VORLESUNG TOPOLOGIE I, WINTERSEMESTER 2016/17, ALGEBRAISCHE GRUNDLAGEN

JOHANNES EBERT

1. R-Moduln

1.1. **Definitionen.** Im folgenden sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Für die Topologie von Interesse sind die Ringe $\mathbb{Z}$ sowie die Primkörper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$, für Primzahlen p. Kompliziertere Ringe werden wir nicht betrachten.

Definition 1.1 (R-Modul, [1], p. 17)**.** *Ein* R-Modul *ist ein Paar* (M, μ)*, bestehend aus einer abelschen Gruppe* M *und einer Abbildung* $\mu : R \times M \to M$*,* $(r, m) \mapsto rm$*, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt.*

$$\begin{aligned} \mu(r, m + m') &= \mu(r, m) + \mu(r, m') \\ \mu(r + r', m) &= \mu(r, mm) + \mu(r', m) \\ \mu(rr', m) &= \mu(r, \mu(r', m)) \\ \mu(1, m) &= m \end{aligned}$$

für alle $r, r' \in R$ *sowie* $m, m' \in M$*.*

Die Abbildung μ fassen wir als Multiplikation von Elementen in M mit Elementen von R auf. Dementsprechend verwenden wir meist die Notation $rm := \mu(r, m)$, und wie in der Mathematik üblich, werden wir R-Moduln typischerweise nur mit dem Symbol M statt umständlich mit (M, μ) bezeichnen.

Definition 1.2. *Seien zwei* R*-Moduln* M *und* N *gegeben. Eine Abbildung* $f : M \to N$ *heißt* R-linear*, falls*

$$\begin{aligned} f(m + m') &= f(m) + f(m') \\ f(rm) &= rf(m) \end{aligned}$$

für alle $r \in R$ *und* $m, m' \in M$ *gilt. Die Menge der* R*-linearen Abbildungen* $f : M \to N$ *wird mit* $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ *bezeichnet.*

Bemerkung 1.3. *Sind* $f : M \to N$ *und* $g : N \to P$ R*-linear, so ist die Komposition* $g \circ f$ R*-linear. Daher bilden die* R*-Moduln eine Kategorie* $R - \mathrm{Mod}$*. Genauer gesagt: ein Objekt von* $R-\mathrm{Mod}$ *ist ein* R*-Modul, die Menge der Morphismen von* M *nach* N *ist* $\mathrm{Hom}_R(M, N)$*, und die Verknüpfung von* R*-linearen Abbildungen bildet die Komposition in der Kategorie* $R - \mathrm{Mod}$*.*

Beispiel 1.4. *Ist* R *ein Körper, so ist ein* R*-Modul dasselbe wie ein* R*-Vektorraum.*

Beispiel 1.5. *Ist* $R = \mathbb{Z}$*, so ist ein* $\mathbb{Z}$*-Modul "dasselbe" wie eine abelsche Gruppe* [1, p.17]*. Dies ist eine Übungsaufgabe auf Blatt 1.*

Date: 24. November 2016.

Beispiel 1.6. [1, p.18] *Seien M und N R-Moduln. Dann ist* $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ *wieder ein R-Modul, mit der Addition $(f+g)(m) := f(m)+g(m)$ und $(rf)(m) := f(rm)$. Es ist klar, dass $f+g$ R-linear ist, wenn f und g es sind. Um zu sehen, dass (rf) wieder R-linear ist, rechnet man wie folgt ($s \in R$):*

$$(rf)(sm) = f(rsm) = f(srm) = sf(rm) = s(rf)(m),$$

unter Ausnutzung der Kommutativität von R.

Beispiel 1.7. [1, p.18] *Sei M ein R-Modul und $f : N \to N'$ R-linear. Wir erhalten eine Abbildung*

$$f_* : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,N'), g \mapsto f \circ g.$$

Man rechnet ohne Idee nach, dass f_* R-linear ist, und dass $id_* = \mathrm{id}$, $(f \circ f')_* f_* \circ f'$. Auf diese Art und Weise wird $N \mapsto \mathrm{Hom}_R(M,N)$ zu einem kovarianten Funktor $R-\mathrm{Mod} \to R-\mathrm{Mod}$.

