Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 9 J. Ebert

Abgabetermin: 18.12., in den Übungen.

Leseaufgabe 1. Machen Sie sich mit der Definition der kompakt-offen-Topologie auf der Menge X^Y aller stetigen Abbildungen von einem lokalkompakten Hausdorff-Raum Y in einen beliebigen Raum X vertraut, sowie mit den wichtigsten Eigenschaften dieser Topologie, zum Beispiel auf S. 529–532 in Hatcher's Buch.

Frageaufgabe 2. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3. Es sei X ein $(n-1)$-zusammenhängender Raum mit Einhängung SX. Was ist $\mathrm{conn}(SX)$ (siehe Blatt 5 für diese Notation)?

Aufgabe 4. Es sei $V \to X$ ein reelles Vektorbündel vom Rang n, und V sei mit einer Bündelmetrik ausgestattet. Sei

$$DV = \{v \in V | \|v\| \leq 1\} \subset V$$

das Einheitsscheibenbündel und

$$SV = \{v \in V | \|v\| = 1\} \subset DV$$

das Einheitssphärenbündel. Man kann zeigen, dass $DV, SV \to X$ Faserbündel sind, und dass die Inklusion $SV \to DV$ eine abgeschlossene Kofaserung ist (aber darum soll es hier nicht gehen). Der *Thom-Raum* von V ist der Quotient $\mathrm{Th}(V) := DV/SV$. Zeigen Sie:

(1) Ist X kompakt, so ist $\mathrm{Th}(V)$ homöomorph zur 1-Punkt-Kompaktifizierung V^+ von V.
(2) Ist $V = X \times \mathbb{R}^n$, so ist $\mathrm{Th}(V) \cong S^n(X_+)$, wobei $X_+ := X \coprod \{+\}$ ist und S^n die n-fache Einhängung bezeichne, also $S^1X := SX$ und $S^nX := S(S^{n-1}X)$.
(3) $\mathrm{Th}(V)$ ist $(n-1)$-zusammenhängend.

Aufgabe 5 (Die Einhängung der Hopf-Abbildung)**.** Es sei $\eta : S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung, welche bekanntlich ein Erzeuger der Gruppe $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ ist. Der Freudenthal-Einhängungssatz impliziert, dass die Einhängung

$$\mathrm{susp} : \pi_3(S^2) \to \pi_4(SS^2) = \pi_4(S^3)$$

surjektiv ist. Zeigen Sie, dass $2\mathrm{susp}([\eta]) = 0$ gilt.

Bemerkung: es folgt, dass $\pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}/2$ oder $\cong 0$ gilt. Das erstere ist der Fall, aber dies liegt jenseits der Reichweite der aus der Vorlesung bekannten Methoden.

Hinweis: natürlich ist Aufgabe 5 von Blatt 4 relevant. Darüber hinaus ist ein Trick vonnöten, den man (in etwas anderer Notation) auf S. 464 in Bredon's Buch findet.