Vorlesung Topologie I

Blatt 1 J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 31.10.2016 bis 12 Uhr

Allgemeine Bestimmungen

- Das Übungsblatt wird Montag nach der Vorlesung auf die homepage hochgeladen, die Abgabe ist 10 Tage später. Ausnahme: das erste Blatt ist erst nach 14 Tagen abzugeben.
- Zum Erreichen der Klausurzulassung sind 40 Prozent der Punkte notwendig.
- Auf jedem Blatt gibt es eine "Frageaufgabe", deren Zweck darin besteht, dass Sie den Stoff der Vorlesung nacharbeiten.
- Gelegentlich gibt es "Leseaufgabe", die nicht bepunktet und nicht bewertet wird. Hier geht es darum, Definitionen aus den Vorlesungen "Einführung in die Geometrie, Topologie und Analysis" sowie einige algebraische Begriffe, die im Velauf der Vorlesung wichtig werden, zu wiederholen.

Leseaufgabe 1. Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Man mache sich mit folgenden Begriffen vertraut, beziehungsweise beantworte sich folgende Fragen.

a) Was ist ein R-Modul?

b) Was ist eine R-lineare Abbildung $f : M \to N$ von einem R-Modul in einen anderen R-Modul?

c) Inwiefern bilden die R-Moduln, zusammen mit R-linearen Abbildungen, eine Kategorie?

d) Sei R ein Körper. Warum ist ein R-Modul dasselbe wie ein R-Vektorraum?

e) Was ist ein Untermodul eines R-Modul?

f) Was sind Kern, Bild und Kokern eines R-Modulhomomorphismus?

g) Was ist der Quotientenmodul M/N, wenn $\subset M$ ein Untermodul ist?

Als Quelle sei wikipedia, das Buch von Atiyah, Macdonald: "Introduction to Commutative Algebra", Seite 17-18, sowie folgemndes Dokument empfohlen: http://wwwmath.uni-muenster.de/u/jeber_02/winter1617/algebra.pdf.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Koprodukte, 10 Punkte)**.** Sei I eine Menge und sei für jedes $i \in I$ ein topologischer Raum X_i gegeben. Wir definieren das *Koprodukt*, auch *disjunkte Vereinigung* genannt, wie folgt. Die zugrundeliegende Menge sei

$$X = \coprod_{i \in I} X_i := \{(i,x) \in I \times (\bigcup_{i \in I} X_i) | x \in X_i\}$$

und wir definieren $f_i : X_i \to X$ durch $f_i(x) = (i,x)$. Bemerkung: X ist die disjunkte Vereinigung aller $f_i(X_i)$. Die komische Schreibweise dient dazu, dies zu erreichen. Nun sagen wir, dass $U \subset X$ genau dann offen ist, wenn $f_i^{-1}(U) \subset X_i$ offen ist für alle $i \in I$. Man zeige:

a) Durch diese Vorgabe wird in der Tat eine Topologie auf X definiert.

b) Alle Abbildungen $f_i : X_i \to X$ sind stetig.

c) Es sei Y ein weiterer topologischer Raum und es seinen $h_i : X_i \to Y$ stetige Abbildungen. Dann existiert eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $h : X \to Y$ mit $h \circ f_i = h_i$.

Aufgabe 4 (Direkte Summen, 10 Punkte)**.** Sei I eine Menge und für jedes $i \in I$ sei ein R-Modul M_i gegeben. Die *direkte Summe* $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist der folgende R-Modul: Die zugrundeliegende Menge ist die Menge aller Familien $(m_i)_{i \in I}$ mit $m_i \in M_i$, so dass $m_i = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$ gilt. Hierauf definiert man Addition und Skalarmultiplikation wie folgt:

$$(m_i)_{i \in I} + (m_i')_{i \in I} := (m_i + m_i')_{i \in I}; \; r(m_i)_{i \in I} := (rm_i)_{i \in I}.$$

Es sei $f_j : M_j \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ die Abbildung, welche $m \in M_j$ auf die Familie $(m_i)_{i \in I}$ sendet, wobei $m_i = m$ falls $i = j$ und $m_i = 0$ für $i \neq j$. Man zeige:

a) $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist ein R-Modul.

b) Die Abbildung $f_i : M_i \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ ist R-linear.

c) Falls N ein weiterer R-Modul ist und $g_i : M_i \to N$ R-linear, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $g : \bigoplus_{i \in I} M_i \to N$ mit $g \circ f_i = g_i$.

Aufgabe 5 (Die Homotopiekategorie)**.** Wir sagen, dass zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen *homotop* sind, in Symbolen als $f_0 \sim f_1$ ausgedrückt, wenn eine stetige Abbildung $F : X \times [0,1] \to Y$ existiert, so dass $F(x,i) = f_i(x)$ für $i = 0, 1$ und alle $x \in X$ gilt. Man zeige:

a) Homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}}(X;Y)$ der stetigen Abbildungen von X nach Y. Die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Abbildungen von X nach Y wird mit $[X,Y]$ bezeichnet, und die Äquivalenzklasse von f mit $[f] \in [X,Y]$.

b) Seien $f_0, f_1 : X \to Y$ und $g_0, g_1 : Y \to Z$ stetige Abbildungen, und es sei $f_0 \sim f_1$ und $g_0 \sim g_1$. Dann gilt $g_1 \circ f_1 \sim g_0 \circ f_0$. Tip: $G(F(x,t),t))$.

c) Die durch $([f],[g]) \mapsto [g \circ f]$ definierte Abbildung $[X,Y] \times [Y,Z] \to [X,Z]$ ist wohldefiniert.

d) Es sei $\mathrm{Ob}(\mathbf{Hotop})$ die Klasse der topologisccher Räume, $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Hotop}}(X,Y) := [X,Y]$ und $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Hotop}}(X,Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathbf{Hotop}}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{Hotop}}(X,Z)$ sei die in der letzten Ausgabe definierte Abbildung. Durch diese Daten ist eine Kategorie **Hotop** bestimmt, die *Homotopiekategorie* topologischer Räume.

Viel Erfolg