Beispiel 1.8. [1, p.18] *Analog induziert eine R-lineare Abbildung $f : M \to M'$ eine R-lineare Abbildung $f : \mathrm{Hom}_R(M',N) \to \mathrm{Hom}(M,N)$, $g \mapsto g \circ f$. Man rechnet einfach nach, dass $M \mapsto \mathrm{Hom}_R(M,N)$ ein kontravarianter Funktor $R-\mathrm{Mod} \to R-\mathrm{Mod}$ ist.*

1.2. **Untermoduln und Quotienten.**

Definition 1.9. [1, p.18] *Sei M ein R-Modul. Ein Untermodul N ist eine Teilmenge $N \subset M$, so dass für $n, n' \in N$ und $r \in R$ gilt: $n+n' \in N$, $rn \in N$.*

Beispiel 1.10. *Sei $f : M \to N$ R-linear. Der Kern*

$$\ker(f) := \{m \in M | f(m) = 0\} \subset M$$

und das Bild

$$\mathrm{im}(f) := \{f(m) | m \in M\} \subset N$$

sind Untermoduln.

Definition 1.11. *Sei $N \subset M$ ein Untermodul. Der* Quotientenmodul *M/N ist die Menge aller Nebenklassen $m+N \subset M$, $m \in M$, mit der Addition*

$$(m+N)+(m'+N) := m+m'+N$$

und Multiplikation

$$r(m+N) := rm+N.$$

Man rechne nach, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist. Die Abbildung $q : M \to M/N$, $q(m) := m+N$, ist R-linear. Oft schreibt man einfacher $[m] := q(m)$ für die Äquivalenzklasse des Elements $m \in M$.

Lemma 1.12. *Es sei $N \subset M$ ein Untermodul eines R-Moduln und es sei $f : M \to P$ eine R-lineare Abbildung in einen weiteren R-Modul mit $f(N) = 0$. Dann gibt es genau eine Abbildung $g : M/N \to P$ mit $g \circ q = f$.*

Der Beweis ist eine leichte Übung. Die Abbildung g wird auf Elementen durch $g(M+N) := f(m)$ definiert.

Definition 1.13. *Ist M ein R-Modul und $X \subset M$ eine Teilmenge, so sei $\langle X \rangle \subset M$ der kleinste Untermodul, der alle Elemente von X enthält. Gilt $\langle X \rangle = M$, so sagt man, dass M von X erzeugt wird. Ein Modul heißt* endlich erzeugt, *falls M von einer endlichen Teilmenge erzeugt wird.*

Die Menge $\langle A\rangle$ ist die Menge aller Linearkombinationen $\sum_{i=1}^n r_i x_i$, $r_i \in R$ und $x_i \in X$.

1.3. **Direkte Summe, direktes Produkt.**

Definition 1.14. *Sei I eine Menge und M_i, $i \in I$, eine Familie von R-Moduln. Die* direkte Summe *$\bigoplus_{i\in I} M_i$ ist der folgende R-Modul. Die Elemente von $\bigoplus_{i\in I} M_i$ sind die Familien $(m_i)_{i\in I}$ mit $m_i \in M_i$, so dass für alle bis auf endliche viele $i \in I$ $m_i = 0$ gilt. Die Addition und Skalarmultiplikation ist komponentenweise erklärt, also*

$$(m_i)_i + (m_i') := (m_i + m_i')_i;\ r(m_i)_i := (rm_i)_i.$$

Dies ist offensichtlich (wirklich?) ein R-Modul. Für jedes $j \in I$ sei $\iota_j : M_j \to \bigoplus_{iinI} M_i$ die Abbildung, die $m \in M_j$ auf die Familie $(m_i)_i$ schickt, welche durch $m_i := m$ für $i = j$ und $m_i = 0$ für $i \neq j$ gegeben ist.

Für zwei R-Moduln schreiben wir auch $M_1 \oplus M_2$ für die direkte Summe.

Lemma 1.15. *Die direkte Summe erfüllt folgende universelle Eigenschaft. Ist N ein weiterer R-Modul und sind $f_i : M_i \to N$ R-lineare Abbildung, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$, so dass $f \circ \iota_j = f_j$ gilt.*

Diese Abbildung ist durch $f((m_i)_i) := \sum_{i\in I} f_i(m_i) \in N$ gegeben. Wir schreiben oft auch $\sum_{i\in I} f_i$ für diese Abbildung.

