Vorlesung Topologie I

Blatt 9 J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 22.12.2016 bis 12 Uhr

Leseaufgabe 1. Informieren Sie sich über die Exaktheitseigenschaften des Tensorprodukts. Hierfür können Sie ein Algebra-Buch ihrer Wahl verwenden (bspw. Bosch, Algebra, S. 302 f.) oder Sie lesen den zugehörigen Abschnitt in http://wwwmath.uni-muenster.de/u/jeber_02/winter1617/algebra.pdf.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe beweisen wir, dass jede stetige Abbildung $\mathbb{RP}^{2n} \to \mathbb{RP}^{2n}$ einen Fixpunkt hat.

a) Sei $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$ stetig und ohne Fixpunkt. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $g : S^n \to S^n$ existiert, so dass für alle $x \in S^n$ gilt: $g(x) \neq \pm x$. Hinweis: Überlagerungstheorie liefert ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & S^{2n} \arrow[d, "q"] \\
S^{2n} \arrow[r, "q"] \arrow[urr, dashed, "\mathfrak{g}"] & \mathbb{RP}^{2n} \arrow[r, "f"] & \mathbb{RP}^{2n}
\end{tikzcd}$$

wobei q die Projektionsabbildung ist.

b) Sei $g\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung, sodass für alle $x \in S^n$ gilt $g(x) \neq \pm x$. Zeigen Sie: Dann ist n ungerade. Hinweis: Satz vom Igel oder besser der Beweis dieses Satzes.

Aufgabe 4. Das Bouquet zweier punktierter Räume (X, x_0) und (Y, y_0) ist definiert als

$$X \vee Y := (X \coprod Y)/\{x_0, y_0\}.$$

Sei $i_X : X \to X \vee Y$ die kanonische Inklusion, $i_Y : Y \to X \vee Y$ sei analog definiert. Ferner sei $p_X : X \vee Y \to (X \vee Y)/Y \cong X$ die Abbildung, welche Y mit einem Punkt identifizert, und $p_Y : X \vee Y \to Y$ sei analog definiert. Sei nun $n \geq 1$. Zeigen Sie:

a) Es gibt einen Homöomorphismus $S^n/S^{n-1} \cong S^n \vee S^n$ (Bild reicht). Sei $q : S^n \to S^n/S^{n-1} \cong S^n \vee S^n$ die Komposition der Quotientenabbildung mit diesem Homöomorphismus.

b) Die beiden Abbildungen

$$H_n(S^n;\mathbb{Z}) \oplus H_n(S^n;\mathbb{Z}) \overset{i_{1*}+i_{2*}}{\to} H_n(S^n \vee S^n;\mathbb{Z}) \overset{p_{1*}+p_{2*}}{\to} H_n(S^n) \oplus H_n(S^n)$$

sind zueinander inverse Isomorphismen. Hinweis: Blatt 5, Aufgabe 4.

c) Es gilt $q_*([S^n]) = i_{1*}[S^n] + i_{2*}[S^n]$

Aufgabe 5. Sei X ein endlicher CW-Komplex. Ein Unterkomplex Y von X ist ein abgeschlossener Teilraum, der eine Vereinigung von Zellen von X ist. Zeigen Sie die folgende Mayer-Vietoris-Eigenschaft für die Eulercharakteristik:
Seien $X_1, X_2 \subset X$ Unterkomplexe. Dann gilt: $X_1 \cap X_2$ ist auch ein Unterkomplex von X und

$$\chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - \chi(X_1 \cap X_2)$$

Viel Erfolg!