Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 8 J. Ebert
Abgabetermin: 11.12., in den Übungen.

Frageaufgabe 1. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 2. Es sei (X, A) ein Raumpaar und die Inklusion $A \to X$ eine Kofaserung. Sei Y ein weiterer Raum und seien $g_0, g_1 : A \to Y$ zwei homotope Abbildungen. Zeigen Sie, dass eine Fortsetzung $f_0 : X \to Y$ von g_0 genau dann existiert, wenn eine Fortsetzung $f_1 : X \to Y$ von g_1 existiert. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass auf die Voraussetzung, dass $A \to X$ eine Kofaserung ist, nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 3. Sei $f : X \to Y$ eine Serre-Faserung. Man kann zeigen (siehe Bredon, Proposition VII.6.3), dass f die Homotopiehochhebungseigenschaft bezüglich aller CW-Paare hat. Sei nun K ein CW-Komplex und $h_0, h_1 : K \to Y$ zwei homotope Abbildungen. Zeigen Sie, dass ein Lift g_0 von h_0 (also $g_0 : K \to X$ mit $f \circ g_0 = h_0$) genau dann existiert, wenn ein Lift g_1 von h_1 existiert. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass auf die Voraussetzung, dass f eine Serre-Faserung ist, nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 4. Seien $f : A \to X$ und $g : A \to Y$ zwei Abbildungen. Der *Doppelabbildungszylinder* $Z(f, g)$ ist der Pushout

$$\begin{tikzcd} A \times \{0,1\} = A \coprod A \arrow[r, "f \coprod g"] \arrow[d] & X \coprod Y \arrow[d] \\ A \times [0,1] \arrow[r] & Z(f,g). \end{tikzcd}$$

Fertigen Sie eine Skizze von $Z(f, g)$ an. Die Projektion $A \times [0, 1] \to [0, 1]$ induziert eine Abbildung $t : Z(f, g) \to [0, 1]$ mit $t^{-1}(0) = X$, $t^{-1}(1) = Y$ und ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd} t^{-1}((0,1]) \arrow[r, "\simeq"] & Y \\ t^{-1}((0,1)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u] \arrow[d] & A \arrow[u, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ t^{-1}([0,1)) \arrow[r, "\simeq"] & X, \end{tikzcd}$$

in dem die vertikalen Abbildungen in der linken Spalte die Inklusionen sind und alle horizontalen Abbildungen Homotopieäquivalenzen sind.

Der *Join* oder *Verbund* $X \star Y$ zweier Räume X und Y ist der Doppelabbildungszylinder $Z(p_X, p_Y)$, wobei $p_X : X \times Y \to X$ die Projektion auf X ist und p_Y die auf Y. Zeigen Sie:

(1) $X \star \emptyset = X$,
(2) $X \star * = CX$,
(3) $X \star S^0 = SX$ (Einhängung) und
(4) $S^n \star S^m \cong S^{m+n+1}$.

Aufgabe 5 (Mayer-Vietoris-Sequenz in Homotopie)**.** Es sei eine "Leiter"

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "a_n"] \arrow[d, "k_n"] & B_n \arrow[r, "b_n"] \arrow[d, "h_n"] & C_n \arrow[r, "c_n"] \arrow[d, "g_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "a_{n-1}"] \arrow[d, "k_{n-1}"] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & D_n \arrow[r, "d_n"] & E_n \arrow[r, "e_n"] & F_n \arrow[r, "f_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & \ldots \end{tikzcd}$$

abelscher Gruppen mit exakten Zeilen gegeben. Es sei vorausgesetzt, dass alle g_n Isomorphismen sind. Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$\ldots \to A_n \stackrel{(a_n,k_n)}{\to} B_n \oplus D_n \stackrel{h_n+d_n}{\to} E_n \stackrel{c_n\circ g_n^{-1}\circ e_n}{A}{}_{n-1} \to \ldots$$

exakt ist. Auf diese Art lässt sich die Mayer-Vietoris-Sequenz in Homologie konstruieren: Sei $X = U \cup V$, U, V offen, betrachte die Homologiesequenzen der Paare $(U, U \cap V)$ sowie (X, V) und verwende Ausschneidung ...

Sei nun X, U, V wie eben und $(U, U \cap V)$ sei n-zusammenhängend, sowie $(V, U \cap V)$ m-zusammenhängend; ferner $x_0 \in U \cap V$, $m, n \geq 0$ und wir setzen voraus, dass X 1-zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass eine exakte Sequenz

$$\pi_{m+n-1}((U \cap V) \to \pi_{m+n-1}(U) \times \pi_{m+n-1}(V) \to \pi_{m+n-1}(X) \to \pi_{m+n-2}(U \cap V) \to \ldots$$

existiert.