Definition 1.16. *Sei I eine Menge und M_i, $i \in I$, eine Familie von R-Moduln. Das* direkte Produkt *$\prod_{i\in I} M_i$ ist der folgende R-Modul. Die Elemente von $\prod_{i\in I} M_i$ sind die Familien $(m_i)_{i\in I}$ mit $m_i \in M_i$ (ohne die Endlichkeitsbedingung). Die Addition und Skalarmultiplikation ist komponentenweise erklärt, also*

$$(m_i)_i + (m_i')_i := (m_i + m_i')_i;\ r(m_i)_i := (rm_i)_i.$$

Dies ist offensichtlich ein R-Modul. Für jedes $j \in I$ sei $p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ die Abbildung, die $(m_i)_i$ auf m_j schickt.

Für zwei R-Moduln schreibt man auch $M_1 \times M_2$ für das direkte Produkt.

Lemma 1.17. *Das direkte Produkt erfüllt folgende universelle Eigenschaft. Ist N ein weiterer R-Modul und sind $f_j : N \to M_j$ R-linear, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $f : N \to \prod_{i\in I} M_i$ mit $p_i \circ f = f_i$. Diese Abbildung schickt $n \in N$ auf die Familie $(f_i(n))_i$, und wird auch mit $(f_i)_i$ bezeichnet.*

Bemerkung: Es gilt $M \times N \cong M \oplus N$, aber für unendliche Summen/Produkte wird dies falsch.

1.4. **Freie R-Moduln.**

Beispiel 1.18. *Sei S eine Menge und R ein Ring. Wir betrachten die Menge $R\{S\}$ aller Funktionen $a : S \to R$, $a : s \mapsto a_s$ mit endlichem Träger (d.h., es gilt $a(s) = 0$ für alle bis auf endliche viele $s \in S$). Auf der Menge $R\{S\}$ ist wie folgt die Struktur eines R-Moduls erklärt. Seien $a, b \in R\{S\}$. Dann setze*

$$(a + b)_s := a_s + b_s$$
$$(ra)_s = ra_s.$$

Dieser R-Modul heißt der freie von der Menge S erzeugte R-Modul.

Ferner sei $\iota : S \to R\{S\}$ die Abbildung, welche durch

$$\iota(s)_t = \begin{cases} 1 & s = t, \\ 0 & s \neq t \end{cases}$$

festgelegt wird.

Lemma 1.19. *Sei S eine Menge und R ein kommutativer Ring. Sei ferner M ein R-Modul und $f : S \to M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $g : R\{S\} \to M$ mit $g \circ \iota = f$.*

Beweis. Übung. $\square$

Alternativ können wir $R\{S\}$ auch als die Menge der fomalen Linearkombinationen $\sum_{s \in S} a_s s$ mit $a_s \in R$ auffassen. Hierbei haben wieder alle bis auf endlich viele a_s zu verschwinden. Noch konkreter lässt sich eine endliche Linearkombination natürlich als

$$\sum_{i=1}^{m} a_i s_i, a_i \in R, s_i \in S,$$

schreiben.

Bemerkung 1.20. *$R\{S\}$ kann auch als direkte Summe $\bigoplus_{s \in S} R$ aufgefasst werden. Ist $S = \underline{n} = \{1, \ldots, n\}$, so schreibt man auch $R^n := R\{\underline{n}\}$. Dies verallgemeinert die aus der linearen Algebra bekannten Vektorräume K^n.*

Man kann jedes Element von $R\{S\}$ in eindeutiger Weise als Linearkombination $\sum_{s \in S} a_s s$ schreiben. Diese Eigenschaft ist aus der linearen Algebra bekannt, und drückt aus, dass S eine Basis von $R\{S\}$ ist. Wir sagen:

Definition 1.21. *Sei M eine R-Modul. Eine Abbildung $f : S \to M$, $s \mapsto f_s$, von einer Menge nach M heißt* Basis*, falls die induzierte Abbildung $R\{S\} \to M$ ein Isomorphismus von R-Moduln ist. Mit anderen Worten, jedes Element von M lässt sich in eindeutiger Art und Weise als Linearkombination $\sum_s a_s f_s$ mit $a_s \in R$, $a_s = 0$ für fast alle s, schreiben.*

Ein R-Modul heißt frei*, wenn er eine Basis besitzt.*

Beispiel 1.22. *Ist R ein Körper, so ist jeder R-Modul frei. Dies ist ein anderer Ausdruck der Tatsache, dass jeder Vektorraum eine Basis hat (Vorlesung Logische Grundlagen der Mathematik). Diese Aussage hängt vom Auswahlaxiom ab.*

