Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III

Blatt 10 — J. Lohkamp/M. Förster

WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 17.01.2005, 8:15 Uhr

Aufgabe 37:

1. Sei für $i = 1, \ldots, k$ eine p_i-Differentialform ω_i in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $n > \sum_{i=1}^k p_i$ gegeben. Berechne eine Produktformel für die äußere Ableitung
$$d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k).$$
2. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und f, g seien stetig differenzierbare 0-Formen in $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $g = \varphi \circ f$. Zeige $df \wedge dg = 0$.

Aufgabe 38: Betrachte die in $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ erklärte 1-Form
$$\omega := -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$
und zeige, dass ω geschlossen, aber nicht exakt ist.

Aufgabe 39: Betrachte natürliche Zahlen $i_1, \ldots, i_p$ mit $i_1 < \ldots < i_p$. Es gibt eine eindeutige Permutation $\sigma = (i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{n-p})$ von $(1, \ldots, n)$ mit $j_1 < \ldots < j_p$. Durch
$$*(f \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge, dx_{i_p}) := \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-p}}$$
für einfache p-Formen und $*(\omega_1 + \omega_2) := *(\omega_1) + *(\omega_2)$ für Summen einfacher p-Formen ist der *Hodge-$*$-Operator* definiert, welcher einer beliebigen p-Form ω im (orientierten, euklidischen Vektorraum) $\mathbb{R}^n$ eine eindeutige $(n-p)$-Form $*\omega$ in $\mathbb{R}^n$ zuordnet. Zeige

1. Für jede p-Form ω $(1 \leq p \leq n)$ gilt $**\omega = (-1)^{p(n-p)} \cdot \omega$.
2. Durch
$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \omega_1 \wedge *\omega_2$$
ist ein Skalarprodukt $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ auf dem Vektorraum aller p-Formen definiert.

Aufgabe 40: Sei die 0-Form r auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ durch $r(x) := \|x\|$ definiert. Berechne $dr \wedge (*dr)$.