Vorlesung Topologie I

Blatt 12 J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 26.01.2017 bis 12 Uhr

Leseaufgabe 1. Wiederholen sie den Begriff einer topologischen und differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Sie dürfen hierbei ein Topologiebuch ihrer Wahl oder wikipedia.de verwenden.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3. Seien S und T endliche Mengen.

a) Sei $x \in H_n(\vee_{s\in S} S^n; \mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass es eine Abbildung $f\colon S^n \to \vee_{s\in S} S^n$ gibt, sodass $f_*([S^n]) = x$.

   Tipp: Auf Blatt 9, Aufgabe 4, wurde die "Pinch Abbildung" $q : S^n \to S^n \vee S^n$ konstruiert. Wiederholtes Anwenden liefert folgende Folge von Abbildungen $S^n \overset{q}{\to} S^n \vee S^n \overset{id \vee q}{\to} \dots \overset{id \vee \cdots \vee id \vee q}{\longrightarrow} S^n \vee \cdots \vee S^n$. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $x = \sum_{s\in S} a_s (\iota_s)_*([S^n])$ mit $a_s \in \mathbb{Z}$. Nun müssen sie nur noch eine passende Abbildung $f : S^n \vee \cdots \vee S^n \to S^n \vee \cdots \vee S^n$ finden.

b) Sei $h\colon \mathbb{Z}\{T\} \to \mathbb{Z}\{S\}$ ein Homomorphismus. Konstruieren Sie einen CW-Komplex X mit genau einer 0-Zelle, genau $\#S$-vielen n-Zellen, genau $\#T$-vielen $(n+1)$-Zellen und keinen weiteren Zellen, sodass die zelluläre Randabbildung $C^{\text{cell}}_{n+1}(X;\mathbb{Z}) \to C^{\text{cell}}_n(X;\mathbb{Z})$ genau h ist.

c) Sei nun G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, konstruieren Sie einen CW-Komplex $M(G,n)$, $n \geq 1$ mit folgender Homologie:

$$\tilde{H}_k(M(G,n);\mathbb{Z}) = \begin{cases} G & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   Vergleichen sie hierzu die Aufgabe 8 auf Blatt 5. Dies sind die sogenannten Moore-Räume und man kann zeigen, dass Sie bis auf Homotopie eindeutig bestimmt sind. Mit etwas mehr Aufwand kann auch auf die Voraussetzung verzichtet werden, dass G endlich erzeugt seien muss.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe soll die Homologie des Produkts von zwei Moore-Räumen $M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, m)$ und $M(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, n)$ von endlichen Primzahlenkörpern ausgerechnet werden.

a) Berechen Sie dazu zunächst $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ für zwei Primzahlen p und q.

b) Berechnen Sie nun für zwei Primzahlen p, q die Homologie von $M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, m) \times M(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, n)$, $(m, n \geq 1)$.

Aufgabe 5 (Bockstein Homomorphismus)**.** Sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und sei $C_*^{\text{sing}}(X)$ der singuläre Kettenkomplex eines topologischen Raum X. Dann ist die Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to C_*^{\text{sing}}(X) \otimes A \xrightarrow{id \otimes f} C_*^{\text{sing}}(X) \otimes B \xrightarrow{id \otimes g} C_*^{\text{sing}}(X) \otimes C \to 0$$

ein kurze exakte Sequenz (da $C_*^{\text{sing}}(X)$ ein freier Kettenkomplex ist und da Tensorieren mit einem freien Modul auch links-exakt ist.) und man erhält folgende lange exakte Sequenz in Homologie

$$\cdots \to H_{n+1}(X; C) \to H_n(X; A) \to H_n(X; B) \to H_n(X; C) \to H_{n-1}(X; A) \to \ldots$$

Benutzen Sie diese Sequenz um die Homologie von $\mathbb{RP}^\infty$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ auszurechnen.

Viel Erfolg!