Beispiel 1.23. *Die Gruppe $\mathbb{Z}/n$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul. Ebensowenig ist $\mathbb{Q}$ frei.*

1.5. **Tensorprodukt.**

Definition 1.24. *Seien M_1, M_2 und N R-Moduln. Eine Abbildung $f : M_1 \times M_2 \to N$ heißt* bilinear *falls*

$$\begin{aligned} f(r_1 m_1, r_2 m_2) &= r_1 r_2 f(m_1, m_2), \\ f(m_1 + m_1', m_2) &= f(m_1, m_2) + f(m_1', m_2), \\ f(m_1, m_2 + m_2') &= f(m_1, M_2) + f(m_1, m_2') \end{aligned}$$

für alle $r_i \in R$, $m_i, m_i' \in M_i$ gilt.

Definition 1.25. *Seien M, N R-Moduln. Ein* Tensorprodukt *von M und N ist ein R-Modul T, zusammen mit einer bilinearen Abbildung $t : M \times N \to T$, so dass folgende universelle Eigenschaft gilt: ist $f : M \times N \to P$ eine bilineare Abbildung, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $g : T \to P$ mit $g(t(m,n)) = f(m,n)$.*

Lemma 1.26. [1, Proposition 2.12] *Es existiert ein Tensorprodukt von M und N.*

Beweis. Wir beginnen die Konstruktion mit dem freien R-Modul $F(M,N) = R\{M \times N\}$, welcher von der Menge $M \times N$ erzeugt wird. Sei $U(M,N) \subset F(M,N)$ der Untermodul, welcher von folgenden Elementen erzeugt wird:

$$\begin{aligned} r(m,n) - (rm,n) \\ r(m,n) - (m,rn) \\ (m_1+m_2,n) - (m_1,n) - (m_2,n) \\ (m,n_1+n_2) - (m;n_1) - (m,n_2), \end{aligned}$$

wobei $m, m_1, m_2, n, n_1, n_2, r$ über ganz M, N und R läuft. Setze $T := F(M,N)/U(M,N)$ und $t(m,n) := [m,n] \in F(M,N)/U(M,N)$. Die dadurch definierte Abbildung $t : M \times N \to T$ ist bilinear, denn

$$t(rm,sn) = [rm,sn] = rs[m,n] = rst(m,n)$$

und

$$t(m_1+m_2,n) = [m_1+m_2,n] = [m_1,n] + [m_2,n]$$

etc. Wir bemerken, dass der von den Bildern $t(m,n)$ erzeugte Untermodul von T gleich T ist.

Nun müssen wir die universelle Eigenschaft nachweisen. Sei dafür $b : M \times N \to P$ bilinear. Wir definieren $h : F(M,N) \to P$ auf Erzeugern durch $h(m,n) := b(m,n)$. Dies ist R-linear. Weil b bilinear ist, gilt $h(U(M,N)) = 0$ (man rechne dies auf den Erzeugern von $U(M,N)$ nach), und daher induziert h eine Abbildung auf den Quotienten $g : F(M,N)/U(M,N) \to P$. Es gilt $g(t(m,n)) = b(m,n)$ nach Konstruktion. Die Eindeutigkeit von g ist klar, denn die Elemente $t(m,n)$ erzeugen T, und auf diesen Elementen ist g durch die Forderung $g \circ t = b$ eindeutig bestimmt. $\square$

Durch die universelle Eigenschaft ist das Tensorprodukt bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt. Genauer gesagt gilt

Lemma 1.27. [1, Proposition 2.12] *Seien (T,t) und (T',t') zwei Tensorprodukte von M und N. Dann gibt es genau einen R-linearen Isomorphismus $s : T \to T'$ mit $s \circ t = t'$.*

Beweis. Weil t' bilinear ist, gibt es wegen der universellen Eigenschaft von (T,t) genau ein $s : T \to T'$ mit $s \circ t = t'$. Analog schließt man die Existenz einer eindeutigen R-linearen Abbildung $\tilde{s} : T' \to T$ mit $\tilde{s} \circ t' = t$. Wir behaupten, dass $\tilde{s} \circ s = \mathrm{id}$ und $s \circ \tilde{s} = \mathrm{id}$ gilt.

