Vorlesung Topologie I

Blatt 7

J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 08.12.2016 bis 12 Uhr

Leseaufgabe 1. Informieren Sie sich über die Klassifikation von endlichen abelschen Gruppen. Entweder in einem Algebra Buch oder auf Wikipedia.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Tensorprodukte:

a) $M \underset{R}{\otimes} R$ für einen beliebigen Ring R und einen R-Modul M.

b) $\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

c) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

d) Sei S eine Menge und R ein Ring. Es sei daran erinnert, dass R unter anderem ein $\mathbb{Z}$-Modul ist. Zeigen Sie:
$$\mathbb{Z}\{S\} \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong R\{S\}.$$

Anmerkung: Oft wird in Zukunft $\otimes$ anstelle von $\underset{R}{\otimes}$ geschrieben. In den meisten Fällen ist klar, über welchem Ring das Tensorprodukt gemeint ist.

Aufgabe 4. Betrachten sie den folgenden Raum: Sei S^1 der Kreis und $x \in S^1$ ein beliebiger Punkt. Wir definieren $T := S^1/(S^1 \setminus \{x\})$ mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie:

a) T ist homöomorph zu dem Zweipunktraum, bei dem ein Punkt offen und der andere Punkt abgeschlossen ist.

b) T ist zusammenziehbar.

c) $H_1(S^1, S^1 \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}$

Anmerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass $H_1(X, A) \neq \tilde{H}_1(X/A)$ möglich ist. Die Voraussetzung an das Raumpaar von Blatt 5, Aufgabe 4 sind also notwendig und nicht nur für die Vereinfachung des Beweises zuständig.

Aufgabe 5 (Änderung der Homologie durch Ankleben einer n-Zelle)**.** Sei X ein topologischer Raum und $n \geq 2$ (diese Annahme dient der Vereinfachung und kann ohne große Schwierigkeiten weggelassen werden). Sei $f\colon S^{n-1} \to X$ stetig und $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ die Inklusion des Randes. Nun betrachten wir den Pushout dieser beider Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "j"] \\ D^n \arrow[r, "F"] & X \cup_f D^n \end{tikzcd}$$

mit

$$X \cup_f D^n := X \dot{\cup} D^n / (s \sim f(s) \text{ für } s \in \partial D^n = S^{n-1}.$$

Zeigen Sie:

a) $F_* : H_k(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_k(X \cup_f D^n, X)$ ist ein Isomorphismus.

b) Folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} H_n(D^n, S^{n-1}) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "\partial"] & H_n(X \cup_f D^n, X) \arrow[d, "\partial"] \\ H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "f_*"] & H_{n-1}(X) \end{tikzcd}$$

c) $j_* : H_k(X) \xrightarrow{\cong} H_k(X \cup_f D^n)$ ist ein Isomorphismus für $k \neq n-1, n$.

d) Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \to H_n(X) \to H_n(X \cup_f D^n) \to H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X \cup_f D^n) \to 0$$

(Hinweis: man ersetze den relativen Term in der langen exakten Sequenz).

Nikolausaufgabe. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen und seien $f, g\colon U \to V$ Homöomorphismen/Diffeomorphismen. Zeigen Sie: Falls $n \neq m$, so ist $f = g$.

Viel Erfolg!