Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III

Blatt 1 — J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 25.10.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 1: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Konstruiere eine Folge $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ von offenen Intervallen mit $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| < \varepsilon$. Zeige, dass dann $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \neq \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2: Eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ reeller Zahlen heißt *summierbar* mit Summe a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subset I$ gibt, so dass für jede endliche Teilmenge $E \subset I$ mit $E \supset E_0$ gilt $|a - \sum_{i \in E} a_i| < \varepsilon$.

1. Beweise: $(a_i)_{i \in I}$ ist genau dann summierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subset I$ gibt, so dass für jede zu E_0 disjunkte endliche Teilmenge $K \subset I$ gilt $|\sum_{i \in K} a_i| < \varepsilon$.
2. Zeige, dass $(a_i)_{i \in I}$ genau dann summierbar ist, wenn $(|a_i|)_{i \in I}$ summierbar ist.
3. Beweise: Eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ nicht-negativer reeller Zahlen ist genau dann summierbar, wenn es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\sum_{i \in E} a_i \leq c$ für jede endliche Teilmenge $E \subset I$.
4. Zeige, dass jede Teilfamilie $(a_i)_{i \in J}$, $J \subset I$ einer summierbaren Familie $(a_i)_{i \in I}$ wieder summierbar ist.
   Beweise weiterhin: Ist $(a_i)_{i \in I}$ summierbar und für $J \subset I$ eine endliche Zerlegung $J = J_1 \cup \ldots \cup J_s$ in paarweise disjunkte Teilmengen $J_1, \ldots, J_s \subset J$ gegeben, so gilt
   $$\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \in J_1} a_i + \ldots + \sum_{i \in J_s} a_i.$$

Aufgabe 3: Sei $(a_i)_{i \in I}$ summierbar. Sei $I = \coprod_{j \in \mathbb{N}} I_j$ eine Zerlegung von I in abzählbar viele disjunkte Teilmengen $I_j \subset I$. Sei weiter $s_j := \sum_{i \in I_j} a_i$. (Beachte: $(a_i)_{i \in I_j}$ ist summierbar.) Zeige, dass auch $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ summierbar ist und die Gleichung

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} s_j$$

erfüllt. Es darf Aufgabe 2 benutzt werden.
Folgere, dass das Lebesgue-Maßes einer Menge X wohldefiniert ist, d.h. dass $\mu(X)$ unabhängig von der Wahl der Zerlegung in Quadermengen ist, wenn eine solche (wie in der Definition verlangt) existiert.

Aufgabe 4: Sei

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x\}$$

das offene Standarddreieck. Bestimme wie in der Definition des Lebesgue-Maßes das Lebesgue-Maß der Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^2$.