Betrachte $\tilde{s} \circ s : T \to T$. Es gilt $\tilde{s} \circ s \circ t = \tilde{s} \circ t' = t$. Weil aber $t : M \times N \to T$ bilinear ist, gibt es *genau* eine Abbildung $u : T \to T$ mit $u \circ t = t$ (nämlich $u = \mathrm{id}$). Weil $\tilde{s} \circ s$ dies Eigenschaft hat, ist $\tilde{s} \circ s = \mathrm{id}$. Die Identität $s \circ \tilde{s} = \mathrm{id}$ beweist man analog, diesmal die universelle Eigenschaft von (T',t') ausnutzend. $\square$

Notation 1.28. *Wir setzen $M \otimes_R N := T$ und $m \otimes n := t(m,n)$. Es ist wichtig, zu beachten, dass das Symbol $m \otimes n$ nur dann eine Bedeutung hat, wenn mitgesagt wird, in welchem Tensorprodukt dies liegen soll.*

Wenn keine Verwechselung möglich ist, schreiben wir auch $M \otimes N := M \otimes_R N$.

Jedes Element in $M \otimes N$ lässt sich als endliche Summe

$$\sum_i m_i \otimes n_i$$

schreiben. Hierbei gelten folgende Gleichheiten:

$(m+m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$; $m \otimes (n+n') = m \otimes n + m \otimes n'$; $(rm) \otimes n = m \otimes (rn)$.

Die Darstellung ist also in keiner Weise eindeutig. Ist $b : M \times N \to P$ bilinear, so schreibt sich die induzierte Abbildung $M \times N \to P$ als

$$\sum_i m_i \otimes n_i \mapsto \sum_i b(m_i, n_i).$$

Ein gewisses psychologisches Problem im Umgang mit dem Tensorprodukt besteht darin, dass die Konstruktion sehr unanschaulich ist. Ein reales Problem ist es, dass kein wirklich handliches Kriterium dafür existiert, wann zwei Elemente $\sum_i m_i \otimes n_i$, $\sum_j m_i' j \otimes n_j' \in M \otimes N$ gleich sind.

Man verwendet aber fast immer nur die universelle Eigenschaft. Wie das funktioniert, sieht man zunächst an folgendem Resultat.

Lemma 1.29. *Seien $f : M_0 \to M_1$, $g : N_0 \to N_1$ R-linear. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f \otimes g : M_0 \otimes N_0 \to M_1 \otimes N_1$, so dass $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ für alle $m \in M$ und $n \in N$ gilt.*

Beweis. Die Abbildung $M_0 \times N_0 \to M_1 \otimes N_1$, $(m,n) \mapsto f(m) \otimes g(n)$ ist bilinear. Daher gibt es eine eindeutige Abbildung $f \otimes g$ mit der gewünschten Eigenschaft. □

Lemma 1.30. [1, Proposition 2.18] *Es gibt kanonische Isomorphismen*

(1) $M \otimes N \cong N \otimes M$,
(2) $M \otimes R \cong M$,
(3) $(\bigoplus_i M_i) \otimes N \cong \bigoplus_i M_i \otimes N$.
(4) $R\{S\} \otimes R\{T\} \cong R\{S \times T\}$.

2. Exakte Sequenzen

2.1. **Definition exakter Sequenzen.**

Definition 2.1. *Eine Folge*

$$\dots M_{n+1} \stackrel{f_{n+1}}{\to} M_n \stackrel{f_n}{\to} M_{n-1} \dots$$

heißt exakt bei M_n, falls $\ker(f_n) = \operatorname{im}(f_{n+1})$ gilt. Die Sequenz heißt schlechthin exakt, falls sie überall exakt ist.

Man beachte, dass wenn die Sequenz bei M_n exakt ist, $f_n \circ f_{n+1} = 0$ gelten muss. Es gilt:

(1) $0 \to M \stackrel{f}{\to} N$ ist genau dann exakt, wenn f injektiv ist.
(2) $M \stackrel{f}{\to} N \to 0$ ist genau dann exakt, wenn f surjektiv ist.

Besonders wichtig sind für uns die *langen exakten Sequenzen*, welche überall exakt sind, und die *kurzen exakten Sequenzen* der Form

$$0 \to M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M_2 \to 0.$$

Eine solche exakte Sequenz ist exakt, falls f injektiv, g surjektiv und $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$ gilt.

