Prof. J. Ebert, Dr. U. Pennig WS 2014/2015, WWU Münster

POSITIVE SKALARKRÜMMUNG

SEMINAR

Die skalare Krümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist die einfachste aller Krümmungsinvarianten. Anschaulich gibt ihr Wert an einem Punkt an, in welchem Verhältnis das Volumen eines geodätischen Balls vom Radius r um den Punkt zum entsprechenden Volumen eines Balls vom Radius r im euklidischen Raum steht. Eine Folgerung aus dem Trichotomiesatz von Kazhdan und Warner besagt nun, dass für jede Funktion auf M, die an mindestens einem Punkt $x \in M$ einen negativen Wert annimmt, eine Metrik existiert, die diese Funktion als skalare Krümmung hat. Umso erstaunlicher ist es, dass es für die Existenz von Metriken *positiver* skalarer Krümmung Obstruktionen gibt. Eine von diesen hat ihre Ursprünge in der Indextheorie: Sie beruht auf dem Dirac-Operator auf Spin-Mannigfaltigkeiten und soll im Rahmen dieses Seminars studiert werden.

Vorläufiges Vortragsprogramm

Indexobstruktionen gegen Positive Skalarkrümmung

Die Spin-Gruppen (Matthias Kemper).
In diesem Vortrag sollen die Gruppen Spin(n) eingeführt werden. Die Spin-Gruppe ist (für $n \geqslant 3$) die universelle Überlagerung der Rotationsgruppe $SO(n)$; für uns ist aber eine konkrete Realisierung mittels Cliffordalgebren relevant. Inhalt des Vortrages: Wiederholung Cliffordalgebren, Darstellungstheorie der Cliffordalgebren. Definition der Spingruppe [LM89, Definition I.2.3]. Darüber soll auf die Liealgebra von Spin(n) eingegangen werden, insbesondere ist [LM89, Prop. I. 6.2] (siehe auch [Nic07, S. 539 ff] sehr wichtig.
Literatur: [ABS64, Part I], [LM89, I, §1–6], [Roe98, Chapter 4], [Nic07, 11.1.6].
Ein leicht verschiedener Zugang ist im Übungsblatt
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/jeber_02/indextheory/sheet5.pdf skizziert.

Bemerkung: der Sprecher kontaktiere uns unbedingt, um den Stoff einzugrenzen.

Grundlagen der Spin-Geometrie (Lukas Buggisch).
Von grundlegender Bedeutung für das Seminar sind Spin-Strukturen auf Vektorbündeln, das heißt Reduktionen der Strukturgruppe des Rahmenbündels zur Gruppe Spin(n). Eine solche Reduktion existiert nicht immer, es gibt aber ein präzises Kriterium, dass die Stiefel-Whitney-Klassen benutzt. Aus einer gegebenen Spinstruktur und einer Darstellung der Spingruppe lässt sich ein neues Vektorbündel, das Spinorbündel [LM89, II.2.3],

ableiten, auf dessen glatten Schnitten der Dirac-Operator wirkt. Analog zu gerahmtem oder orientiertem Bordismus lassen sich auch Spin-Bordismusgruppen von Spin- Mannigfaltigkeiten betrachten, die ebenfalls im Rahmen dieses Vortrags definiert werden sollten [LM89, Definition II.2.16].
Literatur: [LM89, II, §1–3]

Reelle K-Theorie (Federico Cantero).
In diesem Vortrag soll die Bott-Periodizität für reelle K-Theorie besprochen werden. Man folge hier dem genialen Beweis von Atiyah [Ati66], der den Satz auf eine kleine Erweiterung der komplexen Periodizität zurückführt. Im selben Aufwasch wird der Satz von Atiyah-Bott-Shapiro bewiesen [ABS64, Theorem 11.5]. Der Beweis des Thom-Isomorphismus in reeller K-Theorie ist dann einfach.
Literatur: [Ati66], [ABS64], [LM89], [Ebe].

Warnung: dieser Vortrag setzt eine erhebliche Eigenleistung voraus und die Referenz [Ebe] ist unbedingt zu konsultieren.

