Vorlesung Topologie I

Blatt 6 J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 01.12.2016 bis 12 Uhr

Leseaufgabe 1. Informieren Sie sich über das Tensorprodukt. Entweder in einem Algebra Buch oder aber auch in einem Buch über algebraische Topologie wie zum Beispiel das von Hatcher, oder in
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/jeber_02/winter1617/algebra.pdf.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Kettenhomotopie)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien (A_*, ∂^A) und (B_*, ∂^B) Kettenkomplexe von R-Moduln. Seien $f, g\colon (A_*, \delta_A) \to (B_*, \delta_B)$ zwei Kettenabbildungen. Wie in der Vorlesung ist eine *Kettenhomotopie* eine Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von Abbildungen $P_n\colon A_n \to B_{n+1}$, so dass $\partial^B_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial^A_n = f_n - g_n$. Wir sagen, dass dann f und g *kettenhomotop* sind. Zeigen Sie:

a) Kettenhomotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kettenabbildungen von A_* nach B_*.
Anmerkung: Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hom}(A_*, B_*)$ die Menge der Kettenabbildungen von A_* nach B_* und $[A_*, B_*] := \mathrm{Hom}(A_*, B_*)/\sim$. Dann ist $[A_*, B_*]$ ein R-Modul mit $(r \cdot f)(a) = r \cdot f(a)$ und $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ (muss nicht gezeigt werden).

b) Erinnerung: Der Kettenkomplex $A_* = R[n]$ ist definiert durch $A_n = R$ und $A_k = 0$ für alle $k \neq n$ (alle Differentiale sind notwendig 0). Zeigen sie: Die Abbildung $\alpha\colon [R[n], B_*] \to H_n(B_*), f \mapsto [f(1)]$ ist eine wohldefinierter Isomorphismus.

Aufgabe 4 (Mayer-Vietoris Sequenz, Homologie vom 2-Torus)**.** In dieser Aufgabe soll die Mayer-Vietoris-Sequenz benutzt werden, um die Homologie der Räume $S^n \times S^m$ zu berechnen. Wir betrachten

$$S^{n+m+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{m+1} | \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1\}$$

und die Teilräume

$$S^n = S^{m+n+1} \cap (\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\});\ S^m = S^{m+n+1} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m+1})$$

sowie

$$U = S^{m+n+1} \setminus S^n;\ V = S^{m+n+1} \setminus S^m$$

Auf Blatt 4, Aufgabe 3 wurde gezeigt, dass die Inklusionen $S^n \to V$ und $S^m \to U$ Homotopieäquivalenzen sind.

a) Zeigen Sie: $U \cap V$ ist homotopieäquivalent zu $S^n \times S^m$ und $U \cup V = S^{m+n+1}$. (Es ist hilfreich sich eine Skizze anzufertigen.)

b) Benutzen Sie nun die Mayer-Vietoris Sequenz, um die Homologie von $S^n \times S^m$ für $m, n \geq 1$ auszurechnen. Als Spezialfall erhalten sie die Homologie des 2-Torus.

Aufgabe 5. Seien X, Y topologische Räume und seien $(U_i)_{i=1,2,3}$, $(V_i)_{i=1,2,3}$ offene Überdeckungen von X und Y. Sei außerdem $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so dass $f(U_i) \subset V_i$. Für $\emptyset \neq S \subset I$ sei $U_S = \cap_{i \in S} U_i$ und $V_S = \cap_{i \in S} V_i$.
Es existiere ein $q \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: für jedes $\emptyset \neq S \subset I$ ist $(f|_{U_S})_* : H_k(U_S) \to H_k(V_S)$ ist ein Isomorphismus falls $k < q - |S| + 1$ und surjektiv falls $k \leq q - |S| + 1$.
Zeigen Sie: Dann ist $f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ ein Isomorphismus, falls $k < q$ und surjektiv, falls $k \leq q$. (Hinweis: Mayer-Vietoris und 5-er Lemma).
Anmerkung: Diese Aussage ist auch richtig für beliebige Überdeckungen von X und Y. Alle Zutaten, die in den Beweis eingehen, treten auch schon im Fall $|I| = 3$ auf, lediglich die Rechnungen werden komplizierter.

Viel Erfolg!