2.2. **Spaltende exakte Sequenzen.**

Lemma 2.2. *Es sei*

$$0 \to M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M_2 \to 0.$$

eine kurze exakte Sequenz. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(1) *Es gibt* $s \in \mathrm{Hom}_R(M_2, M_1)$ *mit* $g \circ s = \mathrm{id}$.
(2) *Es gibt* $j \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_0)$ *mit* $j \circ f = \mathrm{id}$.
(3) *Es gibt einen Isomorphismus* $h : M_1 \cong M_0 \oplus M_2$, *so dass* $g(h^{-1}(m_0, m_2)) = m_2$ *und* $h \circ f(m_0) = (m_0, 0)$ *gilt.*

Eine solche kurze exakte Sequenz heißt spaltend.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: Setze $p = sg : M_1 \to M_1$. Es gilt dann $p^2 = s(gs)g = sg = p$. Ferner ist $g(1-p) = g - gsg = 0$. Sei $m_1 \in M_1$. Dann ist $g(1-p)(m_1) = 0$, also existiert wegen der Exaktheit der Sequenz bei M_1 ein $m_0 \in M_0$ mit $f(m_0) = m_1$. Weil f injektiv ist, ist m_0 durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Wir setzen $j(m_1) := m_0$. Weil m_0 eindeutig bestimmt ist, ist5 $j : M_1 \to M_0$ R-linear. Es ist klar, dass $j \circ f = \mathrm{id}$ gilt.

$2 \Rightarrow 3$: Setze $h := (j, g)$.

$3 \Rightarrow 1$: Setze $s(m_2) := h^{-1}(0, m_2)$. □

Eine kurze exakte Sequenz, welche nicht spaltet, ist

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \overset{q}{\mathbb{Z}} /n \to 0,$$

wobei die erste Abbildung die Multiplikation mit n ist, und die zweite die Quotientenabbildung.

Lemma 2.3. *Sei*

$$0 \to M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M_2 \to 0.$$

eine kurze exakte Sequenz und sei M_2 *frei. Dann spaltet die exakte Sequenz.*

Beweis. Es gilt $M_2 \cong R\{S\}$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $M_2 = R\{S\}$ annehmen. Ist $i \in S \subset R\{S\}$, so existiert, weil g surjektiv ist, ein Element $m_i \in M_1$ mit $g(m_i) = i$. Definiere $s : R\{S\} \to M_1$ durch $s(i) := m_i$ und setze linear fort. □

2.3. **Exaktheitseigenschaften des Tensorproduktes.**

Satz 2.4. *Sei* $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *exakt (also exakt bei* M' *und* M*) und* N *ein* R*-Modul. Dann ist die Sequenz*

$$0 \to \mathrm{Hom}(N, M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(N, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(N, M'')$$

exakt.

Beweis. Es ist klar, dass $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$. Wir müssen zeigen, dass f_* injektiv ist und dass $\ker(g_*) = \operatorname{im}(f_*)$ gilt. Sei $h : N \to M'$. Wenn $f_*(h) = 0$, so gilt $f \circ h = 0$, also $f(h(n)) = 0$. Weil f injektiv ist, folgt $h(n) = 0$ für alle $n \in N$, also $h = 0$. Sei nun $k : N \to M$ mit $g_*(k) = g \circ k = 0$. Somit gilt $\operatorname{im}(k) \subset \ker(g) = \operatorname{im}(f)$. Nun ist f injektiv und liefert daher einen Isomorphismus $f' : M' \to \operatorname{im}(f)$. Dann ist $f_*(f'^{-1}(k)) = k$, also $k \in \operatorname{im}(f_*)$. □

Bemerkung 2.5. *Die folgende Aussage ist* falsch*: Sei* $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *exakt (also exakt auch bei* M''*) und* N *ein* R*-Modul. Dann ist die Sequenz*

$$0 \to \operatorname{Hom}(N, M') \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}(N, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}(N, M'') \to 0$$

exakt. Ein Gegenbeispiel wird durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$$

von $\mathbb{Z}$*-Moduln und* $N = \mathbb{Z}/2$ *gegeben. Denn* $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) = 0$ *und* $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$*. Die induzierte Sequenz lautet dann*

$$0 \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}/2 \to 0$$

und kann nicht exakt sein.

Satz 2.6. *Sei* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *eine Sequenz mit* $g \circ f = 0$*. Dann ist die Sequenz* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *genau dann exakt, wenn für jeden* R*-Modul* N *die Sequenz*

$$0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(M', N)$$

exakt ist.

