Vorlesung Topologie I

Blatt 3 J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 10.11.2016 bis 12 Uhr

Leseaufgabe 1. Machen sie sich mit dem Begriff der kurzen und langen exakten Sequenz sowohl von R-Moduln als auch von Kettenkomplexen vertraut. Als Quelle können sie Wikipedia, http://www.math.uni-muenster.de/u/jeber_02/winter1617/algebra.pdf, Seite 6 f. oder ein Algebra-Buch ihrer Wahl verwenden, zum Beispiel Atiyah-Macdonald.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Diagrammjagd, 10 Punkte)**.**

a) Vervollständigen Sie den in der Vorlesung begonnenen Beweis, dass eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to C_* \to D_* \to E_* \to 0$$

die folgende lange exakte Sequenz in Homologie induziert:

$$\ldots \to H_n(C_*) \to H_n(D_*) \to H_n(E_*) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C_*) \to \ldots$$

b) Beweisen Sie das Fünferlemma: Es sei das folgende kommutative Diagramme von R-Moduln gegeben:

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_0"] & A_1 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "g_4"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[d, "f_4"] \\ B_0 \arrow[r, "h_1"] & B_1 \arrow[r, "h_2"] & B_2 \arrow[r, "h_3"] & B_3 \arrow[r, "h_4"] & B_4. \end{tikzcd}$$

Die Zeilen der beiden Diagramme seien exakt. Zeigen sie:

- Falls f_1 und f_3 surjektiv sind und f_4 injektiv ist, so ist f_2 surjektiv.
- Falls f_1 und f_3 injektiv sind und f_0 surjektiv, so ist f_2 injektiv. Insbesondere: sind f_0, f_1, f_3 und f_4 Isomorphismen, so ist f_2 ein Isomorphismus.

c) Mit dem Fünferlemma kann man nicht zeigen, dass zwei Abbildungen gleich sind. Konstruieren sie ein kommutatives Diagramm wie oben mit exakten Zeilen, so dass f_0, f_1, f_3 und f_4 die Nullabbildung sind, aber f_2 von Null verschieden ist.

Aufgabe 4 (Induzierte Abbildung und Windungszahl, 10 Punkte)**.** Sie $f : X \to Y$ stetig und $f(x_0) = y_0$. Wir bezeichnen den von f induzierten Homomorphismus auf den Fundamentalgruppen mit $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

a) Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, y_0) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "\mathrm{hur}"] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\mathrm{hur}"] \\ H_1(X; \mathbb{Z}) \arrow[r, "f_*"] & H_1(Y; \mathbb{Z}). \end{tikzcd}$$

b) Sei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$, und seien $c_k : [0, 1] \to S^1$ die Abbildungen $c_k(t) := e^{2\pi ikt}$, sowie $f_k : S^1 \to S^1$ die Abbildung $f_k(z) = z^k$. In der Vorlesung "Einführung in die Geometrie, Topologie und Analysis" wurde gezeigt, dass $\mathbb{Z} \to \pi_1(S^1; 1)$, $k \mapsto [[c_k]]$ ein Isomorphismus ist. Man setze $[S^1] := \mathrm{hur}([[c_1]])$. Aus dem Satz von Hurewicz folgt, dass $H_1(S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, erzeugt von $[S^1]$.

   Verwenden Sie diese Informationen, um zu beweisen, dass die Abbildung $(f_k)_* : H_1(S^1; \mathbb{Z}) \to H_1(S^1; \mathbb{Z})$ gleich der Multiplikation mit k ist.

Aufgabe 5 (Sphären sind einfach zusammenhängend, 10 Punkte)**.** Wie üblich ist $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass für $n \geq 3$ und jeden Basispunkt $x_0 \in S^{n-1}$

$$\pi_1(S^{n-1}, x_0) = \{1\}$$

gilt. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a) Sei $g\colon [0, 1] \to S^{n-1}$ nicht surjektiv und sei $g(0) = g(1) = x_0$. Zeigen Sie: g ist homotop relativ zu den Randpunkten zur konstanten Abbildung $c(t) = x_0$. Es reicht daher zu zeigen, dass jede geschlossene Kurve $g : [0, 1] \to S^{n-1}$ homotop (relativ zu den Endpunkten) zu einer nicht surjektiven Abbildung ist. Dies gelingt in zwei Schritten.

b) Sei $f : [0, 1] \to S^{n-1}$ stetig, mit $f(0) = f(1) = x_0$. Zeigen Sie: Es gibt eine C^∞-Funktion $g\colon [0, 1] \to S^{n-1}$, sodass f homotop zu g relativ zu den Randpunkten von $[0, 1]$ ist. Hinweise: dass g eine C^∞-Funktion ist, ist so zu verstehen, dass $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ im üblichen Sinne C^∞ ist. Wesentliche Zutaten des Beweises sind der Satz von Stone-Weierstraß und eine gewisse Abbildung $p : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$.

c) Sei $g\colon [0, 1] \to S^{n-1}$ eine C^∞-Abbildung mit $g(0) = g(1) = x_0$, $n \geq 3$. Zeigen Sie: g ist nicht surjektiv. Hinweis: stereographische Projektion $S^{n-1} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ und folgende Tatsache aus der Analysis III: Wenn $n < m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, dann ist $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge.

Viel Erfolg!