Vorlesung Topologie I

Blatt 2 J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 3.11.2016 bis 12 Uhr

Leseaufgabe 1. Lesen sie die Definition von Zusammenhang und Wegzusammenhang bei topologischen Räumen durch und machen sie sich mit dem Begriff vertraut. Als Quelle können sie Wikipedia oder ein Topologiebuch (bspw. Klaus Jänich: "Topologie") ihrer Wahl verwenden.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Homologie von Kettenkomplexen, 10 Punkte)**.**

a) Berechnen sie die Homologie folgender Kettenkomplexe:

i) $0 \to \mathbb{Z} \stackrel{\cdot n}{\to} \mathbb{Z} \to 0$,

ii) $0 \to \mathbb{Z}^2 \stackrel{\cdot A}{\to} \mathbb{Z}^2 \stackrel{\cdot A}{\to} \mathbb{Z}^2 \to 0$, wobei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

iii) $0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \stackrel{\cdot m}{\to} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$.

b) Betrachten sie die folgenden Kettenkomplexe: $0 \to \mathbb{Z} \stackrel{\cdot 2}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ und $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$. Zeigen sie, dass die folgende Abbildung einen Isomorphismus auf Homologiegruppen induziert:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

wobei pr die Abbildung bezeichnet, die 1 auf 1 schickt.

Aufgabe 4 (Homologie der direkten Summe, 10 Punkte)**.**
Es sei $\{(C^i_*, \partial^i)\}_{i\in I}$ eine Familie von Kettenkomplexen von R-Moduln. Die direkte Summe der Familie ist folgender Kettenkomplex von R-Moduln: $((\bigoplus_{i\in I} C^i)_*, \partial)$, wobei $(\bigoplus_{i\in I} C^i)_k := \bigoplus_{i\in I} C^i_k$ und $\partial := (\partial^i)_{i\in I}$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass

$$\bigoplus_{i\in I} H_*(C^i_*) \cong H_*((\bigoplus_{i\in I} C^i)_*)$$

Zeigen sie dazu:

a) $((\bigoplus_{i\in I} C^i)_*, \partial)$ ist tatsächlich ein Kettenkomplex von R-Moduln.

b) Sind $(\bigoplus_{i\in I} Z^i)_k$ die Zykel und $(\bigoplus_{i\in I} B^i)_k$ die Ränder von $((\bigoplus_{i\in I} C^i)_*, \partial)$, dann gilt:
$$(\bigoplus_{i\in I} Z^i)_k = \bigoplus_{i\in I} Z^i_k \text{ sowie } (\bigoplus_{i\in I} B^i)_k = \bigoplus_{i\in I} B^i_k.$$

c) Durch $([c^i])_{i\in I} \mapsto [(c^i)_{i\in I}]$ ist ein wohldefinierter Isomorphismus
$$\varphi : \bigoplus_{i\in I} H_*(C^i_\bullet) \longrightarrow H_*((\bigoplus_{i\in I} C^i)_\bullet)$$
gegeben.

Aufgabe 5 ((Weg-)zusammenhängende Räume, 10 Punkte)**.**

a) Seien $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen sie: $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{x_1, \ldots, x_m\}$ ist wegzusammenhängend, wenn $n \geq 1$.

b) Es sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x||_2 = 1\}$ die (Einheits-)Sphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $x \in S^n$ ein Punkt. Wir definieren $E_x := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y\rangle = -1\}$ (Skizze!). Für $y \in S^n \setminus \{x\}$ sei $f_x(y)$ der Schnittpunkt der durch x und y definierten Gerade mit der Hyperebene E_x.

   Zeigen sie, dass $f_x : S^n \setminus \{x\} \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto f_x(y)$ ein Homöomorphismus ist.

c) Folgern sie: S^n ist wegzusammenhängend $\Leftrightarrow n \geq 1$.

d) Zeigen sie, dass $GL_n(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist. Hinweis: man könnte beispielsweise mit der Jordan-Normalform argumentieren, oder die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$, $z \mapsto 1 - z + zA$, untersuchen.

Viel Erfolg