Beweis. Teil 1: wir setzen voraus, dass die ursprüngliche Sequenz exakt ist. Sei $h : M'' \to N$ und $g^* h = h \circ g = 0$. weil g surjektiv ist, ist dann $h = 0$, also g^* injektiv. Es ist wieder klar, dass $f^* \circ g^* = 0$. Sei $k : M \to N$ mit $f^* k = k \circ f = 0$. Diese Gleichung besagt, dass $k|_{\operatorname{im}(f)} = 0$, und wegen der Exaktheit folgt $k|_{\ker(g)} = 0$. Somit induziert k eine Abbildung $M/\ker(g) \to N$, und es gilt $M/\ker(g) \cong M''$ wegen Exaktheit.

Teil 2: siehe [1, Prop 2.9]. □

Bemerkung 2.7. *Die folgende Aussage ist* falsch*: Sei* $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *exakt und* N *ein* R*-Modul. Dann ist die Sequenz*

$$0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(M', N) \to 0$$

exakt. Ein Gegenbeispiel wird durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$$

von $\mathbb{Z}$*-Moduln und* $N = \mathbb{Z}$ *gegeben. Die induzierte Sequenz*

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to 0$$

ist nämlich

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to 0$$

und dies ist nicht exakt.

Satz 2.8. *Sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz und N ein R-Modul. Dann ist die Sequenz*

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to 0$$

exakt.

Der Beweis findet sich in [1, Prop 2.18] und beruht auf Satz 2.6, sowie der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes, die sich als $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$ formulieren lässt.

Wieder kann man aus der Exaktheit von $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ nicht auf die Exaktheit von $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ schließen (Gegenbeispiel: $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$, $N = \mathbb{Z}/2$).

Satz 2.9. *Sei $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine* spaltende *exakte Sequenz und N ein R-Modul. Dann sind die Sequenzen*

$$0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$$

und

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N) \to 0$$

exakt.

Beweis. Im Tensorfall ist die Injektivität von $f \otimes 1$ zu zeigen. Wähle j mit $jf = 1$. Es folgt $1 = (jf) \otimes 1 = (j \otimes 1)(f \otimes 1)$, also f injektiv.

Im Hom-Fall ist Surjektivität von f^* zu beweisen, aber es gilt $\mathrm{id} = (jf)^* = f^* j^*$. □

3. Spezielle Tatsachen

Satz 3.1. *Für jede kurze exakte Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ von $\mathbb{Z}$-Moduln ist die induzierte Sequenz $0 \to M' \otimes \mathbb{Q} \to M \otimes \mathbb{Q} \to M'' \otimes \mathbb{Q} \to 0$ exakt.*

Diese Eigenschaft von $\mathbb{Q}$ hat einen speziellen Namen, nämlich, dass $\mathbb{Q}$ ein "flacher"$\mathbb{Z}$-Modul ist. Der Beweis basiert auf folgendem Lemma.

Lemma 3.2. *Sei M ein $\mathbb{Z}$-Modul und $m \in M$. Dann gilt $m \otimes 1 = 0 \in M \otimes \mathbb{Q}$ genau dann, wenn $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ exisitiert mit $qm = 0$.*

Beweis. Falls $qm = 0$, so gilt $m \otimes 1 = m \otimes \frac{q}{q} = qm \otimes \frac{1}{q} = 0$. Die andere Richtung ist die schwierige. Sei nun $m \otimes 1 = 0$. Schritt 1: Wir benutzen die Notation aus dem Beweis von Lemma 1.26[1]. Die Bedingung $m \otimes 1 = 0$ zeigt nun, dass das Element $(m, 1) \in \mathbb{Z}\{M \times \mathbb{Q}\}$ zu dem Untermodul $U(M, \mathbb{Q})$ gehört. Wir können also $(m, 1)$ als endliche Linearkombination der Erzeuger von $U(M, \mathbb{Q})$ schreiben. Weil die Summe endlich ist, gibt es einen endlich erzeugten Untermodul $N \subset \mathbb{Q}$, so dass $(m, 1) \in U(M, N)$ liegt. Daraus folgt, dass das Element $m \otimes 1 \in M \otimes N$ verschwindet.

