Vorlesung Topologie I

Blatt 5 J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 24.11.2016 bis 12 Uhr

Leseaufgabe 1. Informieren Sie sich über spaltende exakte Sequenzen. Entweder in einem Algebra Buch oder aber auch in einem Buch über algebraische Topologie wie zum Beispiel das von Hatcher, oder in
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/jeber_02/winter1617/algebra.pdf.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Zerfallen der langen exakten Homologiesequenz, 10 Punkte)**.** Es sei (X, A) ein Raumpaar. Es bezeichne $j : A \to X$ die Inklusionsabbildung. In manchen Fällen zerfällt die lange exakte Homologiesequenz in kurze exakte Sequenzen. Zeigen Sie

a) Sei A ein Retrakt von X ist, d.h. es gibt eine Abbildung $r : X \to A$ mit $r \circ j \sim \mathrm{id}_A$. Dann ist die Sequenz $0 \to \tilde{H}_*(A) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_*(X) \to H_*(X, A) \to 0$ spaltend exakt, und somit folgt $\tilde{H}_*(X) \cong \tilde{H}_*(A) \oplus H_*(X, A)$.

b) Falls $j : A \to X$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist, so ist die Sequenz $0 \to \tilde{H}_*(X) \to H_*(X, A) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{*-1}(A) \to 0$ exakt.

c) Wenn eine Abbildung $f : X \to A$ existiert, so dass $j \circ f \sim \mathrm{id}_X$, so ist $0 \to H_{*+1}(X, A) \to \tilde{H}_*(A) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_*(X) \to 0$ spaltend exakt, und es folgt $\tilde{H}_*(A) \cong H_{*+1}(X, A) \oplus \tilde{H}_*(X)$.

Aufgabe 4 (Relative Homologie von hinreichend gutartigen Raumpaaren, 10 Punkte)**.**
Sei X ein topologischer Raum, $\emptyset \neq A \subset X$ ein *abgeschlossener* Teilraum und $q : X \to X/A$ die Quotientenabbildung. Diese induziert eine Abbildung

$$q_* : H_*(X, A) \to H_*(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_*(X/A)$$

(für einen beliebigen Koeffizientenring, der hier nicht näher spezifiziert werden soll). In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass q_* ein Isomorphismus ist, wenn zusätzlich A ein *Umgebungsdeformationsretrakt* ist, das heißt, wenn eine offene Menge $U \subset X$ mit $A \subset U$ existiert, und eine Homotopie $h : U \times [0, 1] \to U$ mit

$$h(0, x) = x;\ h(1, x) \in A;\ h(t, a) \in A \forall a \in A, t \in [0, 1].$$

Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

a) Die Inklusionen $A \to U$ und $A/A \to U/A$ sind Homotopieäquivalenzen. Hinweis: sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $U \times [0,1]$, welche durch $(x,t) \sim (x',t)$ falls $x, x' \in A$ erzeugt wird. Es gibt dann eine stetige bijektive Abbildung $g : (U \times [0,1])/\sim \to U/A \times [0,1]$. Sie müssen und dürfen ohne Beweis die nichttriviale Tatsache benutzen, dass g ein Homöomorphismus ist. Dies stimmt weil $[0,1]$ kompakt ist, vergleiche Bredon, Geometry and Topology, Prop 13.19, p. 43.

b) Die Quotientenabbildung induziert einen Homöomorphismus von Raumpaaren $q : (X - A, U - A) \to (X/A - A/A, U/A - A/A)$.

c) Betrachten Sie das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_*(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "q_*"] & H_*(X,U) \arrow[d, "q_*"] & H_*(X-A, U-A) \arrow[l] \arrow[d, "q_*"] \\
H_*(X/A, A/A) \arrow[r] & H_*(X/A, U/A) & H_*(X/A - A/A, U/A - A/A) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(woher kommen die Abbildungen, die keinen Namen tragen?). Die ersten beiden Teilaufgaben führen zusammen mit dem Ausschneidungssatz dann ganz schnell zum Ziel.

Aufgabe 5. Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, das heißt X ist Hausdorffsch und jeder Punkt von X hat eine kompakte Umgebung. Wir definieren die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* X^+ von X wie folgt: als Menge ist $X^+ := X \dot\cup \{\infty\}$ (hierbei ist $\infty \notin X$). Eine Teilmenge $U \subset X^+$ ist offen, wenn entweder $\infty \notin U$ und U offen in X ist, oder wenn $\infty \in U$ und $X^+ \setminus U$ kompakt ist.
Zeigen Sie:

a) X^+ mit der oben definierten Topologie ist ein kompakter Hausdorffraum.

b) Zeigen sie: $(\mathbb{R}^n)^+$ und S^n sind homöomorph.

c) Im Rest der Aufgabe werden wir Abbildungen $S^n \to S^n$ von jedem beliebigen Grad konstruieren. Seien $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ Punkte mit $\|p_i - p_j\| \geq 2$ für $i \neq j$. Sei ferner $h(x) := \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (das ist ein Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n \cong B^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < 1\}$). Sei $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$ die folgende Abbildung:

$$f(x) := \begin{cases} \infty & \|x - p_i\| \geq 1 \forall i = 1, \ldots k \\ h^{-1}(x - p_i) & \|x - p_i\| < 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist und dass $\deg(f) = k$ gilt.

Viel Erfolg!