige Erfahrung. Als Beispiel berechne mit der Substitution $x = \sin(t)$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos(t)^2 dt.$$

Nun ist nach dem Additionstheorem $\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2 = 2\cos(t)^2 - 1$, also

$$\int \cos(t)^2 dt = \int \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)dt.$$

Eine Stammfunktion ist

$$\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t$$

und Rücksubstitution $t = \arcsin(x)$ zeigt dann

$$\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t = \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + \frac{1}{2}\arcsin(x).$$

Aus dem Additionstheorem für den Sinus erhält man die Verdoppelungsformel $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y) = 2\sin(y)\sqrt{1-\sin(y)^2}$, also durch Einsetzen

$$\frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + \frac{1}{2}\arcsin(x)) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x).$$

Das bestimmte Integral ist dann z.B.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\pi$$

was die bekannte Formel für die Fläche des Einheitskreises liefert.

Uneigentliche Integrale: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig, aber nicht notwendigerweise beschränkt, und $a = -\infty$ und $b = \infty$ sind erlaubt. Dann ist das *uneigentliche Integral* wie folgt definiert. Man fixiere $a < c < b$ und setzt

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \searrow a} \int_x^c f(t)dt + \lim_{t \nearrow b} \int_c^x f(t)dt,$$

falls beide Grenzwerte existieren. Die Existenz beider Grenzwerte sowie der Wert von deren Summe hängen nicht von der Wahl von c ab. Man beachte aber, dass man beide Grenzwerte separat nehmen muss. Zum Beispiel ist

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} tdt = \lim_{R\to\infty} 0 = 0,$$

aber die Grenzwerte $\lim_{R\to\pm\infty} \int_0^R tdt$ existieren natürlich nicht.

References

[1] O. Forster: *Analysis I*. Springer Verlag, 11.Auflage (2012).
[2] K. Königsberger: *Analysis I*. Springer Verlag, 2. Auflage (1992).
[3] Theodor Bröcker: *Analysis I*. Spektrum Verlag, 2. Auflage (1999).