Schritt 2: Als nächstes behaupten wir, dass ein endlich erzeugter Untermodul $N \subset \mathbb{Q}$ stets von der Form $\{nr | n \in \mathbb{Z}\}$ für ein $r \in \mathbb{Q}$ ist. Dies sieht man durch Induktion über die Anzahl der Erzeuger von N. Wenn N von einem Element erzeugt wird, so ist die Aussage klar. Andernfalls dürfen wir durch Induktion annehmen, dass N von zwei Elementen s und r erzeugt wird. Es gibt dann $g \in \mathbb{Q}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$

[1]Dies ist eine der wenigen Argumente, in denen die Konstruktion des Tensorproduktes eine Rolle spielt

mit $s = gn$, $r = gm$. Sei $d \in \mathbb{Z}$ der größte gemeinsame Teiler von m und n. Dann gibt es nach dem Lemma von Bezout $a, b, e, f, \in \mathbb{Z}$ mit $am + bn = d$, $df = m$, $de = n$. Es folgt

$$\begin{aligned} dg = amg + bng = ar + bs \in N, \\ s = gn = edg, \\ r = gm = fdg, \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass N von dem Element dg erzeugt wird.

Schritt 3: Ist nun $m \in M$, $m \otimes 1 = 0 \in M \otimes \mathbb{Q}$. Nach den vorherigen Schritten gibt es $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ und $p \in \mathbb{Z}$, so dass $m \otimes 1 = 0 \in M \otimes \langle \frac{p}{q} \rangle$. Es folgt sofort $m \otimes 1 = 0 \in M \otimes \langle \frac{1}{q} \rangle$. Der Isomorphismus $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $a \mapsto qa$ schränkt sich zu einem Isomorphismus $f : \langle \frac{1}{q} \rangle \to \mathbb{Z}$ ein. Nun betrachte man das kommutative Diagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "m \mapsto m \otimes 1"] \arrow[d, "q \cdot"] & M \otimes \langle \frac{1}{q} \rangle \arrow[d, "1 \otimes f"] \\ M \arrow[r, "m \mapsto m \otimes 1"] & M \otimes \mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

Weil $m \otimes 1 = 0 \in M \otimes \langle \frac{1}{q} \rangle$ gilt und weil die Abbildung $m \to M \otimes \mathbb{Z}$, $m \mapsto m\ otimes 1$, ein Isomorphismus ist, muss $qm = 0$ in M gelten. □

Beweis. Nach Satz 2.8 muss nur noch die Exaktheit bei $M' \otimes \mathbb{Q}$ gezeigt werden. Dies folgt aus der Aussage, dass eine injektive Abbildung $f : M' \to M$ von $\mathbb{Z}$-Moduln eine injektive Abbildung $f \otimes 1 : M' \otimes \mathbb{Q} \to M \otimes \mathbb{Q}$ induziert, welche wir nun beweisen wolllen.

Sei $\sum_i m'_i \otimes q_i \in M' \otimes \mathbb{Q}$ im Kern von $(f \otimes 1)$. Indem man die endlich vielen Brüche q_i auf den Hauptnenner bringt, können wir schreiben:

$$\sum_i m'_i \otimes q_i = \sum_i m'_i \otimes \frac{p_i}{p} = (\sum_i p_i m'_i) \otimes \frac{1}{p} =: m' \otimes \frac{1}{p}$$

für ein $p \in \mathbb{Z} \setminus 0$ und $m' \in M'$. Es gilt also $0 = (f \otimes 1)(m' \otimes \frac{1}{p}) = f(m') \otimes \frac{1}{p} \in M \otimes \mathbb{Q}$. Es gilt dann such $f(m') \otimes 1 = 0 \in M \otimes \mathbb{Q}$. Nach Lemma 3.2 gilt $qf(m') = 0$ für ein $q > 0$. Dann ist $f(qm') = 0$ und weil f injektiv ist, auch $qm' = 0$. Der einfache Teil von Lemma 3.2 zeigt dann $m' \otimes 1 = 0 \in M \otimes \mathbb{Q}$, und es folgt $m' \otimes \frac{1}{p} = 0$, was zu ziegen war. □

Satz 3.3. *Sei R ein Hauptidealring, F ein freier R-Modul und $U \subset F$ ein Untermodul. Dann ist U frei.*

[2, Theorem III.7.1] falls F endlich erzeugt ist, [2, p. 880 f] für den nicht endlich erzeugten Fall. Der Beweis benutzt, falls F nicht endlich erzeugt ist, das Auswahlaxiom. Diese Benutzung des Auswahlaxioms ist essentiell für die Homologietheorie.

Literatur

[1] Atiyah, MacDonald: *Commutative algebra*
[2] Lang: *Algebra*