Geometrische Dirac-Operatoren (Paul Bubenzer).
Ein Dirac-Operator ist ein Differentialoperator erster Ordnung, der auf den glatten Schnitten eines Vektorbündels operiert, und dessen Symbol eine gewisse Identität erfüllt. Ein geometrischer Dirac-Operator ist ein spezieller Dirac-Operator, welcher mit der Geometrie der Mannigfaltigkeit in enger Beziehung steht. Die Zutaten für die Definition werden im Begriff des Dirac-Bündels [Nic07, 11.1.64], siehe auch [LM89, II.5], zusammengefasst. Der Hodge-de Rham Operator [Nic07, 11.2.1], [LM89, II.5.12] und der Signatur-Operator [LM89, II.6.2] sind wichtige Beispiele. Zu Beginn des Vortrages soll auch noch auf den Levi-Civita-Zusammenhang auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit eingegangen werden. Auf jeden Fall besprochen werden sollte aber der Spin-Dirac Operator [Nic07, 11.2.3], und auch die Tatsache, dass geometrische Dirac-Operatoren immer formal selbstadjungiert sind, ist wichtig und nichttrivial [Nic07, 11.1.66] oder [LM89, Prop II.5.6].
Literatur: [LM89, II] [Nic07, 11.1 und 11.2]

Die Bochner-Methode für Dirac-Operatoren (Robin Loose).
Dieser Vortrag soll schließlich das eigentliche Obstruktionsargument behandeln: zu Beginn ist auf den Riemannschen Krümmungstensor und seine Symmetrien einzugehen, [Nic07, 4.2]. Dann wird die Bochner-Weitzenböck-Formel benötigt, die das Quadrat eines geometrischen Dirac-Operators mit der Krümmung des zugehörigen Zusammenhangs in Verbindung bringt [LM89, II.8.2], [Nic07, 11.1.67]. Im Spezialfall des Spin-Dirac Operators taucht an dieser Stelle die Skalarkrümmung auf [LM89, II.8.8], [Nic07, 11.2.3]. Dieser Teil des Vortrags verlangt einen geübten Umgang mit Vorzeichen! Nach dem Indexsatz von Atiyah und Singer ist der analytische Index des Dirac-Operators gleich einer topologischen Größe, dem $\hat{A}$-Geschlecht [LM89], [Ati68]. Die Berechnung des Kerns des

Dirac-Operators [LM89, II.5.4] ist ebenso Teil dieses Vortrags, wie das vollständige Argument von Lichnerowicz [LM89, II.8.9].
Literatur: [LM89, II], [Nic07, 11.1 und 11.2]

Vergrösserbarkeit und positive Skalarkrümmung (William Gollinger).
Von Mannigfaltigkeiten, die keine Metrik positiver skalarer Krümmung zulassen, wird erwartet, dass sie eine "große" Fundamentalgruppe besitzen, wobei letztere natürlich durch Überlagerungen in die geometrischen Betrachtungen eingeht. Diese Idee führte Gromov und Lawson auf den Begriff der vergrößerbaren Mannigfaltigkeiten: Ein solches M besitzt für alle $\epsilon > 0$ eine Überlagerung, die eine ϵ-kontrahierbare Abbildung auf die Riemannsche Standardsphäre zulassen, die nichtverschwindenden Grad besitzt. Eine geschlossene Mannigfaltigkeit nichtpositiver Schnittkrümmung ist vergrößerbar (beispielsweise Tori und hyperbolische Mannigfaltigkeiten). In diesem Vortrag sollte die obige Definition präzisiert werden, um dann den folgenden Satz zu beweisen: Sei M eine vergrößerbare Mannigfaltigkeit, dann trägt M keine Metrik positiver skalarer Krümmung. [GL80b, Theorem A] oder [LM89, IV.5.5]. Außerdem beweise man [LM89, Theorem 5.3] und [LM89, Theorem 5.4], letzteres mit Fokus auf den Fall A. Ebenfalls bietet sich die Erweiterung auf den Begriff "$\hat{A}$-vergrößerbar" an.
Literatur: [GL80b], [LM89, IV, §5]

Positive Skalarkrümmung und Kobordismus

Der Chirurgiesatz von Gromov-Lawson I (Ulrich Pennig).
Ist M eine Mannigfaltigkeit mit einer Metrik positiver Skalarkrümmung und geht N aus M durch eine Chirurgie der Kodimension $\geqslant 3$ hervor, so trägt auch N eine Metrik positiver Skalarkrümmung. Dies ist das Hauptergebnis von [GL80a]. In diesem Vortrag soll es um die *Formulierung* gehen, sowie um wichtige *Folgerungen*: Jede kompakte einfach zusammenhängende Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension $\geqslant 5$, die spinkobordant ist zu einer Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung, trägt ebenfalls positive Skalarkrümmung, [GL80a, Theorem B]. Dies benutzt den h-Kobordismussatz! Des weiteren folgerten Gromov und Lawson, dass jede kompakte einfach zusammenhängende *Nicht-Spin*-Mannigfaltigkeit der Dimension $\geqslant 5$, eine Metrik positiver Skalarkrümmung trägt, [GL80a, Theorem C]. Im Spin-Fall bewies Stolz [Sto92], dass eine einfach zusammenhängende Spin-Mannigfaltigkeit M der Dimension $\geqslant 5$ genau dann eine Metrik positiver Skalarkrümmung besitzt, wenn die alpha-Invariante $\alpha(M)$ (der Index des Dirac-Operators!) verschwindet. Die beiden letzteren Sätze benutzen tiefe Ergebnisse der stabilen Homotopietheorie, und mehr als ein grobe Skizze kann hier nicht gegeben werden. Ein Überblick über Stolz' Ergebnis ist in [Sto90] zu finden.
Literatur: [GL80a]

