Prof. Dr. J. Ebert PD Dr. T. Timmermann

Übung zur Analysis 1
Probeklausur

Aufgabe 1. (a) Wie ist das Supremum einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ definiert?

(b) Was besagt der Satz von Bolzano-Weierstrass?

(c) Was besagt der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung?

Aufgabe 2. (a) Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen reeller Zahlen, $c \in \mathbb{R}$ und $a_n \leq c \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Prüfen Sie die Folgen $(d_n)_n$ und $(e_n)_n$, gegeben durch

$$d_n = \frac{n^2+n-1}{2n^2-3}, \qquad e_n = \sqrt{n^2+1} - n,$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert.

Aufgabe 3. Zeigen Sie für jede der beiden Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x, \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|,$$

einmal mit Folgen und einmal mit ϵ und δ, dass sie stetig ist.

Aufgabe 4. Prüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und begründen Sie Ihre Antwort.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2n+1}.$$

Aufgabe 5. Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(a) g ist stetig in 0 und $g(0) = 0$,

(b) $f(x) \leq f(y) + g(x-y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass dann die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n \exp(-x),$$

alle lokalen Extrema, das globale Maximum und globale Minimum, falls diese existieren, und das Verhalten für $x \to \infty$.

Aufgabe 7. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2}{\exp(x)-1}.$$

(a) Kann die Funktion in 0 stetig fortgesetzt werden?

(b) Zeigen Sie, dass $\exp(x_0)(2-x_0) = 2$ für jede lokale Extremstelle $x_0 \in (0,\infty)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\exp(x_0)(2-x_0) = 2$ in $(0,\infty)$ genau eine Lösung x_0 hat.