Der Chirurgiesatz von Gromov-Lawson II (Georg Frenck).
In diesem Vortrag sollte der Beweis des Chirurgiesatzes von Gromov vorgeführt werden. Als Quelle ist hier neben [GL80a] unbedingt auch [RS01, Theorem 3.1] zu Rate zu ziehen, da das ursprüngliche Argument von Gromov und Lawson einen Fehler enthält. Der Beweis erfordert ein vorsichtige Wahl der Metrik auf den Chirurgiedaten, damit die Bedingung positiver Skalarkrümmung nicht verletzt wird. Gromov und Lawson reduzieren die zugehörige Konstruktion auf ein eindimensionales radialsymmetrisches Problem, das in der Arbeit von Rosenberg und Stolz gelöst wird. Der Vortrag erfordert ein gewisses Maß an Eigeninitiative und eine Vorliebe für technische Details.
Literatur: [GL80a], [RS01]

Relativer Index (Johannes Ebert).
Gromov und Lawson bewiesen den folgenden relativen Indexsatz: Seien M_0 und M_1 nicht notwendigerweise kompakte vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten und sei D_i ein Dirac-Operator auf M_i. Falls diese Operatoren strikt positiv bei unendlich sind und außerhalb einer kompakten Menge übereinstimmen, dann gilt: $\mathrm{ind}(D_1^+) - \mathrm{ind}(D_0^+) = \mathrm{ind}_t(D_1^+, D_0^+)$, wobei $\mathrm{ind}_t(D_1^+, D_0^+)$ ein relativer topologischer Index ist. Sei M eine kompakte Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit ungerader Dimension und seien g_0, g_1 Metriken positiver skalarer Krümmung auf M, dann lässt sich mit Hilfe des relativen Index eine Invariante $i(g_0, g_1)$ konstruieren, die feststellt, ob g_0 und g_1 in derselben Wegzusammenhangskomponente im Raum positiver Skalarkrümmungsmetriken liegen. Als Korollar aus dem relativen Indexsatz folgt so zum Beispiel, dass der Raum der psc-Metriken auf S^7 unendlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt. Im Seminarvortrag sollten so viele Details wie möglich zur Konstruktion des relativen Index und der Invarianten $i(g_0, g_1)$ gegeben und das angegebene Korollar bewiesen werden. Der Vortrag stellt eine Herausforderung dar und sollte unbedingt in Kommunikation mit den Organisatoren ausgearbeitet werden.
Literatur: [Ebe], [GL83]

Literatur

[Ati66] M. F. Atiyah, *K-theory and reality*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **17** (1966), 367–386.

[Ati68] ———, *The index of elliptic operators. III*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 546–604.

[LM89] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton mathematical series, Princeton University Press, 1989.

[GL80a] M. Gromov and H. B. Lawson, *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Annals of Mathematics (1980), 423–434.

[GL80b] ———, *Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group. I*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 2, 209–230.

[GL83] Mikhael Gromov and Jr. Lawson H. Blaine, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **58** (1983), 83–196 (1984).

[Nic07] Liviu I. Nicolaescu, *Lectures on the geometry of manifolds*, Second, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007.

[Roe98] John Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, Second, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 395, Longman, Harlow, 1998.

[RS01] Jonathan Rosenberg and Stephan Stolz, *Metrics of positive scalar curvature and connections with surgery*, Ann. of Math. Stud., vol. 149, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001.

[ABS64] M.F. Atiyah, R. Bott, and A. Shapiro, *Clifford modules*, Topology **3** (1964), no. suppl. 1, 3–38.

[Ebe] Johannes Ebert, *private communication.*

[Sto92] Stephan Stolz, *Simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math. (2) **136** (1992), no. 3, 511–540.

[Sto90] ———, *Simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **23** (1990), no. 2, 427–432.

Kontakt:

Johannes Ebert, Raum 506, johannes.ebert@uni-muenster.de

Ulrich Pennig, Raum 513, u.pennig@uni-muenster.de